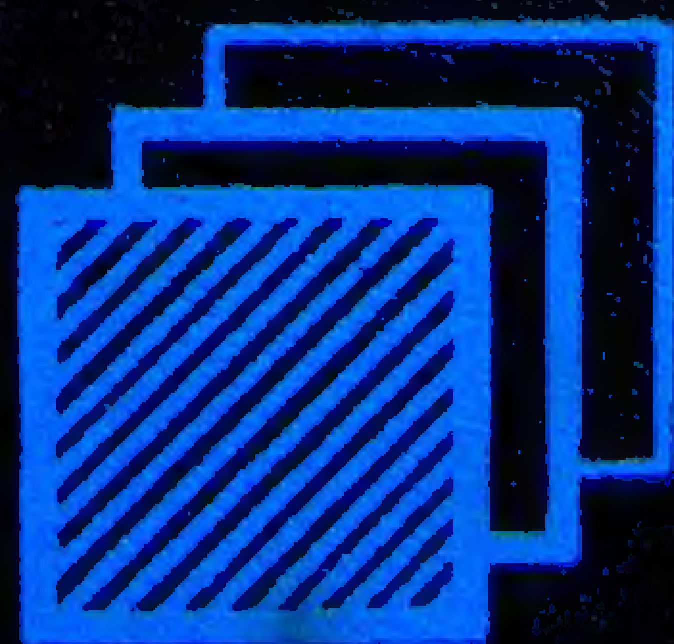
ВАЛЯНЦІН РУСАК
ЛЮДМІЛА ШЛОМА
ВІКТАР АХРАМЕНКА
АЛЕСЬ КРАЧКОЎСКІ

КУРС ВЫШЭЙШАЙ МАТЭМАТЫКІ



ВАЛЯНЦІН РУСАК
ЛЮДМІЛА ШЛОМА
ВІКТАР АХРАМЕНКА
АЛЕСЬ КРАЧКОЎСКІ

КУРС ВЫШЭЙШАЙ МАТЭМАТЫКІ

АЛГЕБРА І ГЕАМЕТРЫЯ. АНАЛІЗ ФУНКЦЫЙ АДНОЙ ЗМЕННАЙ

Зацверджана Міністэрствам адукацыі і навукі
Рэспублікі Беларусь
у якасці падручніка для студэнтаў
прыродазнаўчых і тэхнічных
спецыяльнасцяў ВНУ

МІНСК «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА» 1994

ББК 22.11я73
Р88
УДК 51(075.8)

Рэцэнзенты: кафедра матэматыкі фізічнага факультэта Беларускага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта; член-карэспандэнт Акадэміі навук Рэспублікі Беларусь, прафесар *Л. А. Яновіч*

Русак В. і інш.

Р88 Курс вышэйшай матэматыкі: Алгебра і геаметрыя. Аналіз функцый адной зменнай: Падручнік/ В. М. Русак, Л. І. Шлома, В. К. Ахраменка, А. П. Крачкоўскі.— Мн.: Выш. шк., 1994.—431 с.: іл.
ISBN 985-06-0016-0.

Гэта першая кніга комплексу, які складаецца з трох падручнікаў і двух зборнікаў задач і ўяўляе сабой першы сістэматычны курс вышэйшай матэматыкі на беларускай мове. Выкладзены асноўныя пытанні алгебры, аналітычнай геаметрыі, дыферэнцыяльнага і інтэгральнага злічэння функцый адной зменнай. Змешчаны прыклады і ілюстрацыі.

Для студэнтаў прыродазнаўчых і тэхнічных спецыяльнасцяў ВНУ.

$Р \frac{5100000000-065}{М304(03)-94}$ 16—94 ББК 22.11я73

ISBN 985-06-0016-0

Прысвячаецца памяці ўсіх тых матэматыкаў-педагогаў, хто стаяў на пачатку беларусізацыі вышэйшай матэматычнай адукацыі ў 20—30-х гадах нашага стагоддзя

ПРАДМОВА

Шаноўнае спадарства! Прапанаваны Вам падручнік — гэта сістэматычны курс вышэйшай матэматыкі, упершыню напісаны на беларускай мове. Ён будзе складацца з трох частак і сваім зместам ахопіць усю праграму курса вышэйшай матэматыкі як для тэхнічных, так і для прыродазнаўчых спецыяльнасцяў вышэйшых навучальных устаноў.

«Курс вышэйшай матэматыкі» напісаны на падставе лекцый, чытаных аўтарамі на фізічным факультэце Беларускага дзяржаўнага універсітэта, у Беларускім дзяржаўным універсітэце інфарматыкі і радыёэлектронікі і Мінскім радыётэхнічным каледжы.

Першая частка падручніка складаецца з дзевяці раздзелаў. У першы раздзел вылучаны элементы тэорыі мностваў, выказванняў, камбінаторыкі; рэчаісныя і камплексныя лікі, мнагасклады. Наступныя чатыры раздзелы абымаюць матрыцы, вызначнікі, сістэмы лінейных раўнанняў; вектарную алгебру; аналітычную геаметрыю на плоскасці і ў прасторы; лінейныя, эўклідавы і афінныя прасторы, а таксама лінейныя аператары і квадратычныя формы. Тэорыя лімітаў паслядоўнасцяў і функцый складае змест шостага раздзела. Два наступныя прысвечаны вытворным і дыферэнцыялам як першага, так і вышэйшых парадкаў функцыі адной зменнай і іх дастасаванню да выяўлення ўласцівасцяў функцыі. У раздзеле 9 разглядаецца нявызначаны інтэграл і метады інтэгравання. Паняцці азначаюцца і адпаведныя тэарэмы даказваюцца. Тэарэтычны матэрыял ілюструецца рысункамі і прыкладамі. Колькасць прыкладаў абмежаваная з прычыны таго, што яны падаюцца ў зборніку задач да гэтага курса. (Вучэбны дапаможнік «Вышэйшая матэматыка ў прыкладах і задачах» аўтараў В. Ахраменкі, С. Бяляўскага, Л. Бярозкінай і інш. пад агульнай рэдакцыяй прафесара В. Русака плануецца да выдання ў выдавецтве «Вышэйшая школа» ў 1995 г.) Разам гэтыя два выданні забяспечаць вывучэнне ўсяго курса вышэйшай матэматыкі на беларускай мове.

Матэрыял кожнага раздзела падзелены на параграфы. Параграфы (а таксама азначэнні, тэарэмы, формулы, рысункі) пазначаны двума лікамі (напрыклад, 3.14): першы з іх паказвае нумар раздзела, а другі — парадкавы нумар параграфа (азначэння, тэарэмы, формулы, рысунка), які адпавядае іх чаргаванню ў дадзеным раздзеле.

У дачыненні да аўтарства зазначым, што матэрыял падручніка быў распрацаваны наступным чынам: В. Русак — § 1.2, раздзел 6; Л. Шлома — § 1.1, раздзелы 2 і 3; В. Ахраменка — §§ 1.3—1.5, раздзелы 7—9; А. Крачкоўскі — раздзелы 4 і 5. Агульнае кіраўніцтва ўсёй працай ажыццяўляў прафесар В. Русак.

Паколькі напісанне курса вышэйшай матэматыкі на беларускай мове ажыццяўлялася ўпершыню, перад аўтарамі паўстала надзвычай цяжкая праблема, развязаць якую можна было толькі пры шчырай і зацікаўленай дапамозе з боку вялікай супольнасці спецыялістаў. Лічым прыемным абавязкам засведчыць сваю ўдзячнасць рэцэнзентам падручніка — члену-карэспандэнту АН Беларусі Л. Яновічу і выкладчыкам кафедры вышэйшай матэматыкі Беларускага педагагічнага універсітэта (загадчык кафедры — У. Шылінец), якія ўважліва прачыталі рукапіс і зрабілі карысныя заўвагі. Скасаванне адзначаных імі недахопаў садзейнічала паляпшэнню якасці зместу кнігі. Слушныя прапановы па асобных раздзелах рукапісу былі выказаны прафесарамі Р. Тышкевіч, В. Бернікам і Л. Чэркасам. Наконт мовы падручніка каштоўныя парады зроблены Л. Духвалавым, З. Санько, Т. Сухой.

Па ініцыятыве Таварыства беларускай мовы імя Ф. Скарыны ў 1992 г. дзейнічаў семінар па распрацоўцы беларускай матэматычнай тэрміналогіі. У яго працы бралі ўдзел аўтары тэрміналагічных слоўнікаў, аўтары гэтага падручніка, супрацоўнікі выдавецтваў «Вышэйшая школа», «Навука і тэхніка», спецыялісты-філолагі. Аўтары «Курса вышэйшай матэматыкі» кіраваліся напрацоўкамі семінара, якія зрабілі істотны ўплыў на тэрміналогію падручніка, а таксама слоўнікамі.

Спадзяемся, што прапанаванае выданне будзе спрыяць Беларускаму Адраджэнню.

Усе заўвагі і прапановы просім дасылаць на адрас: 220048, Мінск, праспект Машэрава, 11, выдавецтва «Вышэйшая школа».

Аўтары

АСНОЎНЫЯ АБАЗНАЧЭННІ

$\mathbf{N}$ — мноства натуральных лікаў
$\mathbf{Z}$ — мноства цэлых лікаў
$\mathbf{R}$ — мноства рэчаісных лікаў
$\mathbf{R}_+$ — мноства дадатных рэчаісных лікаў
$\mathbf{C}$ — мноства камплексных лікаў
$x \in X$ — x ёсць элемент мноства X
$x \notin X$ — элемент x не належыць мноству X
$X \subset Y$ — мноства X ёсць падмноства мноства Y
$\varnothing$ — пустое мноства
$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — мноства, якое складаецца з элементаў $x_1, x_2, \dots, x_n$
$\{x | A(x)\}$ — мноства элементаў x, якія адпавядаюць умове $A(x)$
$A \cup B$ — аб'яднанне мностваў A і B
$A \cap B$ — перасячэнне мностваў A і B
$A \setminus B$ — розніца мностваў A і B
$\equiv$ — знак тоеснай роўнасці
$\overset{\text{def}}{=}$ — роўна паводле азначэння
$\approx$ — знак набліжанай роўнасці
$A \Rightarrow B$ — з A вынікае B
$A \Leftrightarrow B$ — A, калі і толькі калі B
$\exists x$ — існуе x
$\forall x$ — для кожнага x
$k = \overline{0, n}$ — k набывае цэлыя значэнні ад 0 да n
(x_n) — лікавая паслядоўнасць з агульным элементам x_n
$|x|$ — модуль ліку x
$[x]$ — цэлая частка ліку x
$\operatorname{sign} x$ — знак x
$\sup X$ — дакладная верхняя мяжа мноства X
$\inf X$ — дакладная ніжняя мяжа мноства X
$f(X)$ — мноства значэнняў функцыі f на X
$[a, b]$ — адрэзак
(a, b) — інтэрвал
$U_\delta(a)$ — δ-акруга пункта a, г. зн. $(a-\delta, a+\delta)$
$\mathring{U}_\delta(a)$ — праколатая δ-акруга пункта a, г. зн. $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ — ліміт функцыі $f(x)$, калі x імкнецца да a
$\alpha(x) \sim \beta(x)$ — $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ ёсць эквівалентныя функцыі
$\exp(x)$ — функцыя e^x
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \dots,$
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ — вектары
$(\mathbf{a}, \widehat{\ } \mathbf{b})$ — вугал паміж вектарамі $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$
$P_L(\mathbf{a})$ — праекцыя вектара $\mathbf{a}$ на вось L
$\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$
ці $Oxyz$ — прамавугольная дэкартава сістэма каардынат у прасторы

Ox, Oy, Oz — каардынатныя восі
xOy, yOz, xOz — каардынатныя плоскасці
$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — скалярны здабытак вектараў **a**, **b**
$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — вектарны здабытак вектараў **a**, **b**
$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ — змяшаны здабытак вектараў **a**, **b**, **c**
$A_{m \times n}$ — матрыца памераў $m \times n$
A^T — матрыца, транспанаваная да матрыцы A
$|A|$, $\det A$ — вызначнік матрыцы A
M_{ij} — мінор элемента a_{ij}
A_{ij} — алгебраічны дадатак элемента a_{ij}
A^{-1} — адваротная матрыца для A
E — адзінкавая матрыца
$r(A)$ — ранг матрыцы A
$\dim A$ — памернасць прасторы A
L^n — n-мерная лінейная прастора
E^n — n-мерная эўклідава прастора
U^n — n-мерная унітарная прастора
A^n — n-мерная афінная прастора
□ — пачатак доказу сцверджання
■ — канец доказу сцверджання
▷ — пачатак развязання прыклада
◀ — канец развязання прыклада

1. УВОДЗІНЫ Ў КУРС ВЫШЭЙШАЙ МАТЭМАТЫКІ

Вывучэнне курса вышэйшай матэматыкі пачнем з апісання яе мовы і сімволікі, а таксама з разгляду базісных паняццяў (мноства, рэчаісныя і камплексныя лікі, мнагасклад). Для больш дакладнага разумення структуры тэарэм пададзім іх класіфікацыю і разгледзім найбольш ужывальныя спосабы доказу.

1.1. МНОСТВЫ І ВЫКАЗВАННІ

1°. **Паняцце мноства.** Усе матэматычныя паняцці падзяляюцца на *неазначальныя*, ці *першасныя*, і *азначальныя.*

Адно з асноўных паняццяў матэматыкі — паняцце мноства. Яно з'яўляецца неазначальным. Тэрмін *мноства* — сінонім такіх слоў як «сукупнасць», «набор» і інш. У якасці мноства мы будзем разумець сукупнасць некаторых аб'ектаў (канкрэтных ці абстрактных), якія аб'яднаныя пэўнай агульнай уласцівасцю. Мы можам казаць, напрыклад, пра мноства студэнтаў у аўдыторыі, мноства лічбаў дзесятковай сістэмы лічэння, мноства літар беларускага алфавіта і г. д. З гледзішча матэматыкі цікавасць уяўляюць аб'екты той прыроды, якія з'яўляюцца прадметам матэматычных даследаванняў. У сувязі с гэтым пры вывучэнні курса матэматыкі мы сустракаемся з мноствамі лікаў (натуральных, цэлых, рацыянальных, рэчаісных), мноствам многавугольнікаў, мноствам мнагаграннікаў і г. д.

Мноствы абазначаюць вялікімі літарамі лацінскага алфавіта, напрыклад A, B, C, X. За мноствам натуральных лікаў замацаванае абазначэнне $\mathbf{N}$; $\mathbf{Z}$ — мноства цэлых; $\mathbf{Q}$ — мноства рацыянальных; $\mathbf{R}$ — мноства рэчаісных ці сапраўдных лікаў. Элементы мностваў дамовімся абазначаць малымі літарамі лацінскага алфавіта, напрыклад $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{x}$.

Судачыненні мноства і яго элементаў апісваюцца словамі «належыць» і «ёсць элемент». Напрыклад, «Трох-

вугольнік належыць мноству многавугольнікаў», «7 ёсць элемент мноства няцотных лікаў». Для абазначэння дачыненняў «належыць» і «ёсць элемент» ужываюць сімвал $\in$. У сувязі з гэтым матэматычны запіс $x \in A$ чытаюць «x ёсць элемент мноства A» ці «x належыць мноству A». Запіс $x \notin A$ (ці $x \overline{\in} A$) будзем чытаць «x не належыць мноству A» ці «x не з'яўляецца элементам мноства A».

У тым разе, калі неабходна канкрэтызаваць, з якіх элементаў складаецца мноства, ужываюць хвалістыя дужкі. Пры гэтым скарыстоўваюць дзве формы абазначэнняў.

Калі элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ утвараюць мноства X, то гэта запісваюць наступным чынам:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Аналагічны запіс ужываюць і ў тым выпадку, калі мноства элементаў бясконцае, напрыклад:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}; \quad B = \{1, 3, 5, \ldots\}.$$

У тым разе, калі можна падаць уласцівасць $M(x)$, якая характарызуе ўсе элементы мноства A (*характарыстычную ўласцівасць мноства),* ужываюць запіс выгляду

$$A = \{x \mid M(x)\};$$

яго чытаюць «A ёсць мноства элементаў x, такіх, што $M(x)$».

Напрыклад, мноства адмоўных рэчаісных лікаў можна запісаць у выглядзе $\mathbf{R}_- = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x < 0\}$, а мноства няцотных — $D = \{x \mid x = 2n-1,\ n \in \mathbf{N}\}$.

У тэорыі мностваў разглядаюць таксама *пустое мноства* — такое, якое не змяшчае ні аднаго элемента. Яго абазначаюць сімвалам $\varnothing$.

Два мноствы называюць *роўнымі* ў тым і толькі ў тым выпадку, калі яны складаюцца з адных і тых жа элементаў. Напрыклад, мноствы B і D, пададзеныя вышэй, маюць розныя формы запісу, але, па сутнасці, яны абодва складаюцца з адных і тых жа няцотных лікаў, г. зн. $B = D$.

Мноства A называецца *падмноствам* мноства B, калі кожны элемент мноства A належыць таксама мноству B. У гэтым разе пішуць $A \subset B$ і чытаюць «A ёсць падмноства мноства B» ці «A улучана ў B». Непасрэдна

з азначэння падмноства вынікаюць наступныя ўласцівасці:

1) *пустое мноства ёсць падмноства ўсякага мноства;*

2) *кожнае мноства ёсць падмноства самога сябе;*

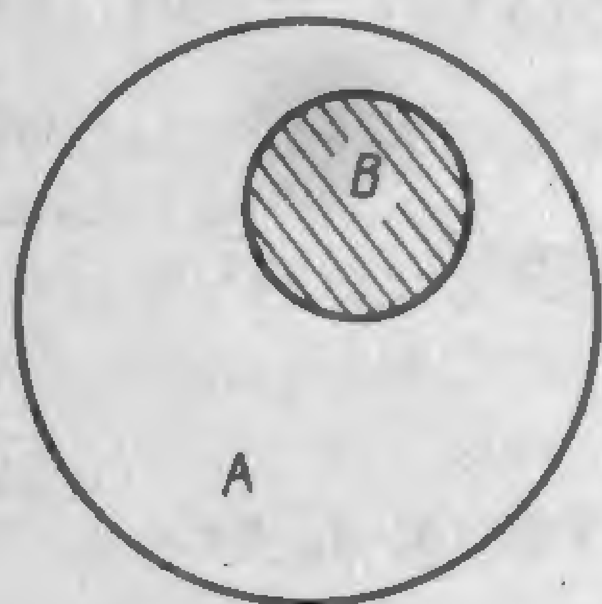
3) *калі* $A \subset B$ і $B \subset C$, *то* $A \subset C$;

4) $A = B$ *тады і толькі тады, калі* $A \subset B$ і $B \subset A$.

Запіс $A \not\subset B$ (ці $A \not\subseteq B$) азначае, што мноства A не з'яўляецца падмноствам мноства B, а запіс $A \subseteq B$ будзем разумець як тое, што $A = B$ або $A \subset B$.

Для графічнага выяўлення мностваў і дзеянняў з імі скарыстоўваюць *дыяграмы Эйлера* — Вена***.

Выяўленнем некаторага мноства A на плоскасці лічаць круг; напрыклад, з рыс. 1.1 становіцца зразумелым, што $B \subset A$.



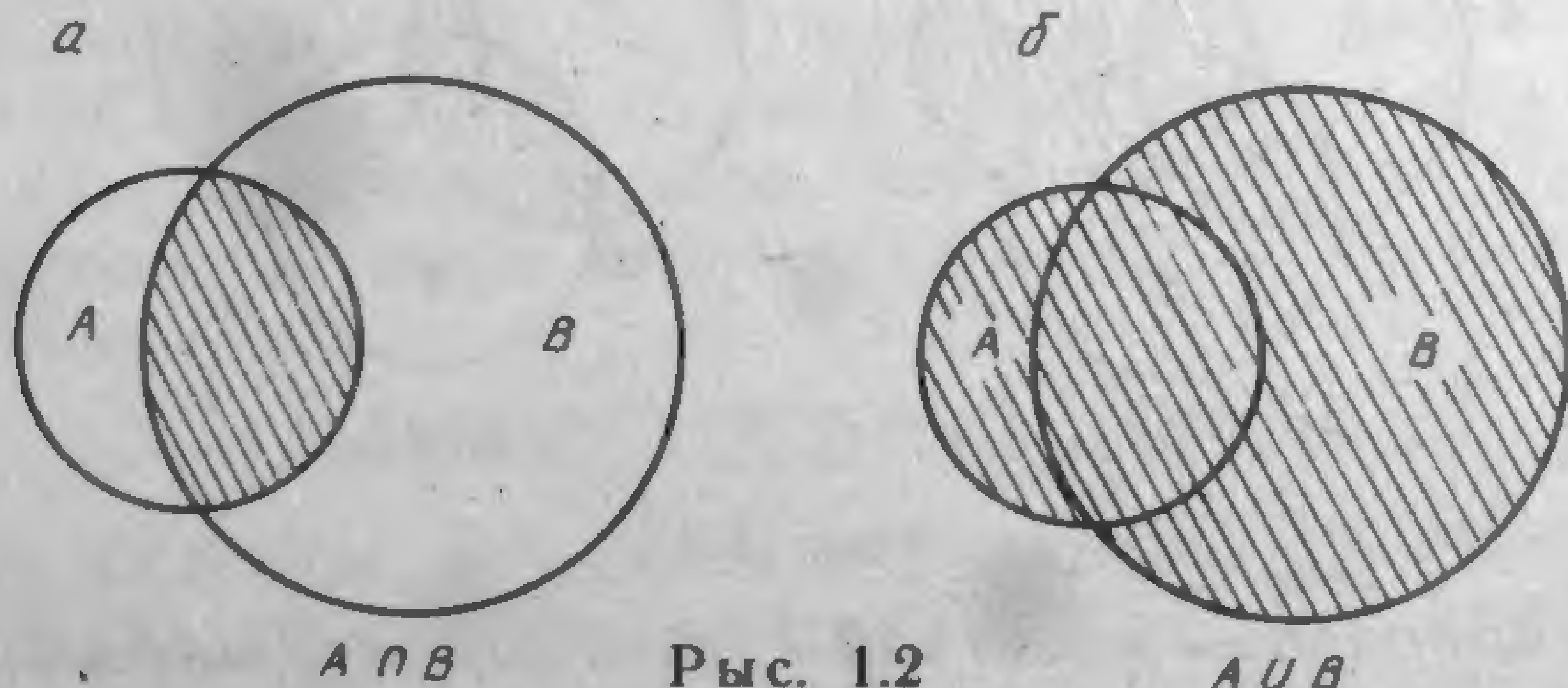
Рыс. 1.1

2°. Аперацыі з мноствамі. Разгледзім шэраг дзеянняў з мноствамі.

Азначэнне 1.1. *Перасячэннем мностваў A, B называецца мноства* $A \cap B$ *усіх тых элементаў, якія належаць мноству A, і, разам з тым, мноству B:*

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \text{ і } \ x \in B\}.$$

На рыс. 1.2, *а* мноства $A \cap B$ паказана штрыхоўкай.



Рыс. 1.2

* *Эйлер Леанард* (Euler Leonhard, 1707—1783) — нарадзіўся ў Швейцарыі, доўгі час працаваў у Расіі, матэматык, механік і фізік.

** *Вен Джон* (Venn John, 1834—1923) — англійскі логік.

Калі разглядаецца перасячэнне n ($n \in \mathbf{N}$) мностваў A_1, A_2, ..., A_n, то гэта можна карацей запісаць

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

што, адпаведна з азначэннем, вызначаецца роўнасцю

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A_i, \quad i = \overline{1,n}\}.$$

Азначэнне 1.2. *Аб'яднаннем мностваў A, B называецца мноства $A \cup B$ усіх тых элементаў, якія належаць хаця б аднаму з мностваў A, B:*

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \quad \text{ці} \quad x \in B\}.$$

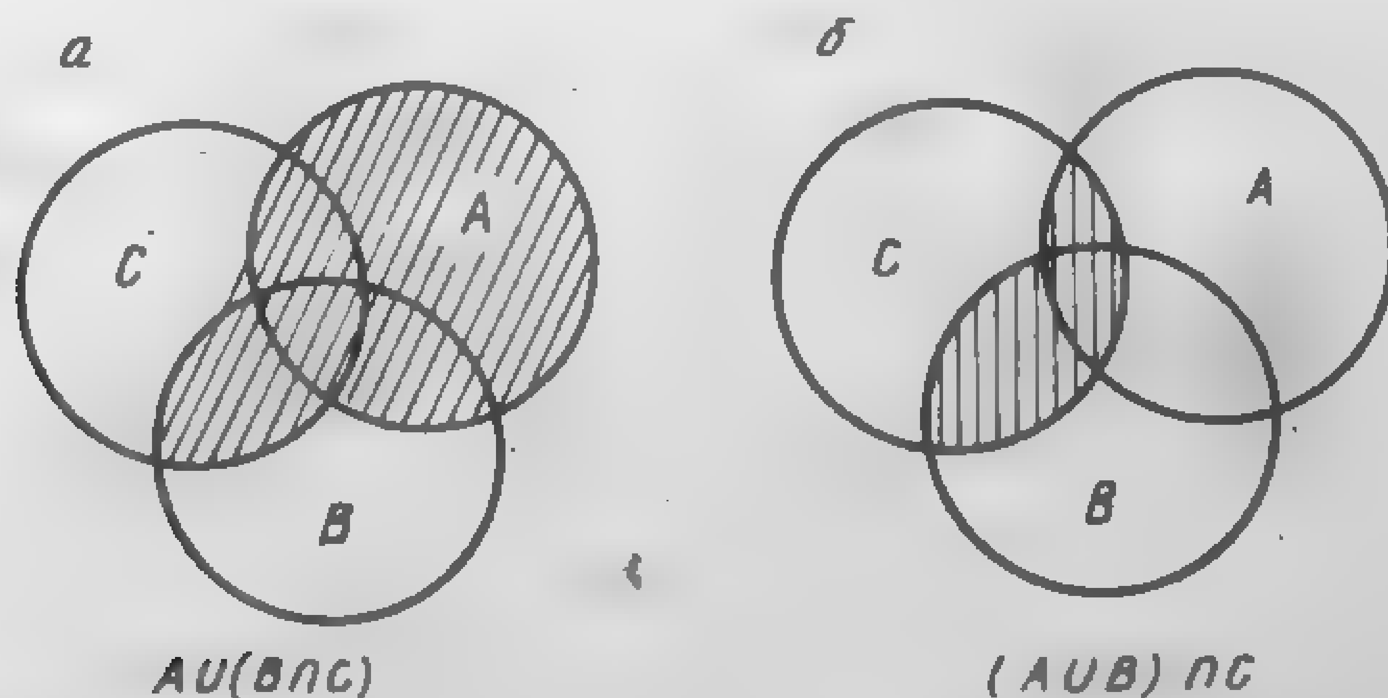
Мноства $A \cup B$ паказана штрыхоўкай на рыс. 1.2, *б*.

Аб'яднанне n мностваў A_i ($i = \overline{1, n}$) вызначаюць роўнасцю

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \overset{\text{def}}{=} \{x \mid \text{існуе такое } i, \ i = \overline{1, n}, \text{ што } x \in A_i\}.$$

Для запісу магчымых аперацый з мноствамі ўжываюць таксама дужкі. Як і ў выпадку лікаў, спачатку выконваюць тое дзеянне з мноствамі, якое запісана ў дужках. З рыс. 1.3, *а*, *б*, можна заўважыць, што размеркаванне дужак істотна ўплывае на вынік дзеянняў, у прыватнасці

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C.$$



Рыс. 1.3

Для адвольных мностваў A, B, C справядлівыя ўласцівасці:

1) $A \cup A = A$;
2) $A \cap A = A$;
3) *калі* $A \subset B$, *то* $A \cup B = B$ і $A \cap B = A$;

4) $A\cup B=B\cup A$ — *камутатыўнасць аб'яднання;*

5) $A\cap B=B\cap A$ — *камутатыўнасць перасячэння;*

6) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ — *асацыятыўнасць аб'яднання;*

7) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ — *асацыятыўнасць перасячэння;*

8) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ — *дыстрыбутыўнасць аб'яднання ў дачыненні да перасячэння;*

9) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ — *дыстрыбутыўнасць перасячэння ў дачыненні да аб'яднання.*

□ Доказ першых пяці ўласцівасцяў лёгка вынікае з азначэнняў аперацый. Для таго каб упэўніцца ў справядлівасці асацыятыўнасці аб'яднання, заўважым, што мноства $A\cup(B\cup C)$ змяшчае ўсе тыя элементы, якія належаць ці A, ці B, ці C. Але менавіта з гэтых элементаў складаецца і мноства $(A\cup B)\cup C$. Праўдзівасць уласцівасці 7 даказваецца аналагічна.

Дакажам уласцівасць 8, для чаго пераканаемся, што справядлівыя абодва сцверджанні:

а) калі $x\in(A\cup(B\cap C))$, то $x\in((A\cup B)\cap(A\cup C))$;

б) калі $x\in((A\cup B)\cap(A\cup C))$, то $x\in(A\cup(B\cap C))$.

Для гэтага скарыстаем азначэнні аперацый перасячэння і аб'яднання мностваў.

а) Няхай $x\in(A\cup(B\cap C))$. Тады $x\in A$ ці $x\in(B\cap C)$. Калі $x\in A$, то $x\in(A\cup B)$ і разам з гэтым $x\in(A\cup C)$, значыць, $x\in((A\cup B))\cap(A\cup C))$. Калі $x\in(B\cap C)$, то $x\in B$ і $x\in C$, што дазваляе сцвярджаць: $x\in(A\cup B)$ і $x\in(A\cup C)$ адначасова. З гэтай прычыны $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. У выніку разважанняў атрымалі

$$(A\cup(B\cap C))\subset((A\cup B)\cap(A\cup C)). \tag{1.1}$$

б) Для доказу адваротнага ўлучэння зыходзім з таго, што $x\in((A\cup B)\cap(A\cup C))$. Тады $x\in(A\cup B)$ і разам з гэтым $x\in(A\cup C)$. Калі $x\notin A$, то $x\in B$ і $x\in C$, значыць, $x\in B\cap C$, што дазваляе сцвярджаць, што $x\in(A\cup(B\cap C))$. Калі $x\in A$, то відавочна, што $x\in(A\cup(B\cap C))$. Мы даказалі ўлучэнне

$$((A\cup B)\cap(A\cup C))\subset(A\cup(B\cap C)).$$

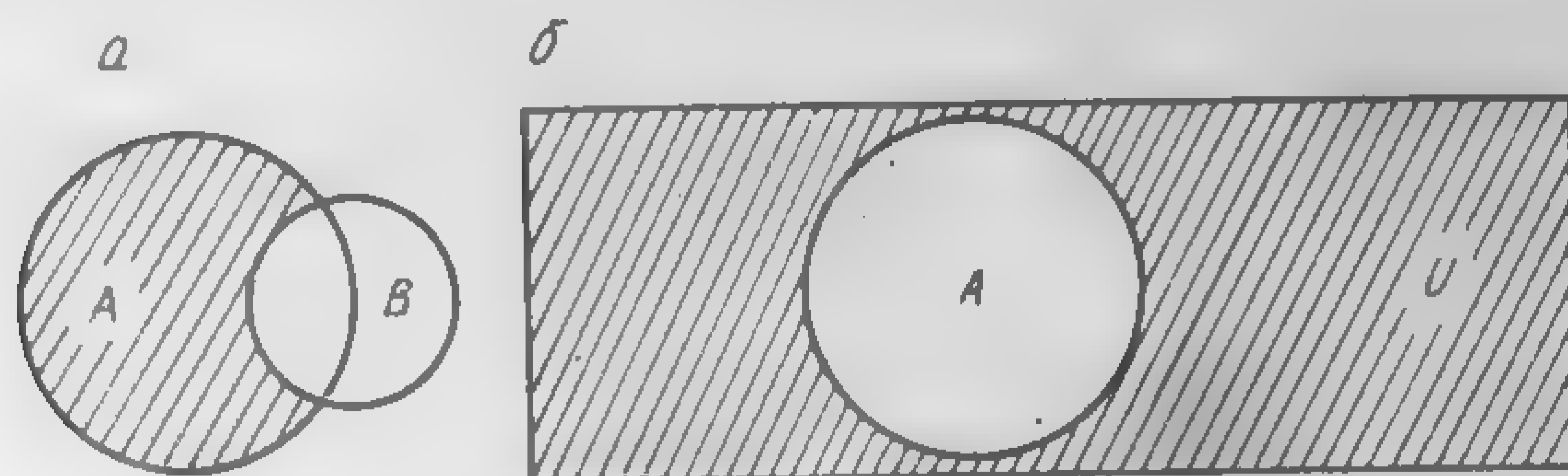
На падставе атрыманага ўлучэння і ўлучэння (1.1) прыходзім да высновы, што ўласцівасць 8 праўдзіцца.

Уласцівасць 9 даказваецца аналагічна. ■

Азначэнне 1.3. *Розніцай мностваў A, B называецца мноства $A\setminus B$ усіх тых элементаў, якія належаць мноству A і не належаць мноству B:*

$$A\setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x\in A \quad \text{і} \quad x\notin B\}.$$

Розніцу мностваў A, B наглядна падае нам рыс. 1.4, *а*.



Рыс. 1.4

Для адвольных мностваў A, B, C справядлівыя ўласцівасці:

$$\begin{aligned} &1)\ A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C);\\ &2)\ A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C). \end{aligned} \qquad (1.2)$$

□ Дакажам, напрыклад, другую ўласцівасць.

а) Няхай $x\in(A\setminus(B\cup C))$. Тады $x\in A$ і $x\notin(B\cup C)$. Значыць, $x\notin B$ і $x\notin C$. Згодна з азначэннем розніцы, $x\in(A\setminus B)$ і разам з гэтым $x\in(A\setminus C)$, адкуль атрымліваем

$$x\in((A\setminus B)\cap(A\setminus C)).$$

б) Няхай $x\in((A\setminus B)\cap(A\setminus C))$. Тады $x\in(A\setminus B)$ і $x\in(A\setminus C)$ адначасова. Гэта дае нам падставу сцвярджаць, што

$$x\in A,\ \text{але}\ x\notin B\ \text{і}\ x\notin C.$$

Адсюль атрымліваем, што

$$x\notin(B\cup C)\ \text{і}\ x\in(A\setminus(B\cup C)).$$

У выніку разважанняў а і б другая ўласцівасць даказана.

Аналагічна даказваецца першая ўласцівасць. ■

У межах пэўнай матэматычнай тэорыі разглядаюцца толькі такія мноствы, якія ёсць падмноствы аднаго і таго ж фіксаванага мноства U. Такое мноства U называецца *універсальным*. Заўважым, што паняцце універсальнага мноства не з'яўляецца абсалютным — для кожнага раздзела матэматыкі яно бывае сваім. Напрыклад, для планіметрыі U — гэта мноства пунктаў плоскасці; для стэрэаметрыі — мноства пунктаў прасторы. Для элементарнай арыфметыкі універсальным мноствам лічыцца мноства $\mathbf{Z}$ цэлых лікаў і г. д.

Калі фіксавана пэўнае універсальнае мноства U, то можна азначыць яшчэ адну аперацыю тэорыі мностваў.

Азначэнне 1.4. *Дапаўненнем мноства A (да мноства U) называецца мноства A усіх тых элементаў, якія належаць U і не належаць A:*

$$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in U \ \text{ і } \ x \notin A\}.$$

На дыяграмах універсальнае мноства U падаюць як мноства пунктаў прамавугольніка. З яго дапамогаю на рыс. 1.4, *б* паказана дапаўненне $\overline{A}$.

Няцяжка заўважыць, што дапаўненне ёсць прыватны выпадак розніцы: $\overline{A} = U \setminus A$. Асаблівасць дапаўнення ў тым, што яно азначаецца як розніца фіксаванага мноства U і яго падмноства A.

Для адвольных мностваў A, B справядлівыя ўласцівасці:

$$1)\ \overline{(\overline{A})} = A;$$

$$2)\ \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}; \qquad (1.3)$$

$$3)\ \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}. \qquad (1.4)$$

□ У праўдзівасці першай уласцівасці можна лёгка пераканацца з дапамогаю рыс. 1.4, *б*. Уласцівасці 2 і 3 ёсць прыватныя выпадкі уласцівасцяў розніцы (1.2). ■

Адзначым яшчэ, што роўнасці (1.3) і (1.4) называюцца *правіламі дэ Моргана**.

3°. Выказванні. У сучаснай матэматыцы, разам з паняццямі тэорыі мностваў, шырока скарыстоўваецца мова матэматычнай логікі, аснову якой складае тэорыя выказванняў. Зыходнымі аб'ектамі тэорыі выказванняў з'яўляюцца простыя выказванні.

Паняцце *простага выказвання*, таксама як і мноства, ёсць першаснае (неазначальнае). Простым выказваннем лічаць усякі просты сказ, у дачыненні да сцверджання якога вядома, што яно ёсць або праўда, або няпраўда і не можа быць праўдзівым і непраўдзівым адначасова.

У якасці простых выказванняў можна падаць наступныя: «Квадрат ёсць прамавугольнік», «Тры больш за 5», «π ёсць ірацыянальны лік». Лёгка заўважыць, што першае і трэцяе выказванні праўдзівыя, а другое — непраўдзівае.

---

* *Морган Аўгустус дэ* (De Morgan Augustus, 1806—1871) — шатландскі матэматык і логік.

Да выказванняў далучаюць і тыя сцверджанні, праўдзівасць якіх пакуль што не вызначана.

Напрыклад, выказванне «Усякі цотны лік, большы за два, ёсць сума двух простых лікаў» вядома ў матэматыцы як не развязаная пакуль што праблема Гольдбаха*.

У матэматычнай логіцы абстрагуюцца ад сэнсоўнага зместу і разглядаюць выказванне толькі з пазіцыі яго праўдзівасці. Праўду ці няпраўду лічаць значэннем выказвання. Выказванні абазначаюць вялікімі літарамі лацінскага алфавіта A, B, C, ..., а іх значэнні «праўда», «няпраўда» — адпаведна літарамі П, Н.

Зыходзячы з простых выказванняў, з дапамогаю логікавых аперацый можна атрымаць новыя складаныя выказванні. Складаныя выказванні таксама валодаюць адной з дзвюх уласцівасцяў «быць праўдзівым» ці «быць непраўдзівым». Праўдзіваснае значэнне складанага выказвання цалкам залежыць ад праўдзівасці простых выказванняў і ад логікавых аперацый з імі.

Азначым асноўныя логікавыя аперацыі з выказваннямі.

Азначэнне 1.5. *Адмаўленнем выказвання A называецца выказванне $\overline{A}$* («не A»), *якое праўдзіцца ў тым і толькі ў тым выпадку, калі A непраўдзівае.*

Выказванне «8 не ёсць цотны лік» з'яўляецца адмаўленнем выказвання «8 ёсць цотны лік». Няцяжка заўважыць, што зыходнае выказванне праўдзівае, а яго адмаўленне — непраўдзівае.

Аперацыя адмаўлення цалкам вызначаецца сваёй *табліцай праўдзівасці* (табл. 1.1).

Табліца 1.1

A	$\overline{A}$
П	Н
Н	П

У яе першым слупку (злева) пададзены значэнні зыходнага выказвання A, а ў другім (справа) — значэнне яго адмаўлення.

Для аперацыі адмаўлення відавочная ўласцівасць $\overline{(\overline{A})}=A$.

Азначэнне 1.6. *Кан'юнкцыяй выказванняў A, B назы-*

---

* *Гольдбах Хрысціян* (Goldbach Christian, 1690—1764) — нямецкі матэматык.

ваецца выказванне $A \wedge B$ («A і B»), *якое праўдзіцца ў тым і толькі ў тым выпадку, калі абодва выказванні* A, B *праўдзівыя* (табл. 1.2).

Табліца 1.2

A	B	$A \wedge B$
П	П	П
П	Н	Н
Н	П	Н
Н	Н	Н

У якасці прыклада кан'юнкцыі можна падаць наступнае выказванне: «Трохвугольнік ёсць многавугольнік і круг ёсць многавугольнік». Мы маем выказванне тыпу $A \wedge B$, дзе A — «Трохвугольнік ёсць многавугольнік», B — «Круг ёсць многавугольнік». Паколькі выказванне B непраўдзівае, няпраўдай з'яўляецца таксама выказванне $A \wedge B$.

Азначэнне 1.7. *Дыз'юнкцыяй выказванняў* A, B *называецца выказванне* $A \vee B$ («A ці B»), *якое праўдзіцца ў тым і толькі ў тым выпадку, калі хаця б адно з выказванняў* A, B *праўдзівае* (табл. 1.3).

Табліца 1.3

A	B	$A \vee B$
П	П	П
П	Н	П
Н	П	П
Н	Н	Н

У адпаведнасці з табліцай праўдзівым з'яўляецца выказванне «Лік пяць роўны сямі ці лік пяць меншы за сем» ($5 \leqslant 7$).

Выказванне $A \vee B$ будзем чытаць таксама: «A або B».

Азначэнне 1.8. *Імплікацыяй выказванняў* A, B *называецца выказванне* $A \Rightarrow B$ («*калі* A, *то* B»), *якое ёсць няпраўда ў тым і толькі тым выпадку, калі* A *праўдзівае, а* B *непраўдзівае* (табл. 1.4).

Табліца 1.4

A	B	$A \Rightarrow B$
П	П	П
П	Н	Н
Н	П	П
Н	Н	П

Выказванне $A \Rightarrow B$ можна чытаць таксама: «З A вынікае B», «Для таго каб B, дастаткова, каб A», «Для таго каб A, неабходна, каб B».

Выказванне A называецца *ўмовай*, B — *высновай імплікацыі*.

Адзначым, што паміж умовай і высновай у імплікацыі можа адсутнічаць сэнсоўная сувязь, але гэта не мае ўздзеяння на высвятленне праўдзівасці імплікацыі.

Напрыклад, выказванне «Калі $6:2=1$, то роўнастаронні трохвугольнік ёсць раўнабокі» з'яўляецца праўдзівым, паколькі праўдзівая яго выснова.

Азначэнне 1.9. *Эквіваленцыяй выказванняў A, B называецца выказванне* $A \Leftrightarrow B$ (*«A, калі і толькі калі B»*), *якое праўдзіцца ў тым і толькі ў тым выпадку, калі A, B маюць аднолькавыя значэнні* (табл. 1.5).

Табліца 1.5

A	B	$A \Leftrightarrow B$
П	П	П
П	Н	Н
Н	П	Н
Н	Н	П

Прыкладам праўдзівай эквіваленцыі можа служыць наступная: «Трохвугольнік ABC з большай стараной AB ёсць прамавугольны, калі і толькі калі $AB^2=AC^2+BC^2$».

Выказванне $A \Leftrightarrow B$ можна чытаць таксама: «Для таго каб A, неабходна і дастаткова каб B», ці «A ў тым і толькі ў тым выпадку, калі B», ці «A тады і толькі тады, калі B».

Калі складанае выказванне $A \Leftrightarrow B$ праўдзівае, то выказванні A, B называюцца *эквівалентнымі* ці *раўназначнымі.*

З дапамогаю пададзеных логікавых аперацый можна ствараць *складаныя выказванні*, якія залежаць ад адвольнага канечнага ліку простых выказванняў. Робяць гэта аналагічна таму, як у курсе школьнай алгебры з дапамогаю аперацый складання, адымання, множання і дзялення лікаў і літарных зменных ствараюць алгебраічныя выразы. Пры канструяванні новых выказванняў актыўна скарыстоўваюць таксама дужкі, яны паказваюць, якія выказванні з'яўляюцца зыходнымі пры логікавых дзеяннях. Карыстаючыся табліцамі праўдзівасці, можна высветліць значэнне праўдзівасці складанага выказвання. Напрыклад, можна пераканацца, што выказванне $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B)$ праўдзіцца. Для гэтага патрэбна разгледзець чатыры магчымыя выпадкі: 1) A, B — праўда; 2) A — праўда, B — няпраўда; 3) A — няпраўда, B — праўда; 4) A, B — няпраўда,— і ў кожным з гэтых выпадкаў скарыстаць адпаведныя табліцы праўдзівасці.

4°. Сцверджанні, залежныя ад зменных. У матэматычнай тэорыі, акрамя выказванняў, мы сустракаемся з рознымі сцверджаннямі, якія змяшчаюць адну або некалькі зменных. У матэматычнай логіцы іх называюць *прэдыкатамі* і абазначаюць $A(x)$, $B(x)$, $C(x, y)$, ... Пры гэтым абавязкова адзначаюць, з якога мноства разглядаецца зменная, якая фігуруе ў прэдыкаце. Сказ $A(x)$, дзе $x \in M$, не з'яўляецца выказваннем, калі яго разглядаюць на ўсім мностве M. Пры канкрэтным значэнні $x = x_0$ мы ўжо можам высветліць значэнне праўдзівасці сцверджання $A(x_0)$, значыць, $A(x_0)$ ужо ёсць выказванне. Прэдыкатамі з'яўляюцца ўсе раўнанні і няроўнасці са зменнай. Напрыклад, раўнанне $x^2 + 1 = 4$ ($x \in \mathbf{R}$) ёсць прэдыкат. Пры $x = \sqrt{3}$ гэта ёсць праўдзівае выказванне, а пры $x = 2$ — непраўдзівае. Заўважым, што дадзены прэдыкат (раўнанне) ператвараецца ў праўдзівае выказванне пры $x = \pm\sqrt{3}$, і пры кожным іншым x ($x \in \mathbf{R}$) мы атрымліваем непраўдзівыя выказванні. І ў агульным выпадку з мноства M, на якім зададзена сцверджанне $A(x)$, можна вылучыць мноства M_1 усіх тых x, для якіх $A(x)$ праўдзіцца. Яно называецца *мноствам праўдзівасці сцверджання* $A(x)$. Другое падмноства M_2 змяшчае ўсе тыя і толькі тыя x, для якіх $A(x)$ не праўдзіцца, пры гэтым $M = M_1 \cup M_2$. Для пададзенага вышэй раўнання (прэдыката) маем $M_1 = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, $M_2 = \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

Два прэдыкаты $A(x)$ і $B(x)$ называюцца *раўназначнымі,* калі супадаюць іх мноствы праўдзівасці. Раўназначнасць раўнанняў (няроўнасцяў) можна разглядаць як прыватны выпадак дадзенага паняцця. Для прэдыкатаў, як і для выказванняў, азначаюцца тыя ж аперацыі адмаўлення, кан'юнкцыі, дыз'юнкцыі, імплікацыі, эквівалентнасці.

З прэдыкатамі спалучаюцца наступныя два віды сказаў:

1) для ўсіх элементаў x з мноства M сцвярджаецца $A(x)$;

2) існуе элемент $x = x_0$ з мноства M, для якога сцвярджаецца $A(x_0)$.

Для кароткага запісу гэтых сцверджанняў скарыстоўваюць знак агульнасці $\forall$ (перавернутая першая літара англійскага слова All — усе) і знак існавання $\exists$ (перавернутая першая літара англійскага слова Exist — існуе). Знак $\forall$ замяняе ў моўных сказах словазлучэнні «для ўсіх», «для адвольнага», «для кожнага». Знак $\exists$ ска-

рыстоўваюць замест слоў «існуе», «знойдзецца». З дапамогаю гэтых сімвалаў сказы 1 і 2 можна запісаць наступным чынам:

$$1)\ \forall x,\ x \in M,\ A(x); \qquad 2)\ \exists x,\ x \in M,\ A(x).$$

5°. Тыпы тэарэм і спосабы іх доказу. Многія тэарэмы курса матэматыкі фармулююцца ў выглядзе

$$\forall (x),\ x \in M,\ (A(x) \Rightarrow B(x)). \qquad (1.5)$$

У фармулёўцы кожнай такой тэарэмы можна вылучыць умову тэарэмы (прэдыкат $A(x)$) і выснову тэарэмы (прэдыкат $B(x)$). Тэарэма дадзенага тыпу называецца *прыкметай* для $B(x)$, ці *дастатковай умовай* для $B(x)$. Пры гэтым кажуць, што $B(x)$ ёсць неабходная ўмова для $A(x)$.

У якасці прыклада можна падаць наступную тэарэму з курса элементарнай матэматыкі: «Калі сума лічбаў натуральнага ліку дзеліцца на 3, то і лік дзеліцца на 3». У гэтым сцверджанні спалучаны два сказы: $A(n)$ — «Сума лічбаў ліку n, $n \in \mathbf{N}$, дзеліцца на 3», $B(n)$ — «Лік n, $n \in \mathbf{N}$, дзеліцца на 3». Такім чынам, тэарэма сцвярджае праўдзівасць наступнага выказвання:

$$\forall n,\ n \in \mathbf{N},\ (A(n) \Rightarrow B(n)).$$

Тэарэмы тыпу (1.5) дазваляюць азначыць для іх паняцці адваротнай і процілеглай тэарэм. *Адваротная тэарэма* мае выгляд

$$\forall x,\ x \in M,\ (B(x) \Rightarrow A(x)). \qquad (1.6)$$

і процілеглая —

$$\forall x,\ x \in M,\ (\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}).$$

Для прамой тэарэмы (1.5) можна азначыць таксама *процілеглую да адваротнай,* структура якой апісваецца ў выглядзе

$$\forall x,\ x \in M,\ (\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}). \qquad (1.7)$$

Калі для $A(x)$ і $B(x)$ праўдзівыя адначасова тэарэмы (1.5) і (1.6), то мы атрымліваем тэарэму тыпу

$$\forall x,\ x \in M,\ (A(x) \Leftrightarrow B(x)),$$

якая называецца *крытэрам* або *неабходнай і дастатковай умовай* для $B(x)$ (ці для $A(x)$). Паколькі ў фарму-

лёўцы такой тэарэмы аб'яднаныя прамая і адваротная тэарэмы, то яе доказ павінен складацца з доказу неабходнасці і дастатковасці.

У якасці прыкладу ўспомнім тэарэму Віета*: «Лікі x_1, x_2 ёсць карані квадратовага раўнання $x^2+px+q=0$, $p, q \in \mathbf{R}$, калі і толькі калі справядлівыя формулы:

$$\left.\begin{aligned} x_1x_2 &= q, \\ x_1+x_2 &= -p. \end{aligned}\right\}$$

Спынімся на двух метадах, якія вельмі часта ўжываюцца пры доказе тэарэм — метадзе ад процілеглага і метадзе матэматычнай індукцыі.

Метад ад процілеглага грунтуецца на наступнай тэарэме.

Тэарэма 1.1. *Сцверджанне* $\forall x,\ x \in M,\ (A(x) \Rightarrow B(x))$ *справядліваe, калі і толькі калі справядліваe сцверджанне*

$$\forall x,\ x \in M,\ (\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}).$$

□ Нам трэба даказаць эквіваленцыю

$$\forall x,\ x \in M,\ ((A(x) \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)})).$$

Будзем лічыць далей, што ўсе сцверджанні разглядаюцца $\forall x,\ x \in M$.

Неабходнасць. Няхай праўдзіцца $A(x) \Rightarrow B(x)$. Справядлівасць імплікацыі $\overline{B(x)} \Rightarrow A(x)$ у гэтым выпадку немагчымая, бо інакш, з улікам умовы, маем $\overline{B(x)} \Rightarrow B(x)$. Значыць, праўдзіцца сцверджанне (1.7).

Дастатковасць. Няхай сцверджанне (1.7) ёсць справядліваe. Тады, скарыстоўваючы даказаную неабходнасць, маем праўдзівы сказ

$$(\overline{\overline{A(x)}}) \Rightarrow (\overline{\overline{B(x)}}),$$

што і азначае справядлівасць сцверджання (1.5). ■

На падставе даказанай тэарэмы прыходзім да высновы, што справядлівасць прамой тэарэмы тыпу (1.5) забяспечвае справядлівасць процілеглай да адваротнай (1.7). Разам з гэтым тэарэма 1.1 з'яўляецца асновай доказу тэарэм метадам ад процілеглага. Сутнасць гэтага метада ў тым, што замест зыходнай прамой тэарэмы даказваюць больш простую — процілеглую да адваротнай.

У многіх раздзелах матэматыкі часта патрабуецца

---

* *Віет Франсуа* (Viète François, 1540—1603) — французскі матэматык.

даказаць праўдзівасць сцверджання $A(n)$, якое залежыць ад натуральнай зменнай n, пры ўсіх значэннях гэтай зменнай. Для гэтага шырока скарыстоўваюць *метад матэматычнай індукцыі* — сцверджанне $A(n)$ лічаць праўдзівым для ўсіх $n \in \mathbf{N}$ пры выкананні наступных дзвюх умоў:

1) выказванне $A(n)$ праўдзівае для $n=1$;

2) з праўдзівасці выказвання $A(k)$ вынікае праўдзівасць выказвання $A(k+1)$ для ўсіх натуральных k.

Умова, што праўдзіцца выказванне $A(1)$, называецца *базай індукцыі*, а меркаванне, што праўдзіцца выказванне $A(k)$ — *індуктыўным пагадненнем* ці *індуктыўнай згодай*. Калі задачай абумоўлена, што выказванне $A(n)$ разглядаецца, пачынаючы з пэўнага ліку n_0 (не з ліку 1), то базай індукцыі з'яўляецца праўдзівасць выказвання $A(n_0)$, а індуктыўнае пагадненне тычыцца адвольнага натуральнага k, $k \geqslant n_0$.

Метад матэматычнай індукцыі шырока скарыстоўваюць пры доказе тэарэм, тоеснасцяў, няроўнасцяў, пры развязанні розных задач.

1.2. РЭЧАІСНЫЯ ЛІКІ І ІХ ЎЛАСЦІВАСЦІ

1°. Мноства рэчаісных лікаў. У школьным курсе матэматыкі праходзіць дэталёвае знаёмства з рацыянальнымі лікамі і іх уласцівасцямі. Успомнім, што *рацыянальнымі* называюцца лікі выгляду p/q, дзе p — цэлы і q — натуральны лік. Заўважым, што лікі p і q тут можна лічыць узаемна простымі.

Выконваючы з рацыянальнымі лікамі складанне, адыманне, множанне і дзяленне, мы зноў атрымліваем пэўныя рацыянальныя лікі. Пры развязанні раўнанняў другой ступені (ці больш высокіх ступеняў) узнікае неабходнасць пашырэння мноства рацыянальных лікаў. На самай справе, высветлім, што няма такога рацыянальнага ліку p/q, квадрат якога роўны двум. Дапусцім процілеглае, што $(p/q)^2=2$, ці, тое сама, $p^2=2q^2$. З апошняй роўнасці відаць, што яе левая частка p^2 дзеліцца на 2. Дзяленне p^2 на 2 магчыма пры ўмове, што p дзеліцца на 2, і, значыць, p^2 дзеліцца на 4. Адпаведна на 4 будзе дзяліцца $2q^2$, а q будзе дзяліцца на 2. Такім чынам p і q маюць агульны дзельнік 2, што супярэчыць іх узаемнай прастаце. Мы пераканаліся, што роўнасць

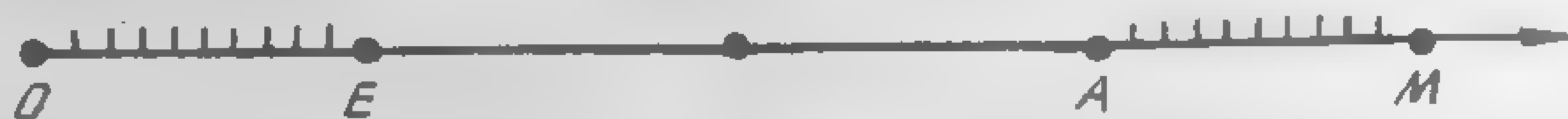
$p/q=\sqrt{2}$ немагчымая, г. зн. $\sqrt{2}$ не з'яўляецца рацыянальным лікам.

Да неабходнасці пашырэння мноства рацыянальных лікаў можна падысці з геаметрычных меркаванняў, звязаных з вымярэннем даўжыні адрэзкаў ці плошчы фігуры, напрыклад знаходжаннем дыяганалі квадрата альбо плошчы круга.

У дадзеным параграфе мы і маем намер пашырыць мноства рацыянальных лікаў, далучыўшы да іх лікі іншай структуры — ірацыянальныя.

Лікавай прамой ці *лікавай воссю* будзем называць геаметрычную прамую, на якой выбраны пункт адліку O, вызначаны дадатны кірунак і адзінкавы адрэзак OE. Зусім натуральнай з'яўляецца задача пра вымярэнне даўжыняў адрэзкаў на лікавай прамой, інакш кажучы, для адвольнага пункту M на лікавай восі патрэбна знайсці даўжыню адрэзка OM. Адрэзак OM будзем вымяраць з дапамогай маштабнага адзінкавага адрэзка OE. Высветлім, колькі разоў поўны адрэзак OE укладаецца ў адрэзку OM.

Лічым для канкрэтнасці, што пункт M знаходзіцца правей за пункт O на лікавай прамой (рыс. 1.5), і будзем



Рыс. 1.5

паслядоўна адкладваць адзін за другім, пачынаючы з пункту O, адрэзкі, роўныя адрэзку OE. Вынік заключаецца ў тым, што адрэзак OE укладаецца цэлую колькасць α_0 разоў у адрэзку OM і застаецца ў астатку адрэзак AM, меншы ці роўны адрэзку OE.

У якасці новага маштабнага адрэзку выбіраем 1/10 частку адрэзка OE. Паслядоўна адкладваем, пачынаючы з пункта A, адрэзкі, роўныя 1/10 частцы адрэзка OE. Вынік зноў будзе такі, што 1/10 частка адрэзка OE укладаецца цэлы лік α_1 разоў і застаецца астача, меншая ці роўная 1/10 частцы адрэзка, прычым $\alpha_1 \leqslant 9$.

Названы спосаб вымярэння працягваецца бясконца. У якасці новых маштабных адрэзкаў паслядоўна бярэм адну сотую частку адрэзка OE, адну тысячную частку адрэзка OE і г. д. У выніку мы атрымаем, што пункту M лікавай прамой будзе адпавядаць бясконцы дзесятковы дроб

$$\alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n\ \ldots,\quad \alpha_j \leqslant 9,\quad j=\overline{1,\ \infty}, \tag{1.8}$$

і яго патрэбна лічыць даўжынёй адрэзка OM, а канечныя дзесятковыя дробы

$$\alpha_0, \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n \qquad (1.9)$$

пры кожным натуральным n даюць вынік вымярэння адрэзка OM з недахопам.

Пададзеную схему вымярэння можна скарыстоўваць і ў тым выпадку, калі пункт M знаходзіцца злева ад пункту O, з тою розніцай, што цяпер усе дробы (1.8) і (1.9) маюць адмоўны знак.

Такім чынам, кожнаму пункту лікавай прамой з дапамогай зробленых разважанняў пастаўлены ў адпаведнасць бясконцы дзесятковы дроб.

Азначэнне 1.10. *Бясконцыя дзесятковыя дробы выгляду (1.8) называюцца рэчаіснымі ці сапраўднымі лікамі.*

Беручы пад увагу гэтае азначэнне, кажуць, што кожнаму пункту лікавай прамой адпавядае канкрэтны рэчаісны лік.

Найбольш простыя сярод рэчаісных лікаў ёсць бясконцыя перыядычныя дзесятковыя дробы, з іх складаецца мноства рацыянальных лікаў. Бясконцыя неперыядычныя дзесятковыя дробы называюцца *ірацыянальнымі лікамі*. Мы маем рацыю казаць, што мноства рэчаісных лікаў улучае ў сябе мноствы рацыянальных і ірацыянальных лікаў.

Навучымся параўноўваць рэчаісныя лікі. Перш за ўсё заўважым, што рацыянальныя лікі, якія выражаюцца канечнымі дзесятковымі дробамі, могуць быць двоякім чынам запісаныя ў выглядзе бясконцых дзесятковых перыядычных дробаў: адзін запіс з нулём у перыядзе і другі — з дзевяткаю ў перыядзе.

Напрыклад,

$$\frac{5}{10} = 0{,}500\ldots = 0{,}4999\ldots,$$

альбо ў агульным выглядзе

$$r = r_0, \ r_1 \ \dots \ r_n = r_0, \ r_1 \ \dots \ r_n 00 \ \dots = r_0, \ r_1 \ \dots \ (r_n - 1)99 \ \dots \ .$$

Першы запіс атрымліваецца далучэннем нулёў у запіс канечнага дзесятковага дробу. Другі запіс атрымаем, калі ліку r паставім у адпаведнасць пункт M на лікавай прамой і потым будзем вымяраць адрэзак OM так, як апісана вышэй.

Дамовімся, што пры параўнанні рэчаісных лікаў мы не будзем ужываць дзесятковыя дробы з нулём у пе-

рыядзе, за выключэннем аднаго ліку $0{,}00\ldots = 0{,}(0)$.

Возьмем два рэчаісныя лікі:

$$a = \pm a_0,\ a_1 \ldots\ a_n \ldots, \qquad (1.10)$$
$$b = \pm b_0,\ b_1 \ldots\ b_n \ldots. \qquad (1.11)$$

Рэчаісныя лікі a і b называюцца *роўнымі*, калі яны маюць аднолькавыя знакі і $a_j = b_j$ для $j = \overline{0,\ \infty}$.

Модулем рэчаіснага ліку a называецца неадмоўны рэчаісны лік $|a|$, такі, што

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{калі } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{калі } a < 0. \end{cases}$$

Будзем лічыць для канкрэтнасці, што a і b — няроўныя паміж сабой неадмоўныя рэчаісныя лікі, гэта азначае, што ў роўнасцях (1.10) і (1.11) узяты знак «+» для абодвух лікаў. У такім разе хоць для аднаго значэння індэкса j парушаецца роўнасць $a_j = b_j$, прытым нас цікавіць самае меншае значэнне індэкса j, для якога не супадаюць дзесятковыя знакі.

Азначэнне 1.11. *Калі a і b — неадмоўныя рэчаісныя лікі і для іх дзесятковых знакаў выконваюцца стасункі: $a_j = b_j$, $j = \overline{0,\ k-1}$, $a_k < b_k$, $k \in \mathbf{N}$, то лік a называецца меншым за лік b; адпаведна пішуць: $a < b$.*

Заўвага 1.1. Патрэбна падкрэсліць, што параўноўваць дзесятковыя знакі ў запісах (1.10) і (1.11) мы павінны злева направа і толькі да таго часу, пакуль сустрэнем няроўныя лічбы.

Калі рэчаісны лік a адмоўны, а рэчаісны лік b неадмоўны, то кажуць, што $a < b$. У рэшце рэшт адмоўны лік a называецца *меншым за адмоўны лік* b, калі $|b| < |a|$.

Як і ў выпадку рацыянальных лікаў, калі мы кажам, што рэчаісны лік a меншы за лік b $(a < b)$, то мы маем на ўвазе адначасова, што лік b большы за лік a $(b > a)$.

З пададзеных азначэнняў адразу вынікае, што знакі роўнасці і няроўнасці, адпаведна «=» і «<» (ці «>»), маюць уласцівасць транзітыўнасці на мностве рэчаісных лікаў: з роўнасцяў $a = b$ і $b = c$ вынікае $a = c$, з няроўнасцяў $a < b$ і $b < c$ вынікае $a < c$.

Няроўнасці тыпу $a < b$ называюцца *строгімі*. Шырока скарыстоўваюцца таксама *нястрогія няроўнасці*, напрыклад $a \leqslant b$. Апошняе выказванне трэба разумець у сэнсе $(a < b) \vee (a = b)$. Калі праўдзіцца выказванне $(a <$

$<b)\wedge(b<c)$, то гэта запісваюць з дапамогаю падвойнай няроўнасці $a<b<c$.

2°. Дакладныя межы лікавых мностваў. Акрамя мноства ўсіх рэчаісных лікаў, нам патрэбна мець справу таксама з рознымі яго падмноствамі, у прыватнасці з прамежкамі.

Зафіксуем розныя рэчаісныя лікі a і b. *Інтэрвалам* ці *адкрытым прамежкам* (a, b) называецца наступнае мноства рэчаісных лікаў:

$$(a, b)\overset{\text{def}}{=}\{x \mid a<x<b\}.$$

Адрэзкам $[a, b]$ ці *замкнёным прамежкам* называецца мноства

$$[a, b]\overset{\text{def}}{=}\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

Лікі a і b называюцца *канцамі адрэзка.*

Адвольны інтэрвал (α, β), якому належыць пункт x_0, будзем называць *наваколлем пункта* x_0. Сіметрычнае наваколле $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ называюць таксама *акругай пункта* x_0 (*δ-акругай пункта* x_0).

Няхай цяпер $X=\{x\}$ — адвольнае мноства рэчаісных лікаў, у якім ёсць хоць адзін лік.

Азначэнне 1.12. *Калі для пэўнага рэчаіснага ліку $M(m)$ і ўсіх элементаў $x\in X$ выконваецца няроўнасць $x\leqslant M$ ($x\geqslant m$), то мноства X называецца абмежаваным зверху (знізу). Лікі M і m называюцца адпаведна верхняй і ніжняй межамі.*

Зразумела, што кожнае абмежаванае зверху мноства мае бясконца многа верхніх межаў, сярод якіх нам цікава знайсці самую меншую. У сваю чаргу для мностваў, абмежаваных знізу, цікава знаходзіць самую большую ніжнюю мяжу. У найбольш простых выпадках, калі $X=[a, b]$ або $X=(a, b)$, самая меншая верхняя мяжа роўная b, ■ самая большая ніжняя мяжа роўная a. Тут відаць, што межы могуць належаць мноству і могуць не быць яго элементамі.

Самая большая ніжняя мяжа абмежаванага знізу мноства X называецца *дакладнаю ніжняй мяжой* і абазначаецца

$$\inf X=\inf\{x\}=\inf_{x\in X} X.$$

Самая меншая верхняя мяжа абмежаванага зверху

мноства X называецца *дакладнаю верхняй мяжой* і абазначаецца

$$\sup X = \sup\{x\} = \sup_{x\in X} X.$$

Заўвага 1.2. З пададзеных азначэнняў дакладных межаў адразу вынікае адзінасць дакладнай ніжняй і верхняй межаў.

Лема **(пра дакладную мяжу).** *Роўнасць* $M = \sup_{x\in X} X$ *раўназначная наступным двум патрабаванням:*

1) *для кожнага* $x \in X$ *выконваецца няроўнасць* $x \leqslant M$;

2) *для кожнага* $\varepsilon > 0$ *знойдзецца элемент* $x' \in X$, *такі, што* $x' > M - \varepsilon$.

□ Першае патрабаванне азначае, што M ёсць верхняя мяжа для мноства X. Другое патрабаванне азначае, што калі мы хоць трошкі зменшым M, інакш, заменім M на $M - \varepsilon$, то апошні лік ужо не будзе верхняю мяжой, г. зн. M ёсць самая меншая верхняя мяжа. ■

Тэарэма 1.2 **(пра існаванне дакладнай мяжы).** *Калі непустое мноства рэчаісных лікаў ёсць абмежаванае зверху (знізу), то яно мае дакладную верхнюю (ніжнюю) мяжу.*

□ Будзем разглядаць толькі выпадак мноства, абмежаванага зверху, і даказваць існаванне дакладнай верхняй мяжы.

Калі мноства змяшчае толькі канечную колькасць лікаў, то дакладная верхняя мяжа знаходзіцца шляхам паслядоўнага параўнання лікаў гэтага мноства.

Няхай цяпер мноства элементаў $X = \{x\}$ бясконцае, і для пэўнасці сярод яго элементаў ёсць неадмоўныя рэчаісныя лікі. Паколькі мноства X абмежаванае зверху, то $\forall x$, $x \in X$, выконваецца няроўнасць

$$x \leqslant M. \qquad (1.12)$$

Будзем разглядаць толькі неадмоўныя лікі, якія змяшчаюцца ў мностве X, і запішам іх як бясконцыя дзесятковыя дробы

$$x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots .$$

Возьмем цэлыя часткі гэтых дробаў. Усе яны не перавышаюць M, згодна з няроўнасцю (1.12), і паколькі гэтых цэлых частак можа быць толькі канечнае мноства, то сярод іх ёсць самая большая цэлая частка, абазначым яе $\overline{x}_0$.

Захаваем сярод элементаў мноства X толькі тыя, якія

маюць цэлую частку x_0, іншыя выкінем. У лікаў, што засталіся, разгледзім першыя дзесятковыя знакі і выберам самы большы з іх, абазначым яго $\overline{x}_1$. Цяпер захаваем у мностве толькі тыя лікі, у якіх першы дзесятковы знак пасля коскі роўны $\overline{x}_1$. Знойдзем сярод захаваных лікаў тыя, што маюць самае большае значэнне сотых доляў, абазначым яго $\overline{x}_2$. Заўважым, што пакінутыя для разгляду лікі большыя за тыя лікі, якія мы перастаем улічваць на кожным кроку.

Разважаючы такім чынам, мы знойдзем паслядоўна дзесятковыя знакі $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, ..., $\overline{x}_n$, ... і пабудуем рэчаісны лік

$$\overline{x}=\overline{x}_0,\ \overline{x}_1\ \overline{x}_2\ \dots\ \overline{x}_n\ \dots,$$

які і будзе дакладнаю верхняй мяжою мноства X. Для таго каб даказаць гэта, мы павінны, згодна з лемай, праверыць умовы 1 і 2.

Возьмем адвольны лік $x=x_0, x_1\dots x_n\dots\in X$. З вызначэння $\overline{x}$ відаць, што $x_0\leqslant\overline{x}_0$. І калі ў апошняй няроўнасці будзе выконвацца строгая няроўнасць $x_0<\overline{x}_0$, то на падставе азначэння 1.11 будзе выконвацца і няроўнасць $x<\overline{x}$, і, тым самым, першая ўмова лемы праўдзіцца. Калі ж $x_0=\overline{x}_0$, то пераходзім да параўнання першых дзесятковых знакаў x_1 і $\overline{x}_1$. Зноў, паводле вызначэння $\overline{x}_1$, маем, што $x_1\leqslant\overline{x}_1$. У выпадку няроўнасці $x_1<\overline{x}_1$ будзем мець і няроўнасць $x<\overline{x}$, і ўмова 1 праверана. У іншым выпадку, калі $x_1=\overline{x}_1$, пераходзім да параўнання наступных дзесятковых знакаў x_2 і $\overline{x}_2$.

На шляху параўнання дзесятковых знакаў x і $\overline{x}$ (злева направа) мы сустрэнемся на нейкім кроку з няроўнасцю $x_n<\overline{x}_n$ і, значыць, дакажам, што $x<\overline{x}$, альбо атрымаем, што ўсе дзесятковыя знакі лікаў x і $\overline{x}$ супадаюць паміж сабой, г. зн. $x=\overline{x}$. У абодвух выпад-

ках выконваецца няроўнасць $x \leqslant \overline{x}$, і, такім чынам, першая ўмова лемы праверана.

Застаецца праверыць патрабаванне 2 лемы. Няхай лік $\overline{x} - \varepsilon$ мае дзесятковы запіс $\overline{x} - \varepsilon = \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \ldots \tilde{x}_n \ldots$. Паколькі $\overline{x} - \varepsilon < \overline{x}$, то існуе такі n, $n \in \mathbf{N}$, што

$$\tilde{x}_0 = \overline{x}_0,\ \tilde{x}_1 = \overline{x}_0,\ \ldots,\ \tilde{x}_{n-1} = \overline{x}_{n-1},\ \tilde{x}_n < \overline{x}_n. \quad (1.13)$$

З другога боку, паводле пабудовы ліку x відаць, што існуе такі лік $x' = x'_0, x'_1 \ldots x'_n \ldots$, для якога

$$x' \in X,\ x'_0 = \overline{x}_0,\ x'_1 = \overline{x}_1,\ \ldots,\ x'_n = \overline{x}_n. \quad (1.14)$$

Параўноўваючы (1.13) і (1.14), атрымліваем:

$$x' > \overline{x} - \varepsilon, \quad x' \in X. \ ■$$

3°. Арыфметычныя дзеянні з рэчаіснымі лікамі. Перш чым разглядаць дзеянні з рэчаіснымі лікамі, заўважым, што для кожнага натуральнага n праўдзіцца наступнае сцверджанне: *рэчаісны лік a можна абмежаваць двума рацыянальнымі лікамі $r_{n,1}$ і $r_{n,2}$, такімі, што*

$$r_{n,1} \leqslant a \leqslant r_{n,2}, \quad r_{n,2} - r_{n,1} = 1/10^n.$$

Няхай для канкрэтнасці a ёсць дадатны лік і для яго выконваецца роўнасць $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$. Абрываючы гэты дроб на n-м знаку пасля коскі, знойдзем $r_{n,1} = a_0, a_1 \ldots a_n$, а ў якасці $r_{n,2}$ патрэбна ўзяць $r_{n,2} = a_0, a_1 \ldots a_n + 1/10^n$. Сапраўды, з улікам азначэння 1.11, атрымліваем $r_{n,1} \leqslant a$, паколькі першыя $n+1$ вартасныя лічбы ў адпаведных дзесятковых дробах аднолькавыя, наступныя вартасныя лічбы для дробу $r_{n,1}$ супадаюць з нулямі, а для дробу a неабавязкова супадаюць з нулямі. Што датычыць ліку $r_{n,2}$, то ў выпадку $0 \leqslant a_n \leqslant 8$ ён можа быць запісаны ў выглядзе

$$r_{n,2} = a_0, a_1 \ldots (a_n + 1) \quad (1.15)$$

і зразумела, што $a < r_{n,2}$, бо лічбу a_n мы замянілі на лічбу $a_n + 1$, а папярэднія вартасныя лічбы супадаюць. У тым выпадку, калі $a_n = 9$, у запісе (1.15) на апошняй пазіцыі будзе знаходзіцца лічба 0, але павялічыцца на адзінку адна з папярэдніх лічбаў, і мы зноў будзем мець $a \leqslant r_{n,2}$.

Заўважым, што разгледжанае сцверджанне больш важкае ў тым разе, калі a ірацыянальны лік, і сэнс яго

заключаецца ў тым, што ірацыянальны лік мы можам наблізіць рацыянальнымі лікамі з адвольнай дакладнасцю.

Няхай цяпер a і b — рэчаісныя лікі, α_1, α_2, β_1, β_2 — рацыянальныя лікі, для якіх выконваюцца няроўнасці

$$\alpha_1 \leqslant a < \alpha_2, \quad \beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2. \tag{1.16}$$

Разгледзім лікавае мноства, элементамі якога з'яўляюцца сумы рацыянальных лікаў $\alpha_1+\beta_1$, дзе α_1 і β_1 — адвольныя рацыянальныя лікі, падпарадкаваныя першай падвойнай няроўнасці (1.16). Гэтае мноства $\{\alpha_1+\beta_1\}$ абмежаванае зверху, паколькі кожны яго элемент абмежаваны фіксаванай сумай $\alpha_2+\beta_2$. На аснове тэарэмы 1.2 існуе адзіная дакладная верхняя мяжа мноства $\{\alpha_1+\beta_1\}$.

Сумай рэчаісных лікаў a *і* b называецца дакладная верхняя мяжа

$$\sup_{\alpha_1 \leqslant a,\ \beta_1 \leqslant b} \{\alpha_1+\beta_1\} = a+b.$$

Разгледзім мноства, элементамі якога з'яўляюцца здабыткі $\alpha_1 b_1$ рацыянальных лікаў α_1, β_1, аналагічным спосабам азначым і здабытак рэчаісных лікаў.

Здабыткам рэчаісных лікаў a *і* b называецца дакладная верхняя мяжа

$$\sup_{\alpha_1 \leqslant a,\ \beta_1 \leqslant b} \{\alpha_1\beta_1\} = ab.$$

Непасрэдна з азначэнняў і адпаведных уласцівасцяў сумы і здабытку рацыянальных лікаў вынікаюць наступныя *асноўныя ўласцівасці арыфметычных дзеянняў з рэчаіснымі лікамі:*

1) $a+b=b+a$ — *камутатыўнасць сумы;*

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ — *асацыятыўнасць сумы;*

3) *існуе рэчаісны лік* $0=0,(0)$, *такі, што* $a+0=a$ $\forall a \in \mathbf{R}$ *(асаблівае значэнне нуля);*

4) *для кожнага рэчаіснага ліку* a *існуе процілеглы яму лік* a', *такі, што* $a+a'=0$;

5) $ab=ba$ — *камутатыўнасць здабытку;*

6) $(ab)c=a(bc)$ — *асацыятыўнасць здабытку;*

7) *існуе рэчаісны лік* 1, *такі, што* $a\cdot 1=a$ $\forall a \in \mathbf{R}$ *асаблівае значэнне адзінкі);*

8) *для кожнага рэчаіснага ліку, няроўнага нулю, існуе адваротны лік* a', *такі, што* $aa'=1$;

9) $(a+b)c=ac+bc$ — *дыстрыбутыўнасць здабытку ў дачыненні да сумы;*

10) *з няроўнасці* $a>b$ *вынікае* $a+c>b+c$;

11) *з няроўнасцяў* $a>b$ *і* $c>0$ *вынікае* $ac>bc$;

12) *якім бы ні быў адвольны рэчаісны лік* a, *магчыма лік* 1 *узяць складнікам столькі разоў, што атрыманая сума перавысіць лік* a.

Часта скарыстоўваецца магчымасць складваць няроўнасці аднолькавага сэнсу: калі $a<b$ і $c<d$, то $a+c<b+d$. Сапраўды, на падставе уласцівасці 10 маем $a+c<b+c$ і $c+b<d+b$, адкуль з улікам транзітыўнасці знаку «$<$» і камутатыўнасці сумы атрымаем патрэбную няроўнасць $a+c<b+d$.

На даканчанне дакажам *тры часта ўжывальныя стасункі для рэчаісных лікаў:*

$$|ab|=|a|\cdot|b|, \tag{1.17}$$

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|, \tag{1.18}$$

$$|a-b|\geqslant\big||a|-|b|\big|. \tag{1.19}$$

□ Роўнасць (1.17) непасрэдна вынікае з азначэнняў модуля і здабытку рэчаісных лікаў.

Для доказу ўласцівасці (1.18) заўважым, што на аснове азначэнняў модуля і правілаў параўнання рэчаісных лікаў маем няроўнасці $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$, $-|b|\leqslant b\leqslant|b|$. Складваючы няроўнасці аднолькавага сэнсу, будзем мець $-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$, адкуль і вынікае правільнасць судачынення (1.18).

Няроўнасць (1.19) вынікае цяпер наступным чынам. Паколькі $a=(a-b)+b$, то з дапамогай няроўнасці (1.18) маем $|a|\leqslant|a-b|+|b|$ ці, тое сама,

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

Калі памяняць месцамі a і b, то атрымаем

$$|a-b|\geqslant|b|-|a|,$$

што разам з папярэдняй няроўнасцю прыводзіць да стасунку (1.19). ■

1.3. КАМПЛЕКСНЫЯ ЛІКІ

1°. Алгебраічная форма камплекснага ліку. Вядома, што квадратовае раўнанне з рэчаіснымі каэфіцыентамі і адмоўным дыскрымінантам не мае рэчаісных каранёў. У прыватнасці, раўнанне $x^2+1=0$ не мае каранёў на мностве рэчаісных лікаў $\mathbf{R}$. Узнікае неабходнасць пашы-

рэння мноства $\mathbf{R}$ так, каб на больш шырокім мностве было развязальным квадратовае раўнанне з усякімі рэчаіснымі каэфіцыентамі.

Упарадкаваную пару $(x; y)$ рэчаісных лікаў x і y называюць *камплексным лікам* і абазначаюць яго літарай z, г. зн.

$$z \overset{\text{def}}{=} (x;\ y).$$

Два камплексныя лікі $z_1=(x_1;\ y_1)$, $z_2=(x_2;\ y_2)$ называюцца *роўнымі*, калі і толькі калі $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

Сума і здабытак камплексных лікаў z_1 і z_2 абазначаюцца адпаведна z_1+z_2 і z_1z_2 і азначаюцца формуламі:

$$z_1+z_2 \overset{\text{def}}{=} (x_1+x_2;\ y_1+y_2), \tag{1.20}$$

$$z_1z_2 \overset{\text{def}}{=} (x_1x_2-y_1y_2;\ x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.21}$$

З гэтых формул, у прыватнасці, вынікае, што:

$$(x_1;\ 0)+(x_2;\ 0)=(x_1+x_2;\ 0),\ \ (x_1;\ 0)(x_2;\ 0)=(x_1x_2;\ 0),$$

г. зн. аперацыі з камплекснымі лікамі тыпу $(x;\ 0)$ падобныя да аперацый з рэчаіснымі лікамі. Па гэтай прычыне камплексны лік $(x;\ 0)$ атаясамляюць з рэчаісным лікам x: $(x;\ 0)\equiv x$. Такім чынам, мноства рэчаісных лікаў улучана ў мноства камплексных лікаў.

Сярод камплексных лікаў асаблівае месца займае лік $(0;\ 1)$, які называюць *уяўнаю адзінкай* і абазначаюць праз i:

$$i \overset{\text{def}}{=} (0;\ 1).$$

Згодна з формулай (1.21), вылічым:

$$ii=(0;\ 1)(0;\ 1)=(-1;\ 0)=-1,$$

г. зн. $i^2=-1$. З дапамогаю формул (1.20), (1.21) атрымаем:

$$iy=(0;\ 1)(y;\ 0)=(0;\ y),$$
$$(x;\ y)=(x;\ 0)+(0;\ y)=x+iy.$$

Такім чынам, кожны камплексны лік $z=(x;\ y)$ можна запісаць у выглядзе

$$z=x+iy. \tag{1.22}$$

Запіс камплекснага ліку $z=(x;\ y)$ у выглядзе (1.22) называюць *алгебраічнаю формай камплекснага ліку.* Пры гэтым лік x называюць *рэчаіснаю часткай*

камплекснага ліку z і абазначаюць Re z, а лік y — *уяўнаю часткай* і абазначаюць Im z:

$$\operatorname{Re} z \overset{\text{def}}{=} x, \quad \operatorname{Im} z \overset{\text{def}}{=} y.$$

Калі $x=0$, то камплексны лік $z=iy$ называюць *уяўным лікам.*

Аперацыі складання і множання камплексных лікаў маюць уласцівасці:

1) $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$ — *камутатыўнасць;*

2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ — *асацыятыўнасць;*

3) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ — *дыстрыбутыўнасць.*

Гэтыя ўласцівасці вынікаюць з азначэння аперацый складання і множання камплексных лікаў і ўласцівасцяў адпаведных аперацый з рэчаіснымі лікамі.

Заўважым, што складанне і множанне камплексных лікаў можна выконваць паводле правілаў дзеянняў з мнагаскладамі, замяняючы i^2 на -1. Напрыклад, роўнасць (1.21) можна атрымаць так:

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+ix_2y_1+i^2y_1y_2=$$
$$=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Мноства камплексных лікаў абазначаюць літарай **C**. Лікі $0\overset{\text{def}}{=}0+0i$ і $1=1+0i$ на мностве **C** маюць тыя ж самыя ўласцівасці, якія яны маюць на мностве **R**:

$$z+0=z, \quad z\cdot 1=z \quad \forall z,\ z\in \mathbf{C}.$$

На мностве **C** *адыманне* ўводзіцца як аперацыя, адваротная складанню. Для кожнай пары камплексных лікаў $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ існуе, і пры тым толькі адзін, камплексны лік z, такі, што

$$z+z_2=z_1. \tag{1.23}$$

Гэты лік называюць *розніцай лікаў* z_1 і z_2 і абазначаюць z_1-z_2.

Сапраўды, з раўнання (1.23), згодна з правілам роўнасці і азначэннем (1.20) сумы камплексных лікаў, вынікае

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

У прыватнасці, розніцу $0-z$ абазначаюць $-z$.

Дзяленне на мностве **C** уводзіцца як аперацыя, адваротная множанню, а *дзеллю ад дзялення камплекснага*

ліку z_1 *на лік* z_2 называюць такі лік z, што праўдзіцца роўнасць

$$zz_2 = z_1; \tag{1.24}$$

абазначаюць $z_1 : z_2$ або z_1/z_2.

Дакажам, што *раўнанне* (1.24) *для ўсякіх камплексных лікаў* z_1 *і* z_2, *дзе* $z_2 \neq 0$, *мае адзіны развязак.*

□ Памножым абедзве часткі раўнання (1.24) на камплексны лік $x_2 - iy_2 \neq 0$ (бо $z_2 \neq 0$) і атрымаем раўнанне

$$z(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2) = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2),$$

раўназначнае раўнанню (1.24). Пасля перамнажэння камплексных лікаў атрымаем

$$z(x_2^2 + y_2^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2).$$

Падзелім гэтае раўнанне на рэчаісны лік $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$ і заменім z на z_1/z_2, атрымаем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \tag{1.25}$$

што і даказвае адзінасць развязання раўнання (1.24). ■

Камплексны лік $x - iy$ называюць *спалучаным з камплексным лікам* $z = x + iy$ і абазначаюць $\overline{z}$: $\overline{z} \overset{\text{def}}{=} x - iy$. У такім разе формула (1.25) вылічэння дзелі камплексных лікаў можа быць запісана ў выглядзе

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}. \tag{1.26}$$

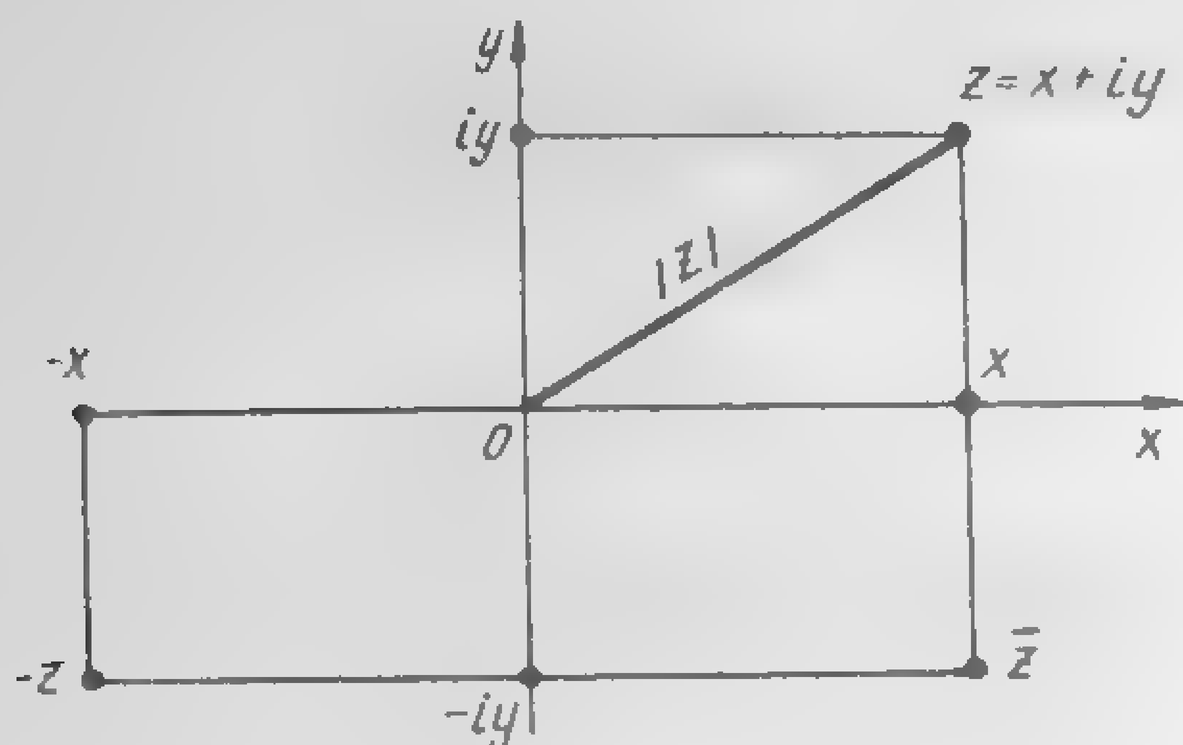
Такім чынам, каб падзяліць два камплексныя лікі z_1 і z_2, дастаткова лічнік і назоўнік дробу памножыць на лік, спалучаны з назоўнікам.

2°. Геаметрычнае выяўленне камплексных лікаў. Няхай на плоскасці зададзена прамавугольная сістэма каардынат. Камплексны лік $z = x + iy$ можна пазначыць як пункт плоскасці з каардынатамі $(x; y)$ і, наадварот, кожнаму пункту плоскасці з каардынатамі $(x; y)$ адпавядае адзін камплексны лік $z = x + iy$. Такім чынам, паміж мноствам **C** і пунктамі плоскасці ўстанаўліваецца ўзаемна адназначная адпаведнасць. Вось чаму словы «камплексны лік» і «пункт плоскасці» ўжываюцца як сінонімы.

Рэчаісныя лікі, г. зн. лікі $x + 0i$, выяўляюцца пунктамі восі абцыс, а ўяўныя лікі, г. зн. лікі $iy = 0 + iy$,— пунктамі восі ардынат. Па гэтай прычыне вось абцыс назы-

ваюць *рэчаіснай воссю*, а вось ардынат — *уяўнай воссю*. Плоскасць, на якой выяўляюцца камплексныя лікі, называецца *камплекснай плоскасцю*.

На рыс. 1.6 выяўлены пункты z, $-z$, $\overline{z}$. Адзначым, што пункты z і $-z$ — сіметрычныя ў дачыненні да



Рыс. 1.6

пачатку каардынатаў O, а пункты z і $\overline{z}$ — сіметрычныя ў дачыненні да рэчаіснай восі.

Лік $\sqrt{x^2+y^2}$ абазначаюць $|z|$ і называюць *модулем камплекснага ліку* z:

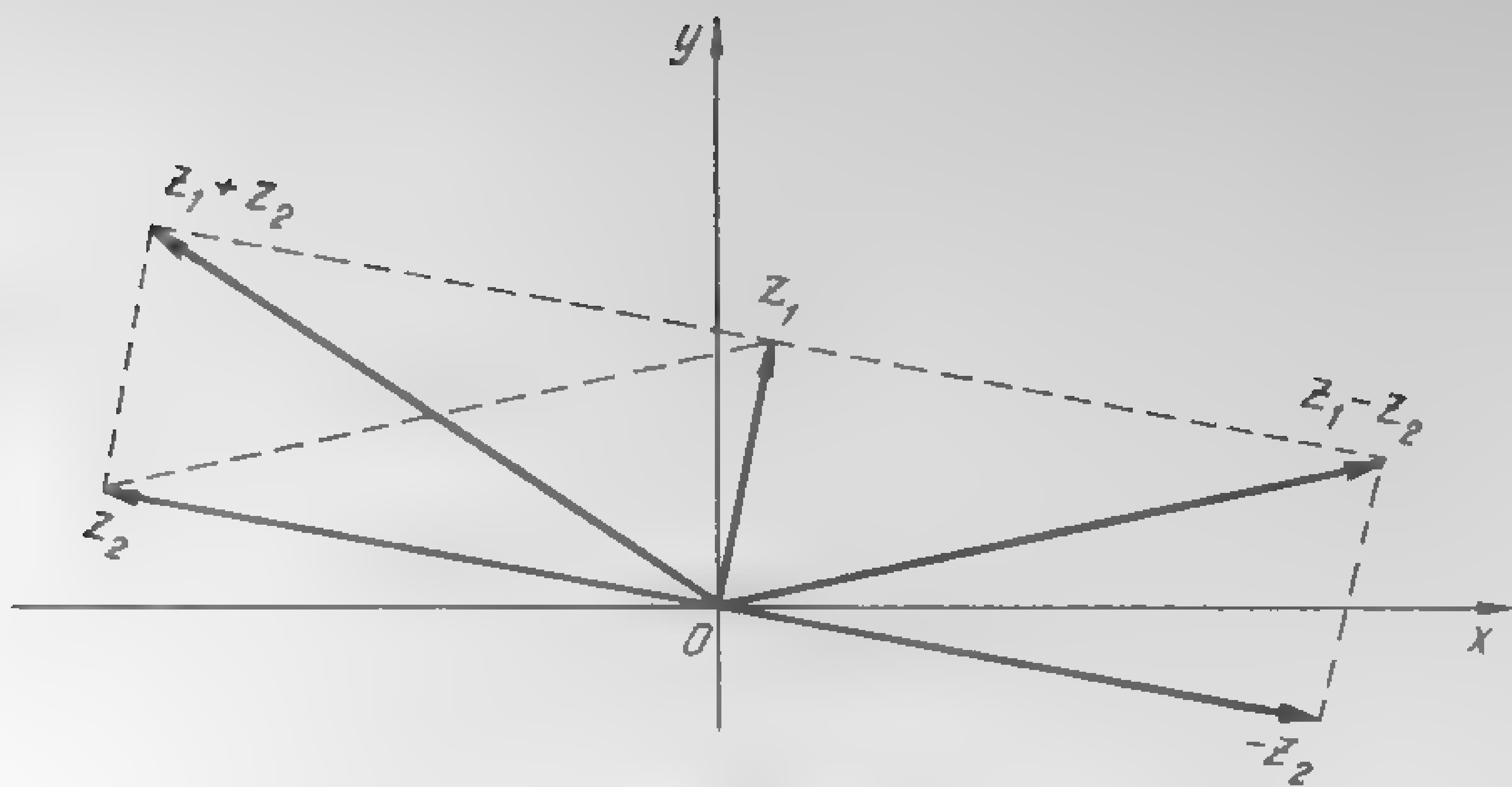
$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.27}$$

Камплексны лік $z=x+iy$ можна выявіць на камплекснай плоскасці як вектар з пачаткам у пункце O і канцом у пункце $(x;\ y)$. Гэты вектар будзем абазначаць тою ж літараю z. З геаметрычных меркаванняў (гл. рыс. 1.6) або з формулы (1.27) відаць, што $|z|$ супадае з даўжынёй вектара z.

З дапамогаю вектарнай інтэрпрэтацыі наглядна ілюструюцца сума і розніца камплексных лікаў. Лік z_1+z_2 выяўляецца вектарам, пабудаваным паводле правіла складання вектараў z_1 і z_2 (рыс. 1.7), а вектар z_1-z_2 можна пабудаваць як суму вектараў z_1 і $-z_2$. Адлегласць паміж пунктамі z_1 і z_2 роўная даўжыні вектара z_1-z_2 (гл. рыс. 1.7), г. зн. роўная $|z_1-z_2|$. Гэтае ж сцверджанне вынікае з роўнасці

$$|z_1-z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Такім чынам, $|z_1-z_2|$ ёсць адлегласць паміж пунктамі z_1 і z_2.



Рыс. 1.7

Дакажам, што *для ўсякіх камплексных лікаў* z_1 *і* z_2 *праўдзяцца няроўнасці:*

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \qquad (1.28)$$

☐ Разгледзім трохвугольнік з вяршынямі O, z_1 і z_1+z_2 (гл. рыс. 1.7). Даўжыні яго старон роўныя $|z_1|$, $|z_2|$ і $|z_1+z_2|$, а няроўнасці (1.28) выражаюць вядомыя з геаметрыі ўласцівасці даўжынь старон трохвугольніка. ■

3°. Трыганаметрычная форма камплекснага ліку. Няхай $r=|z|$ ёсць модуль камплекснага ліку z, а φ — вугал паміж рэчаіснай воссю і вектарам z, які адлічваецца ад дадатнага кірунку рэчаіснай восі. Калі адлік вядзецца супраць руху гадзіннікавай стрэлкі, то велічыня вугла лічыцца дадатнаю, і калі па руху гадзіннікавай стрэлкі — адмоўнаю. Гэты вугал называюць *аргументам камплекснага ліку* z $(z\neq0)$ і абазначаюць $\arg z$. Для ліку $z=0$ аргумент не вызначаецца, таму надалей пры выкарыстанні аргумента $\arg z$ будзем лічыць, што $z\neq0$.

З геаметрычных меркаванняў (рыс. 1.8) атрымліваецца:

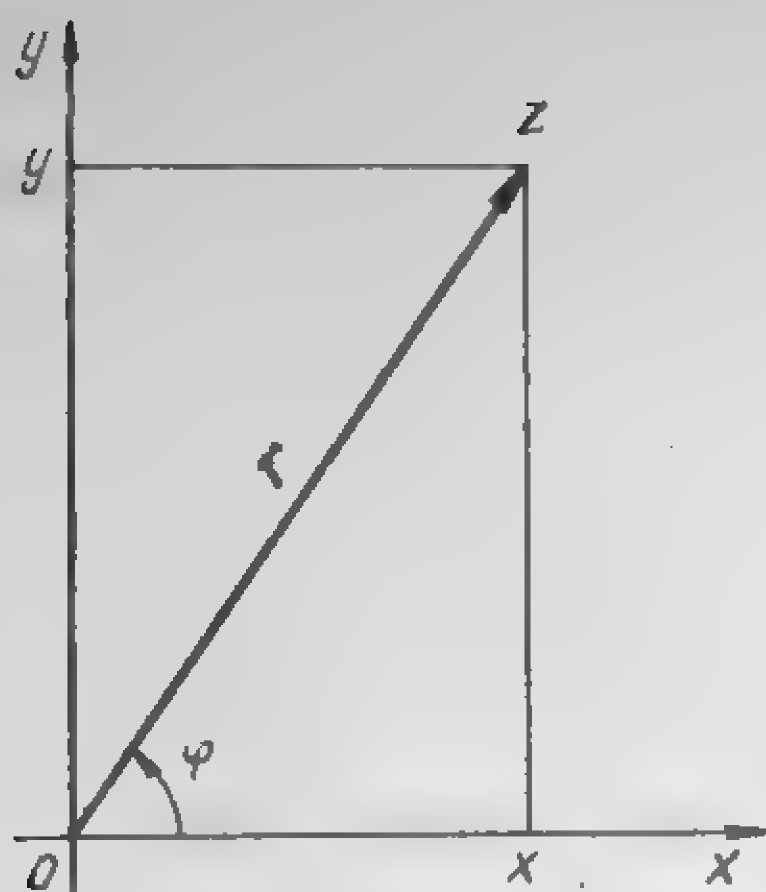
$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi, \qquad (1.29)$$

адкуль вынікае, што ўсякі камплексны лік $z=x+iy$ дапускае выяўленне

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (1.30)$$

Запіс камплекснага ліку $z\neq0$ у выглядзе (1.30) называюць *трыганаметрычнаю формай камплекснага ліку.*

З формул (1.27) і (1.29), улічваючы, што $|z|=r$, знаходзім:



Рыс. 1.8

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi=x/\sqrt{x^2+y^2},\\ \sin\varphi=y/\sqrt{x^2+y^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (1.31)$$

З сістэмы (1.31) знаходзіцца аргумент камплекснага ліку $z\neq 0$. Гэтая сістэма мае бясконца многа развязкаў выгляду $\varphi=\varphi_0+2\pi k$, дзе $k\in\mathbf{Z}$; φ_0 — адзін з развязкаў роўнасцяў (1.31), г. зн. аргумент камплекснага ліку вызначаецца неадназначна.

Для знаходжання аргумента звычайна карыстаюцца не формуламі (1.31), а формулай

$$\operatorname{tg}\varphi=y/x, \qquad (1.32)$$

якая атрымліваецца пасля дзялення другой з роўнасцяў (1.29) на першую. Трэба мець на ўвазе, што не ўсе значэнні φ, якія праўдзяць раўнанне (1.32), з'яўляюцца аргументамі ліку z.

Калі камплексныя лікі зададзены ў трыганаметрычнай форме:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ \ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

то іх здабытак

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\\ &=r_1r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+\\ &+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2))=\\ &=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).\end{aligned} \qquad (1.33)$$

Такім чынам, здабытак двух камплексных лікаў ёсць такі камплексны лік, модуль якога роўны здабытку модуляў множнікаў, а аргумент роўны суме аргументаў множнікаў:

$$|z_1z_1|=|z_1||z_2|,\quad \arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2.$$

Карыстаючыся формулаю (1.26), выканаем дзяленне камплексных лікаў z_1 і z_2 ($z_2\neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}((\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+$$
$$+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2))=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \qquad (1.34)$$

Такім чынам, модуль дзелі двух камплексных лікаў роўны дзелі модуляў дзеліва і дзельніка, а аргумент дзелі роўны розніцы аргументаў дзеліва і дзельніка:

$$\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2,\quad z\neq 0.$$

З формулы (1.33) вынікае, што

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^2=r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi).$$

Метадам матэматычнай індукцыі лёгка выводзіцца формула

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \qquad (1.35)$$

якая называецца *формулай Муаўра**.

З геаметрычных меркаванняў (гл. рыс. 1.8) вынікае правіла параўнання двух камплексных лікаў у трыганаметрычнай форме:

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

калі і толькі калі $r_1=r_2$, $\varphi_1=\varphi_2+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Разгледзім некаторыя важныя ўласцівасці камплексна-спалучаных лікаў. Няхай $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, тады

$$\bar z=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)=r(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)),$$

г. зн. калі $\varphi=\arg z$, то $-\varphi=\arg\bar z$. Адсюль і з роўнасцяў (1.33) і (1.34) вынікае, што

---

* *Муаўр Абрахам дэ* (Moivre Abraham de, 1667—1754) — англійскі матэматык.

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad \overline{(z^n)} = (\overline{z^n}) = (\overline{z})^n, \ n \in \mathbf{N},$$

а з азначэння камплексна-спалучанага ліку вынікае, што

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

4°. Караняванне камплексных лікаў. *Коранем n-й ступені з камплекснага ліку $a \neq 0$* называецца такі камплексны лік $z \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a}$, што

$$z^n = a. \tag{1.36}$$

Такім чынам, знаходжанне кораня n-й ступені з камплекснага ліку a раўназначна развязанню раўнання (1.36).

Калі $z = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то, згодна з формулаю Муаўра (1.35), раўнанне (1.36) набывае выгляд

$$\varrho^n(\cos n\theta + \sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

адкуль на падставе правіла параўнання камплексных лікаў у трыганаметрычнай форме вынікае, што:

$$\varrho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

а таму

$$\varrho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbf{Z}, \tag{1.37}$$

дзе $\sqrt[n]{r}$ ёсць арыфметычны корань з дадатнага ліку r. Гэта азначае, што лікі

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) \tag{1.38}$$

з'яўляюцца развязкамі раўнання (1.36) і іншых развязкаў гэтае раўнанне не мае.

Заўважым, што лікі $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ розныя, бо іх аргументы $\theta_0 = \varphi/n$, $\theta_1 = \varphi/n + 2\pi/n$, $\ldots$, $\theta_{n-1} = \varphi/n + 2\pi(n-1)/n$ розныя і адрозніваюцца адзін ад другога менш, чым на 2π. Далей $z_n = z_0$ бо $|z_n| = |z_0| = \sqrt[n]{r}$ і $\theta_n = \theta_0 + 2\pi$. Аналагічна $z_{n+1} = z_1$ $z_{-1} = z_{n-1}$ і г. д.

Такім чынам, раўнанне (1.36) пры $a \neq 0$ мае роўна n розных каранёў, якія вызначаюцца паводле формул (1.37) і (1.38), дзе $k = \overline{0, n-1}$.

На камплекснай плоскасці пункты z_k $(k=\overline{0,\ n-1})$ размяшчаюцца ў вяршынях правільнага n-вугольніка, умежанага ў акружыну радыусу $\sqrt[n]{r}$ з цэнтрам у пункце O.

1.4. КАМБІНАТОРЫКА І БІНОМ НЬЮТАНА

1°. Камбінаторыка. На практыцы часта даводзіцца выбіраць з некаторага мноства аб'ектаў падмноства элементаў, якія маюць тыя або іншыя ўласцівасці. Напрыклад, вылучэнне ўдзельнікаў сходу ў кіраўнічы орган грамадскай арганізацыі. Паколькі ў такіх задачах гаворка ідзе пра тыя або іншыя камбінацыі аб'ектаў, то іх называюць *камбінаторнымі задачамі.* Раздзел матэматыкі, дзе вывучаюць камбінаторныя задачы, называюць *камбінаторыкай.*

Пры камбінаторных разліках часта выкарыстоўваецца наступнае *правіла множання*: калі нейкі выбар A можна зрабіць n рознымі спосабамі, а для кожнага з гэтых спосабаў нейкі іншы выбар B можна ажыццявіць m спосабамі, то выбар A і B (з названым парадкам) можна зрабіць mn спосабамі.

Напрыклад, з Мінска ў Гомель можна даехаць цягніком, аўтобусам, самалётам; з Гомеля ў Кіеў — цягніком, аўтобусам, самалётам і цеплаходам. Колькі розных спосабаў падарожжа па маршруце Мінск — Гомель — Кіеў можна прапанаваць турысту? Калі выбраць адзін з трох магчымых спосабаў падарожжа з Мінска ў Гомель, то з Гомеля ў Кіеў маецца чатыры такія магчымасці, таму колькасць розных такіх спосабаў будзе $3\cdot4=12$.

Мноства называецца *упарадкаваным*, калі для кожных двух яго элементаў a і b вызначана дачыненне парадку $a\leqslant b$ або $b\leqslant a$ (a не перавышае b альбо b не перавышае a), якое мае ўласцівасці:

1) $a\leqslant a$, *г. зн. кожны элемент не перавышае самога сябе (рэфлексіўнасць);*

2) *калі* $a\leqslant b$ *і* $b\leqslant a$, *то элементы* a *і* b *супадаюць (антысіметрычнасць);*

3) *калі* $a\leqslant b$, $b\leqslant c$, *то* $a\leqslant c$ *(транзітыўнасць).*

Пустое мноства лічыцца ўпарадкаваным. Мноства можна ўпарадкаваць рознымі спосабамі.

Напрыклад, у мностве студэнтаў групы дачыненне парадку «студэнт a не перавышае студэнта b» ($a\leqslant b$) можна вызначыць наступнымі двума спосабамі: 1) калі студэнт a малодшы па ўзросце за студэнта b; 2) калі прозвішча студэнта a ў журнале групы стаіць пад меншым

нумарам, чым прозвішча студэнта b. Калі ў адным і тым жа мностве вызначаецца рознымі спосабамі дачыненне парадку, то атрымоўваюцца розныя ўпарадкаваныя мноствы.

Элементы канечных ўпарадкаваных мностваў звычайна запісваюць у круглых дужках, размяшчаючы элемент a злева ад элемента b, калі $a \leqslant b$.

Напрыклад, запіс $A=(3, 2, 1)$, $B=(2, 3, 1)$ азначае, што A і B — розныя ўпарадкаваныя мноствы, у адрозненне ад запісу $A=\{3, 2, 1\}$, $B=\{2, 3, 1\}$, з якога вынікае, што $A=B$.

Мноства з трох элементаў a, b і c мае тры двухэлементавыя падмноствы:

$$\{a, b\}, \ \{a, c\}, \ \{b, c\}$$

і шэсць двухэлементавых упарадкаваных падмностваў:

$$(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b).$$

Няхай зададзена мноства, якое змяшчае n элементаў. Кожнае яго ўпарадкаванае падмноства, складзенае з k элементаў, называецца *размяшчэннем з n элементаў па k элементаў.*

Для абазначэння колькасці ўсіх размяшчэнняў з n элементаў па k элементаў выкарыстоўваецца запіс A_n^k (чытаецца: «A з n па k» або «колькасць размяшчэнняў з n па k»; A — першая літара французскага слова arrangement, што значыць размяшчэнне, прывядзенне да парадку).

Першы элемент k-элементавага падмноства можна выбраць n спосабамі, другі — ужо толькі $n-1$ спосабамі. У адпаведнасці з правілам множання першыя два элементы падмноства можна выбраць $n(n-1)$ спосабамі. Для выбару трэцяга элемента падмноства застаецца $n-2$ магчымасці, а выбар першых трох элементаў падмноства можна зрабіць $n(n-1)(n-2)$ спосабамі. Апошні k-ы элемент падмноства можна выбраць $n-(k-1)$ спосабамі, бо да моманта выбару k-га элемента ў мностве застаюцца нявыбранымі $n-(k-1)$ элементаў. Канчаткова атрымаем

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)). \qquad (1.39)$$

Здабытак усіх натуральных лікаў ад 1 да n абазначаюць $n!$ (чытаецца: «эн фактарыял»), г. зн.

$$n! \overset{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdots (n-1)n.$$

Выкарыстоўваючы гэтае абазначэнне, формулу (1.39) можна перапісаць у выглядзе

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \tag{1.40}$$

прычым калі дамовіцца лічыць $0! \overset{\text{def}}{=} 1$, то формула (1.40) дае правільны вынік ў выпадках $k=0$ і $k=n$.

Размяшчэнні з n элементаў па n элементаў называюцца *перастаўленнямі з n элементаў*.

Перастаўленні з'яўляюцца прыватным выпадкам размяшчэнняў. Паколькі кожнае перастаўленне змяшчае ўсе n элементаў мноства, то розныя элементы адрозніваюцца адзін ад аднаго толькі парадкам элементаў. Колькасць перастаўленняў з n элементаў абазначаюць праз P_n (P — першая літара французскага слова permutation — перастаўленне).

Паколькі $P_n = A_n^n$, то з формулы (1.40) вынікае, што

$$P_n = n!. \tag{1.41}$$

З формулы (1.41) атрымоўваецца, што мноства, якое змяшчае n элементаў, можна ўпарадкаваць $n!$ спосабамі.

Прыклад 1.1. Колькі чатырохзнакавых лікаў, падзельных на пяць, можна ўтварыць з лічбаў 1, 2, 3, 4, 5, 6 пры ўмове, што ў ліку лічбы не паўтараюцца?

▷ Для таго каб лік, утвораны з дадзеных лічбаў, дзяліўся на пяць, неабходна і дастаткова, каб лічба 5 стаяла на апошнім месцы. Астатнія пяць лічбаў могуць стаяць на незанятых трох папярэдніх месцах. Так што шуканая колькасць чатырохзнакавых лікаў, падзельных на пяць, роўная

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60. \blacktriangleleft$$

Няхай зададзена мноства, складзенае з n элементаў. Кожнае яго падмноства, якое змяшчае k элементаў, называецца *спалучэннем з n элементаў па k элементаў*.

Колькасць усіх спалучэнняў з n элементаў па k элементаў абазначаецца C_n^k (чытаецца: «колькасць спалучэнняў з n па k» або «цэ з n па k»; C — першая літара французскага слова combinaison — спалучэнне).

Створым усе магчымыя неўпарадкаваныя падмноствы, якія змяшчаюць k элементаў. Іх колькасць ёсць C_n^k. Затым з кожнага атрыманага падмноства зробім усе ўпарадкаваныя падмноствы, якіх будзе ў $k!$ разоў болей, паколькі кожнае мноства, што складаецца з k элементаў,

можна ўпарадкаваць $k!$ спосабамі. Такім чынам, $A_n^k = C_n^k k!$, адкуль

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \qquad (1.42)$$

Для практычнага скарыстання больш зручная формула

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}.$$

Дакажам дзве важныя ўласцівасці лікаў C_n^k:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad (1.43)$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \qquad (1.44)$$

□ Сапраўды, з улікам формулы (1.42) маем:

1) $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k$;

2) $C_n^k + C_n^{k-1} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} + \dfrac{n!}{(n-(k-1))!\,(k-1)!} =$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k+1)!}\left(\frac{n-k+1}{1} + \frac{k}{1}\right) = \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!} = C_{n+1}^k. \ ■$$

Роўнасць (1.43) дае магчымасць спрашчаць вылічэнні C_n^k у тых выпадках, калі $k > n/2$.

Напрыклад, $C_{15}^{13} = C_{15}^2 = \dfrac{15 \cdot 14}{2} = 105.$

2°. Імавернасць падзеі. Калі звярнуцца да гульні ў падкіданне манеты, то зыходам яе могуць быць дзве падзеі: альбо манета ўпадзе гербам да нізу, альбо герб апыніцца зверху. Той або іншы зыход гульні залежыць ад многіх прычын, якія не паддаюцца ўліку і загадзя не могуць быць прадказанымі. Здарэнне, што герб апынуўся зверху, з'яўляецца прыкладамі выпадковай падзеі. Іншымі прыкладамі выпадковых падзей могуць паслужыць: неадпаведнасць эталону выбранай для кантролю дэталі, наяўнасць блакітнага колеру вачэй у першага стрэчнага. У кожным такім разе немагчыма загадзя прадказаць, адбудзецца ці не адпаведная падзея, таму такія падзеі і называюцца *выпадковымі*.

Пры гульні ў арлянку абодва зыходы раўнапраўныя, да яе заканчэння няма ніякіх падставаў аддаць перавагу таму або іншаму зыходу. У такіх выпадках кажуць, што абодва зыходы роўнаімаверныя, а імавернасць кожнага

з іх роўная 1/2. Пры кіданні кубіка з гранямі, занумараванымі пры дапамозе лічбаў ад адзінкі да шасці, маецца шэсць зыходаў падзеі — з'яўлення на верхняй грані той або іншай лічбы. Калі кубік зроблены з аднароднага матэрыялу, то ўсе зыходы аднолькава магчымыя і роўнаімаверныя. Імавернасць кожнай падзеі роўная 1/6.

Абагульненнем гэтых простых доследаў будзе той, у якім магчымыя n роўнаімаверных зыходаў $a_1, a_2, \ldots, a_n$, іх называюць таксама *элементарнымі падзеямі.* У такім разе імавернасць кожнай падзеі лічыцца роўнай $1/n$. Запісваюць гэта наступным чынам:

$$P(a_1)=1/n, \quad P(a_2)=1/n, \quad \ldots, \quad P(a_n)=1/n.$$

Напрыклад, першая з гэтых формул чытаецца так: «імавернасць падзеі a_1 роўная $1/n$» (P — першая літара англійскага слова probability — імавернасць).

Разгледзім зараз дослед з n роўнаімавернымі зыходамі і нейкую падзею A, якая адбываецца тады, калі дослед заканчваецца адвольнымі k зыходамі, і не адбываецца ў тым разе, калі мае месца адзін з $n-k$ астатніх зыходаў. Будзем гаварыць, што зыходы, якія прыводзяць да падзеі A, спрыяюць ёй.

Імавернасцю падзеі А, якая адпавядае доследу з n роўнаімавернымі зыходамі, называецца тасунак колькасці зыходаў, спрыяльных падзеі A, да колькасці ўсіх зыходаў, г. зн.

$$P(A)=k/n. \tag{1.45}$$

Імавернасць усякай падзеі A праўдзіць няроўнасці

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1,$$

што непасрэдна вынікае з формулы (1.45), паколькі $0 \leqslant k \leqslant n$.

Прыклад 1.2. Абанент не памятае дзве апошнія лічбы нумара тэлефона і, ведаючы толькі, што гэтыя лічбы розныя, набірае іх наўздагад. Якая імавернасць таго, што нумар будзе набраны правільна?

▷ Набраць дзве апошнія лічбы можна столькімі спосабамі, колькі будзе ўпарадкаваных двухэлементавых падмностваў у дзесяціэлементавым мностве (мноства ўсіх лічбаў). Такіх спосабаў будзе $A_{10}^2=10 \cdot 9=$ $=90$. Спрыяе падзеі A (лічбы набраныя правільна) толькі адзін зыход. Таму імавернасць падзеі A будзе роўная $P(A)=1/90$. ◀

3°. Знак сумы. У матэматычнай тэорыі і яе дастасаваннях даволі часта разглядаюцца сумы вялікай колькасці складнікаў, у сувязі з чым паўстае неабходнасць кампактнага запісу такіх сумаў.

Няхай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — зададзеныя лікі. Іх сума $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ абазначаецца $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, г. зн.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

і чытаецца: «сума па k ад 1 да n». Знак сумы Σ — гэта вялікая грэчаская літара «сігма», і літара k называецца *індэксам сумавання.*

Сума не залежыць ад таго, якою літарай пазначаны індэкс сумавання:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Зусім лёгка пераканацца ў тым, што дзеянні са знакам Σ падпарадкоўваюцца наступным правілам:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k,\quad c = \text{const}; \qquad (1.46)$$

$$2)\ \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k. \qquad (1.47)$$

Здараецца так, што пры падсумоўванні патрабуецца вылучыць асобныя складнікі. Гэта адзначаецца пэўнаю ўмовай ніжэй знака Σ.

Напрыклад, $\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_k$ азначае сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n$.

Часам узнікае неабходнасць зрушыць межы змянення індэкса сумавання ў той або іншы бок. Напрыклад,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=3}^{n+2} a_{k-2}.$$

Такое пераўтварэнне сумы называецца *заменай індэкса сумавання.* Так у другой суме мы зрушылі межы сумавання на адзінку ў меншы бок, пры гэтым пад знакам сумы замянілі k на $k+1$. У трэцяй суме замянілі k на $k-2$, пры гэтым межы сумавання павялічыліся на дзве адзінкі.

Разгледзім суму, якая змяшчае nm складнікаў a_{ij}, дзе індэксы i і j набываюць значэнні ад 1 да n і ад 1 да m адпаведна ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $n, m \in \mathbf{N}$).

Правядзем далей сумаванне гэтых складнікаў двума спосабамі.

1. Падсумуем спачатку складнікі, якія адпавядаюць значэнню $i=1$, і абазначым атрыманую суму $s_1=\sum_{j=1}^{m} a_{1j}$. Затым аналагічна знойдзем $s_2=\sum_{j=1}^{m} a_{2j}$, ..., $s_n=\sum_{j=1}^{m} a_{nj}$. Тым самым мы выбралі ўсе mn складнікаў a_{ij}. Калі зараз падсумуем велічыні s_i, $i=\overline{1,n}$, то атрымаем

$$\sum_{i=1}^{n} s_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right). \tag{1.48}$$

2. Цяпер абазначым праз $p_1, p_2, \ldots, p_m$ тыя сумы, якія адпавядаюць значэнням j, роўным 1, 2, ..., m:

$$p_1=\sum_{i=1}^{n} a_{i1},\quad p_2=\sum_{i=1}^{n} a_{i2},\quad \ldots,\quad p_m=\sum_{i=1}^{n} a_{im},$$

і затым падсумуем іх і атрымаем

$$\sum_{j=1}^{m} p_j=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right). \tag{1.49}$$

Надалей дамовімся двайныя сумы ў правых частках роўнасцяў (1.48) і (1.49) запісваць без дужак. Пры гэтым абедзве сумы маюць адно і тое ж значэнне, бо яны з'яўляюцца рознымі запісамі адной і той самай сумы mn складнікаў a_{ij}.

Такім чынам, мы даказалі сцверджанне: *знакі падвойнай сумы перастаўляльныя,* г. зн.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}. \tag{1.50}$$

Калі індэксы i, j набываюць адны і тыя ж значэнні 1, 2, ..., n, то падвойную суму $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ можна запісаць у выглядзе $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}$.

Па аналогіі з падвойнай сумаю разглядаюць трайную суму і іншыя многаразовыя сумы. На падставе паслядоўнага скарыстання роўнасці (1.50) можна даказаць, што многаразовая сума

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\dots\sum_{k=1}^{p}a_{ij\dots k}$$

не залежыць ад парадку сумавання.

Калі ўсе індэксы многаразовай сумы змяняюцца ад 1 да n, то яе запісваюць у выглядзе $\sum\limits_{i,j,\dots,k=1}^{n}a_{ij\dots k}$.

Бываюць выпадкі, калі індэксы сумавання падпарадкоўваюцца той або іншай умове. У такім разе гэтую ўмову запісваюць ніжэй за знак сумы. Напрыклад,

$$\sum_{i+j=0}^{n}a_{ij}=a_{00}+a_{01}+a_{10}+a_{02}+a_{11}+a_{20}+\dots+a_{n0}.$$

4°. Формула бінома Ньютана. Яшчэ са школьнага курса матэматыкі вядомыя формулы:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

якія звычайна называюць *формуламі скарочанага множання.* Мы дакажам аналагічную формулу агульнага выгляду, якую называюць *формулаю бінома Ньютана**.

Тэарэма 1.3. *Для ўсякіх рэчаісных лікаў a і b, няроўных нулю, і для кожнага натуральнага значэння n праўдзіцца роўнасць*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k, \qquad (1.51)$$

дзе каэфіцыенты C_n^k называюцца біномнымі каэфіцыентамі і вылічаюцца паводле формулы (1.42).

□ Для доказу тэарэмы выкарыстаем метад матэматычнай індукцыі.

Калі $n=1$, то формула справядлівая, бо

$$(a+b)^1=C_1^0a^1b^0+C_1^1a^0b^1=a+b.$$

Дапусцім праўдзівасць формулы для $n=m-1$, г. зн.

$$(a+b)^{m-1}=\sum_{k=0}^{m-1}c_{m-1}^k a^{m-k-1}b^k, \qquad (1.52)$$

і дакажам яе праўдзівасць для $n=m$. Сапраўды, з улікам формул (1.52) і (1.46), будзем мець:

---

* *Ньютан Айзек* (Newton Isaac, 1643—1727) — англійскі фізік, механік, астраном і матэматык.

$$(a+b)^m=(a+b)(a+b)^{m-1}=(a+b)\sum_{k=0}^{m-1}C_{m-1}^k a^{m-k-1}b^k=$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}C_{m-1}^k a^{m-k}b^k+\sum_{k=0}^{m-1}C_{m-1}^k a^{m-k-1}b^{k+1}.$$

У першай суме з правай часткі атрыманай роўнасці вылучым асобна першы складнік, а ў другой — апошні. Паменшым таксама індэкс сумавання ў другой суме на адзінку. Атрымаем:

$$\sum_{k=0}^{m-1}C_{m-1}^k a^{m-k}b^k=a^m b^0+\sum_{k=1}^{m-1}C_{m-1}^k a^{m-k}b^k,$$
$$\sum_{k=0}^{m-1}C_{m-1}^k a^{m-k-1}b^{k+1}=\sum_{k=0}^{m-2}C_{m-1}^k a^{m-k-1}b^{k+1}+a^0b^m=$$
$$=\sum_{k=1}^{m-1}C_{m-1}^{k-1}a^{m-k}b^k+a^0b^m.$$

Такім чынам,

$$(a+b)^m=a^mb^0+\sum_{k=1}^{m-1}(C_{m-1}^k+C_{m-1}^{k-1})a^{m-k}b^k+a^0b^m.$$

Карыстаючыся роўнасцю (1.44), а таксама тым, што $C_m^0=1$ і $C_m^m=1$, атрымаем:

$$(a+b)^m=C_m^0a^mb^0+\sum_{k=1}^{m-1}C_m^ka^{m-k}b^k+C_m^ma^0b^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^ka^{m-k}b^k.$$

Значыць, формула (1.51) ёсць правільная для ўсіх $m\in \mathbf{N}$. ■

На падставе формулы (1.44) біномныя каэфіцыенты для розных значэнняў n можна выпісаць у выглядзе табліцы, якую называюць *трохвугольнікам Паскаля**. У кожным радку гэтай табліцы першы і апошні лікі роўныя адзінцы, а ўсякі іншы атрымоўваецца складаннем двух найбліжэйшых да яго лікаў папярэдняга радка:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
....

---

* *Паскаль Блез* (Pascal Blaise, 1623—1662) — французскі філосаф, матэматык і фізік.

У n-м радку гэтай табліцы стаяць каэфіцыенты C_n^0, C_n^1, ..., C_n^k, ..., C_n^n бінома $(a+b)^n$.

Калі ў формуле (1.51) узяць $a=b=1$, то атрымаецца $\sum_{k=0}^{n} C_n^k=2^n$. Паколькі для мноства, якое змяшчае n элементаў, C_n^k ёсць колькасць яго падмностваў па k элементаў, то $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$ вызначае колькасць усіх падмностваў мноства з n элементаў, і яна роўная 2^n.

1.5. АЛГЕБРА МНАГАСКЛАДАЎ

Мнагаскладам ці паліномам n-й ступені $P_n(z)$ будзем называць суму $c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$, дзе каэфіцыенты c_i, $i=\overline{0, n}$, ёсць камплексныя лікі і зменная z набывае значэнні з мноства $\mathbf{C}$. У прыватнасці, як c_i, $i=\overline{0, n}$, так і z могуць быць рэчаіснымі. Каэфіцыент c_0 называецца *вольным складнікам.*

Такім чынам,

$$P_n(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k z^k, \quad c_n \neq 0. \tag{1.53}$$

Лік a называюць *коранем мнагаскладу* $P_n(z)$, калі $P_n(a)=0$. Падзяліць мнагасклад $P_n(z)$ на двухсклад $z-a$, дзе a ёсць зададзены лік, значыць падаць яго ў выглядзе

$$P_n(z)=(z-a)P_{n-1}(z)+r, \tag{1.54}$$

дзе $P_{n-1}(z)$ ёсць мнагасклад ступені $n-1$, і r — нейкі лік, які называюць *астачаю ад дзялення мнагаскладу* на $z-a$. Пры гэтым дапускаецца, што роўнасць (1.54) праўдзіцца для ўсіх значэнняў $z \in \mathbf{C}$ (або $z \in \mathbf{R}$). Калі $r=0$, то кажуць, што *мнагасклад дзеліцца (ёсць падзельны)* на $z-a$.

Каэфіцыенты мнагаскладу

$$P_{n-1}(z)=b_{n-1}z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\ldots+b_1 z+b_0$$

і астачу r можна вылічаць паводле рэкурэнтных формул

$$b_{n-1}=c_n,\ b_{n-2}=c_{n-1}+ab_{n-1},\ \ldots,\ b_0=c_1+ab_1,\ r=c_0+ab_0.$$

Пры вылічэннях выкарыстоўваюць табліцу

	c_n	c_{n-1}	...	c_1	c_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_0	r

Яе верхні радок зададзены, а ніжні паступова запаўняецца згодна з пададзенымі вышэй формуламі. Такі спосаб знаходжання няпоўнай дзелі і астачы пры дзяленні мнагаскладу на двухсклад называюць *схемаю Горнэра**.

Тэарэма 1.4 (**Бэзў****). *Лік a ёсць корань мнагаскладу $P_n(z)$, калі і толькі калі гэты мнагасклад дзеліцца на $z-a$, г. зн. праўдзіцца роўнасць*

$$P_n(z)=(z-a)P_{n-1}(z). \tag{1.55}$$

□ Неабходнасць. Няхай $z=a$ ёсць корань мнагаскладу $P_n(z)$, г. зн. $P_n(a)=0$. З другога боку, калі мнагасклад $P_n(z)$ падаць у выглядзе (1.54), то пры $z=a$ атрымаем $r=P_n(a)$. Такім чынам, $r=0$, што азначае падзельнасць мнагаскладу $P_n(z)$ на $z-a$.

Дастатковасць. Калі мнагасклад дзеліцца на $z-a$, то гэта азначае праўдзівасць роўнасці (1.55), адкуль вынікае, што $P_n(a)=0$. Такім чынам, $z=a$ ёсць корань мнагаскладу $P_n(z)$. ■

Калі існуюць лік $k\in\mathbf{N}$, $1\leqslant k\leqslant n$, і мнагасклад $P_{n-k}(z)$, такія, што для ўсіх $z\in\mathbf{C}$ (або $z\in\mathbf{R}$) праўдзіцца роўнасць

$$P_n(z)=(z-a)^k P_{n-k}(z), \text{ дзе } P_{n-k}(a)\neq 0, \tag{1.56}$$

то лік a называецца *коранем мнагаскладу* $P_n(z)$ *кратнасці* k.

Тэарэма 1.4 даказвалася пры дапушчэнні, што мнагасклад $P_n(z)$ мае корань. На пытанне пра існаванне кораня мнагаскладу адказвае наступная тэарэма, якую мы фармулюем без доказу. Доказ гэтай тэарэмы будзе зроблены ў трэцяй частцы нашага курса.

Тэарэма 1.5 (**асноўная тэарэма алгебры**). *Кожны мнагасклад з камплекснымі каэфіцыентамі мае хоць бы адзін корань.*

Карыстаючыся асноўнаю тэарэмаю алгебры, лёгка даказаць наступную тэарэму.

Тэарэма 1.6. *Усякі мнагасклад n-й ступені раскладаецца на n лінейных множнікаў тыпу $z-a$ і лікавы множнік, роўны каэфіцыенту пры z^n.*

□ Будзем разглядаць мнагасклад $P_n(z)$, запісаны ў выглядзе (1.53). На падставе асноўнай тэарэмы алгеб-

---

* *Горнэр Уільям Джордж* (Horner William George, 1786—1837) — англійскі матэматык.

** *Бэзу Эцьен* (Bezout Étienne, 1730—1783) — французскі матэматык.

ры гэты мнагасклад мае корань, які абазначым z_1. Згодна з тэарэмаю 1.4, можна запісаць:

$$P_n(z)=(z-z_1)P_{n-1}(z),$$

дзе $P_{n-1}(z)$ — мнагасклад ступені $n-1$.

З той жа прычыны мнагасклад $P_{n-1}(z)$ мае корань, які абазначым z_2. Тады $P_{n-1}(z)=(z-z_2)P_{n-2}(z)$, дзе $P_{n-2}(z)$ — мнагасклад $(n-2)$-й ступені.

Працягваючы гэты працэс вылучэння лінейных множнікаў, дойдзем да судачынення

$$P_n(z)=(z-z_n)P_0,$$

дзе P_0 — мнагасклад нулявой ступені, г. зн. некаторая канстанта. Відавочна, што лік P_0 роўны каэфіцыенту пры z^n: $P_0=c_n$.

На падставе атрыманых роўнасцяў можам запісаць

$$P_n(z)=c_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n), \tag{1.57}$$

дзе $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — карані гэтага мнагаскладу, сярод якіх могуць быць і роўныя. ■

Вынік. *Мнагасклад n-й ступені не можа мець больш за n каранёў.*

□ Сапраўды, ніякі лік $z=a$, што адрозніваецца ад $z_1, z_2, \ldots, z_n$, не можа быць коранем мнагаскладу $P_n(z)$, бо ні адзін з множнікаў у правай частцы роўнасці (1.57) не ператвараецца ў нуль пры $z=a$. ■

Такім чынам, мнагасклад n-й ступені мае дакладна n каранёў, калі кожны корань падлічваць у адпаведнасці з яго кратнасцю.

У такім разе мае месца наступная тэарэма.

Тэарэма 1.7. *Калі значэнні двух мнагаскладаў $S_n(z)$ і $Q_n(z)$ супадаюць пры $n+1$ розных значэннях $a_0, a_1, \ldots, a_n$ аргумента z, то гэтыя мнагасклады тоесныя.*

□ Абазначым праз $P(z)$ розніцу дадзеных мнагаскладаў

$$P(z)\overset{\text{def}}{=}S_n(z)-Q_n(z).$$

Згодна з умоваю, $P(z)$ ёсць мнагасклад ступені не вышэй за n, які ператвараецца ў нуль у пунктах $a_1, a_2, \ldots, a_n$, так што яго можна падаць у выглядзе

$$P(z)=c_n(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n).$$

Згодна з умоваю тэарэмы, $P(z)$ ператвараецца ў нуль таксама і ў пункце a_0. У такім разе $P(a_0)=0$, але ні адзін

з яго лінейных множнікаў няроўны нулю. Значыць, $c_n=0$, і таму з роўнасці (1.57) вынікае, што мнагасклад $P(z)$ тоесна роўны нулю. Такім чынам, $S_n(z)-Q_n(z)\equiv 0$, або $S_n(z)\equiv Q_n(z)$. ■

Тэарэма 1.8. *Калі мнагасклад $P_n(z)$ тоесна роўны нулю, то ўсе яго каэфіцыенты роўныя нулю.*

□ Запішам расклад гэтага мнагаскладу на множнікі паводле формулы (1.57): $P_n(z)=c_n(z-z_1)\cdots(z-z_n)$. Калі гэты мнагасклад тоесна роўны нулю, то ён роўны нулю і пры нейкім значэнні a зменнай z, якое не супадае з $z_1, z_2, \ldots, z_n$. У такім разе ні адзін з множнікаў $a-z_1$, $a-z_2, \ldots, a-z_n$ няроўны нулю, і таму $c_n=0$.

Затым паўтараюцца разважанні для мнагаскладу $P_{n-1}(z)$ ужо з найвышэйшым каэфіцыентам c_{n-1}, пра які аналагічна даказваецца, што $c_{n-1}=0$.

Такім жа чынам даказваецца $c_{n-2}=\ldots=c_1=$ $=c_0=0$. ■

Тэарэма 1.9. *Калі два мнагасклады тоесна роўныя адзін адному, то іх адпаведныя каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях аргумента роўныя.*

□ Гэта вынікае з таго, што розніца дадзеных мнагаскладаў ёсць мнагасклад, тоесна роўны нулю. Тады на падставе папярэдняй тэарэмы ўсе яго каэфіцыенты — нулі. ■

Надалей у гэтым параграфе будуць разглядацца мнагасклады, усе каэфіцыенты якіх ёсць рэчаісныя лікі.

Разгледзім спачатку мнагасклад другой ступені $P_2(z)=z^2+pz+q$ з рэчаіснымі каэфіцыентамі p і q. Дапусцім, што яго дыскрымінант $D=p^2-4q<0$. У такім разе

$$P_2(z)=(z+p/2)^2+q-p^2/4=(z+p/2)^2-i^2(-D/4)=$$
$$=(z+p/2-i\sqrt{D}/2)(z+p/2+i\sqrt{-D}/2),$$

адкуль вынікае, што каранямі мнагаскладу $P_2(z)$ з'яўляюцца камплексна-спалучаныя лікі

$$z_1=-p/2+i\sqrt{q-p^2/4}, \quad z_2=-p/2-i\sqrt{q-p^2/4}.$$

Аналагічнае сцверджанне мае месца і для мнагаскладу $P_n(z)$, $n>2$, з рэчаіснымі каэфіцыентамі, пра што ідзе гаворка ў наступнай тэарэме.

Тэарэма 1.10. *Калі камплексны лік $z_0=\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$, ёсць корань мнагаскладу $P_n(z)$ з рэчаіснымі каэфіцыентамі, то камплексна-спалучаны лік $\overline{z_0}=\alpha-i\beta$ таксама ёсць корань гэтага мнагаскладу.*

□ Згодна з умоваю тэарэмы, $P_n(z_0)=0$, г. зн. $c_n z_0^n + c_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + c_1 z_0 + c_0 = 0$. Паколькі $\overline{0} = 0$, то адсюль вынікае, што

$$\overline{P_n(z_0)} = \overline{c_n z_0^n + c_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + c_1 z_0 + c_0} = 0. \quad (1.58)$$

Зважаючы на тое, што c_i, $i = \overline{0, n}$, ёсць рэчаісныя лікі, атрымаем $\overline{c_i} = c_i$, $i = \overline{0, n}$. На падставе ўласцівасцяў камплексна-спалучаных лікаў роўнасць (1.58) можна перапісаць у выглядзе $c_n(\overline{z_0})^n + c_{n-1}(\overline{z_0})^{n-1} + \ldots + c_1 \overline{z_0} + c_0 = 0$, што азначае праўдзівасць роўнасці $P_n(\overline{z_0}) = 0$, адкуль вынікае, што $\overline{z_0}$ ёсць корань мнагаскладу $P_n(z)$. ■

Далей будзем займацца раскладаннем на множнікі мнагаскладу з рэчаіснымі каэфіцыентамі.

Няхай $z = a$ ёсць рэчаісны корань кратнасці k мнагаскладу $P_n(z)$ з рэчаіснымі каэфіцыентамі. Тады, згодна з формулаю (1.56), мнагасклад $P_n(z)$ можна падаць у выглядзе

$$P_n(z) = (z - a)^k P_{n-k}(z), \quad P_{n-k}(a) \neq 0. \quad (1.59)$$

Няхай зараз $z_0 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, ёсць камплексны корань мнагаскладу $P_n(z)$; тады, згодна з тэарэмаю 1.10, лік $\overline{z_0} = \alpha - i\beta$ таксама будзе коранем гэтага мнагаскладу. Таму ў правай частцы роўнасці (1.57) змяшчаюцца множнікі $z - z_0$ і $z - \overline{z_0}$, здабытак якіх роўны $(z - z_0) \times (z - \overline{z_0}) = (z - \alpha - i\beta)(z - \alpha + i\beta) = (z - \alpha)^2 + \beta^2 = z^2 + pz + q$, дзе $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$, $p^2 - 4q = -4\beta^2 < 0$. Такім чынам, мнагасклад $P_n(z)$ можна падаць у выглядзе

$$P_n(z) = (z^2 + pz + q) P_{n-2}(z).$$

Калі лік $z_0 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, ёсць корань кратнасці k мнагаскладу $P_n(z)$, то лік $\overline{z_0}$ таксама будзе яго коранем кратнасці k, і таму мнагасклад $P_n(z)$ можна падаць у выглядзе

$$P_n(z) = (z - z_0)^k (z - \overline{z_0})^k P_{n-2k}(z) = \\ = (z^2 + pz + q)^k P_{n-2k}(z), \quad (1.60)$$

дзе p, q — рэчаісныя лікі, $p^2 - 4q < 0$, а для мнагаскладу $P_{n-2k}(z)$ з рэчаіснымі каэфіцыентамі лікі z_0 і $\overline{z_0}$ не з'яўляюцца яго каранямі, г. зн.

$$P_{n-2k}(z_0)\neq 0,\quad P_{n-2k}(\overline{z_0})\neq 0. \tag{1.61}$$

Няхай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — усе рэчаісныя карані мнагаскладу $P_n(z)$, а іх кратнасці адпаведна роўныя $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Тады мнагасклад $P_n(z)$, згодна з формулай (1.59), можна падаць у выглядзе $P_n(z)=(z-a_1)^{k_1}(z-a_2)^{k_2}\cdots(z-a_r)^{k_r}Q(z)$. дзе $Q(z)$ — мнагасклад ступені $n-\sum\limits_{i=1}^{r}k_i$ з рэчаіснымі каэфіцыентамі, які не мае рэчаісных каранёў.

Калі $Q(z)$ — мнагасклад ненулявой ступені, то кожнай пары камплексна-спалучаных каранёў z_j і $\overline{z_j}$ кратнасці l_j адпавядае множнік $(z^2+p_jz+q_j)^{l_j}$ з формулы (1.60), дзе $p_j^2-4q_j<0$. З улікам гэтай акалічнасці атрымаем

$$P_n(z)=c_n(z-a_n)^{k_1}\cdots(z-a_r)^{k_r}(z^2+ +p_1z+q_1)^{l_1}\cdots(z^2+p_sz+q_s)^{l_s}, \tag{1.62}$$

дзе $\sum\limits_{i=1}^{r}k_i+2\sum\limits_{j=1}^{s}l_j=n;\ p_j^2-4q_j<0,\ j=\overline{1,\ s}.$

Такім чынам, ведаючы ўсе карані мнагаскладу з рэчаіснымі каэфіцыентамі $P_n(z)$, можна яго раскласці на множнікі з рэчаіснымі каэфіцыентамі, г. зн. падаць у выглядзе (1.62), дзе лікі $c_n, a_1, \ldots, a_r, p_n, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_s$ — рэчаісныя.

Заўвага 1.3. *Мнагаскладам ступені n ад дзвюх зменных u і v* называецца выраз

$$P_n(u,\ v)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i+j=0}^{n}a_{ij}u^iv^j=$$
$$=a_{00}+a_{10}u+a_{01}v+a_{20}u^2+a_{11}uv+a_{02}v^2+\ldots+a_{0n}v^n, \tag{1.63}$$

у якім $a_{00}, a_{10}, \ldots, a_{0n}$ ёсць пэўныя рэчаісныя лікі, такія, што сярод лікаў $a_{n0}, a_{(n-1)1}, a_{(n-2)2}, \ldots, a_{0n}$ ёсць хоць бы адзін лік, няроўны нулю.

2. МАТРЫЦЫ І СІСТЭМЫ ЛІНЕЙНЫХ АЛГЕБРАІЧНЫХ РАЎНАННЯЎ

У школьным курсе матэматыкі пры развязанні сістэм двух лінейных раўнанняў ужываюць метады складання і падстановы. Мэта гэтага раздзелу — даць метад развязання сістэм m лінейных алгебраічных раўнанняў агульнага выгляду з n невядомымі велічынямі (m, n — адвольныя натуральныя лікі). Гэта можна эфектыўна зрабіць, дзякуючы ўвядзенню паняццяў матрыцы і вызначніка. Надалей, пры вывучэнні курса вышэйшай матэматыкі, гэтыя паняцці вы сустрэнеце яшчэ шмат разоў, паколькі яны займаюць важнае месца ў матэматычнай навуцы.

Тэорыя, якая разглядаецца ў другім раздзеле, ёсць частка лінейнай алгебры.

2.1. МАТРЫЦЫ І АПЕРАЦЫІ З ІМІ

1°. Паняцце матрыцы. Няхай M — некаторае мноства лікаў.

Азначэнне 2.1. *Матрыцай памеру $m \times n$ («эм на эн») называецца табліца з mn лікаў мноства M, якая складаецца з m радкоў і n слупкоў:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (2.1)$$

Часта ў матэматычнай літаратуры замест квадратных дужак у абазначэнні матрыцы (2.1) ужываюць круглыя дужкі ці прамыя двайныя рыскі. Для больш кароткага запісу матрыцы скарыстоўваюць вялікія лацінскія літары, напрыклад A, B, C.

Калі $m=n$, то матрыца A называецца *квадратнай* парадку n (паказваючы парадак, яе можна абазначыць A_n), у агульным выпадку матрыца называецца *прамаву-*

гольнай памеру $m \times n$ (з паказаннем памеру яе абазначаюць $A_{m \times n}$).

Лікі a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, якія ўтвараюць матрыцу, называюцца яе *элементамі*. Зазначым, што ў запісе элемента a_{ij} першы індэкс заўсёды будзе тычыцца нумара радка, а другі — нумара слупка.

У дадзеным падручніку мы абмяжуемся тым, што элементамі матрыцы (2.1) з'яўляюцца рэчаісныя лікі, г. зн. $M = \mathbb{R}$.

Уся пададзеная ніжэй тэорыя лёгка абагульняецца на выпадак, калі a_{ij} разглядаюцца з мноства камплексных лікаў.

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ утвараюць i-ы радок, а элементы $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ — j-ы слупок. Каб падкрэсліць, з якіх элементаў складаецца матрыца A, будзем карыстацца запісам $A = [a_{ij}]$, дзе $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

Матрыцы A і B называюцца *роўнымі* ($A = B$), калі яны маюць аднолькавы памер і ўсе элементы, што стаяць на адпаведных месцах, роўныя.

Матрыца $[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$, якая складаецца з аднаго радка, называецца *матрыцай-радком*, а якая складаецца з аднаго слупка — *матрыцай-слупком*.

Калі ўсе элементы матрыцы ёсць нулі, матрыца называецца *нулявой*, яе будзем абазначаць літарай O. Па характары размеркавання нулёў сярод элементаў вылучаюць таксама *трапецыйную матрыцу*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2m} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{mm} & \ldots & a_{mn} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Азначым шэраг паняццяў, звязаных з квадратнай матрыцай. *Галоўнай дыяганаллю* называецца сукупнасць элементаў $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, якія ідуць з левага верхняга кута матрыцы да правага ніжняга. *Пабочная дыяганаль* — гэта элементы $a_{n1}, a_{n-1\,2}, \ldots, a_{1n}$, якія ідуць з левага ніжняга кута да правага верхняга. Матрыца D,

у якой усе элементы, акрамя галоўнай дыяганалі, ёсць нулі, называецца *дыяганальнай*:

$$D=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Калі ў дыяганальнай матрыцы выконваецца $d_{11}=$ $=d_{22}=\dots=d_{nn}=1$, то яна называецца *адзінкавай* і абазначаецца E (ці E_n). Квадратная матрыца называецца *трохвугольнай*, калі ўсе яе элементы, размешчаныя з аднаго боку ад галоўнай дыяганалі, ёсць нулі. Адрозніваюць верхнюю трохвугольную і ніжнюю трохвугольную матрыцы, прыкладамі якіх з'яўляюцца адпаведна матрыцы A і B:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрыца $A_n=[a_{ij}]$ называецца *сіметрычнай,* калі $a_{ij}=a_{ji}$, $i, j=\overline{1, n}$.

2°. Складанне і адыманне матрыц. Множанне матрыц на лік. У папярэднім пункце мы азначылі лікавыя табліцы — матрыцы. Разгледзім для іх аперацыі складання, адымання, множання на лік.

Сумай дзвюх матрыц аднолькавага памеру $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, дзе $i=\overline{1, m}$; $j=\overline{1, n}$, называецца матрыца $C=[c_{ij}]$ такога ж памеру, кожны элемент якой роўны суме адпаведных элементаў матрыц A і B:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \quad i=\overline{1, m}, \quad j=\overline{1, n}. \tag{2.2}$$

Для абазначэння сумы матрыц A і B ужываюць запіс $A+B$. Такім чынам,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Аперацыя складання матрыц валодае ўсімі ўласцівасцямі аперацыі складання лікаў, бо ў яе азначэнні (2.2) ляжыць аналагічная аперацыя для лікаў. Зыходзячы з гэтага, прыходзім да высновы, што *для складання адвольных матрыц A, B, C праўдзяцца наступныя ўласцівасці:*

1) $A+O=A$;
2) $A+B=B+A$ — *камутатыўнасць;*
3) $(A+B)+C=A+(B+C)$ — *асацыятыўнасць.*

Адзначаныя ўласцівасці дазваляюць нам не турбавацца аб парадкаванні складнікаў пры складанні дзвюх ці болей матрыц.

Здабыткам матрыцы $A=[a_{ij}]$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$, *і ліку* λ ($\lambda\in\mathbf{R}$) называецца матрыца $C=[c_{ij}]$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$, кожны элемент якой ёсць здабытак адпаведнага элемента матрыцы A і ліку λ:

$$c_{ij}=\lambda a_{ij}, \quad i=\overline{1, m}, \quad j=\overline{1, n}. \tag{2.3}$$

Для абазначэння гэтага здабытку скарыстоўваюць запіс $C=\lambda A$. Непасрэдна з азначэння (2.3) вынікае, што *для аперацыі множання матрыц A, B на лікі* λ, μ *справядлівыя наступныя ўласцівасці:*

1) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$ — *асацыятыўнасць у дачыненні да лікавага множніка;*
2) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ — *дыстрыбутыўнасць у дачыненні да сумы матрыц;*
3) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ — *дыстрыбутыўнасць у дачыненні да сумы лікаў.*

Розніцай дзвюх матрыц $A=[a_{ij}]$ і $B=[b_{ij}]$ аднолькавага памеру $m\times n$ назавем матрыцу $C=[c_{ij}]$ такога ж памеру, якая атрымліваецца паводле правіла

$$C=A+(-1)B. \tag{2.4}$$

Для абазначэння розніцы матрыц натуральна ўжываць запіс $A-B$. З роўнасцяў (2.4), (2.3) і (2.2) вынікае, што кожны элемент матрыцы $A-B$ ёсць розніца адпаведных

элементаў матрыц A і В: $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$.

3°. Множанне матрыц. Для азначэння здабытку матрыц нам спатрэбіцца паняцце ўзгодненых матрыц. Матрыцы A і B называюцца *ўзгодненымі*, калі колькасць слупкоў матрыцы A роўная колькасці радкоў матрыцы B. Лёгка заўважыць, што ўсякія квадратныя матрыцы аднолькавага парадку ўзгоднены адна з другой.

Здабыткам AB матрыц $A=[a_{ik}]$, $i=\overline{1, m}$, $k=\overline{1, n}$, і $B=[b_{kj}]$, $k=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, p}$, называецца матрыца $C=[c_{ij}]$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, p}$, кожны элемент c_{ij} якой ёсць сума папарных здабыткаў адпаведных элементаў i-га радка матрыцы A і j-га слупка матрыцы B:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i=\overline{1, m}, \quad j=\overline{1, p}. \tag{2.5}$$

Такім чынам, $C\overset{\text{def}}{=}AB$.

Акцэнтуем увагу на тым, што азначэнне здабытку матрыц пададзена для дзвюх узгодненых матрыц: матрыцы A памеру $m\times n$ і B памеру $n\times p$. У выніку атрымліваем матрыцу C памеру $m\times p$.

У якасці прыклада знаходжання здабытку пададзім наступны:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{bmatrix}.$$

Калі матрыца A узгоднена з матрыцай B, і матрыца B з матрыцай C, то ў якасці здабытку трох матрыц A, B, C мы азначаем матрыцу, якая атрымліваецца паслядоўным множаннем дадзеных матрыц: $ABC=(AB)C$. Аналагічна азначаецца здабытак k узгодненых матрыц ($k>3$).

Для множання матрыц характэрны наступныя ўласцівасці:

1) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$, $\lambda\in\mathbf{R}$;

2) $(AB)C=A(BC)$ — *асацыятыўнасць;*

3) $(A+B)C=AC+BC$, $A(B+C)=AB+AC$ — *дыстрыбутыўнасць у дачыненні да сумы матрыц.*

☐ Першая і трэцяя ўласцівасці непасрэдна вьні-

каюць з азначэння аперацыі множання матрыцы на лік, складання і множання матрыц. Дакажам асацыятыўнасць. Няхай $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{jk}]$, $C=[c_{kl}]$, дзе $i=\overline{1, m}$; $j=\overline{1, n}$; $k=\overline{1, p}$; $l=\overline{1, r}$. Тады для элемента d_{il} матрыцы $(AB)C$, на падставе (2.5), маем роўнасць

$$d_{il}=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}.$$

Улічваючы правілы дзеянняў са знакам Σ, можам запісаць

$$d_{il}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kl}.$$

ці, тое сама,

$$d_{il}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}\right). \tag{2.6}$$

Згодна з формулай (2.5), сума (2.6) вызначае элемент d'_{il} матрыцы $A(BC)$. Паколькі $d_{il}=d'_{il}$, $i=\overline{1, m}$, $l=\overline{1, r}$, роўнасць $(AB)C=A(BC)$ праўдзіцца. ■

Па аналогіі з уласцівасцямі аперацый з лікамі, трэба высветліць пытанне камутатыўнасці здабытку матрыц. Перш за ўсё заўважым, што існаванне здабытку AB не гарантуе, што можна знайсці здабытак BA. Абодва здабыткі AB і BA вызначаны толькі ў тым выпадку, калі колькасць слупкоў матрыцы A супадае з колькасцю радкоў матрыцы B, и колькасць слупкоў матрыцы B супадае з колькасцю радкоў матрыцы A. У выніку множання абедзве матрыцы AB і BA атрымліваюцца квадратнымі, аднак у агульным выпадку іх парадкі бываюць рознымі. Упэўніцца ў гэтым можна на прыкладзе матрыц

$$A_{2\times3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix},$$

для якіх AB ёсць квадратная матрыца другога парадку, а BA — трэцяга парадку.

Відавочна, што абодва здабыткі AB і BA вызначаны і маюць аднолькавыя парадкі толькі тады, калі A і B

з'яўляюцца квадратнымі матрыцамі аднаго і таго ж парадку. Аднак гэта яшчэ не гарантуе, што здабытку квадратных матрыц уласціва камутатыўнасць. Можна прывесці просты прыклад, калі гэта не выконваецца.

Сапраўды, для матрыц

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

у выніку множання маем

$$AB=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}.$$

Разам з тым, можна вылучыць важны выпадак, калі для здабытку выконваецца камутатыўнасць. Гэта адбываецца пры множанні ўсякай квадратнай матрыцы A_n і дыяганальнай D_n, у якой усе дыяганальныя элементы ёсць роўныя лікі ($d_{11}=d_{22}=\ldots=d_{nn}=d$). Пакажам гэта. Абазначым праз b_{ij} і b'_{ij} элементы, якія стаяць на перакрыжаванні i-га радка і j-га слупка матрыц AD і DA адпаведна. На падставе формулы (2.5) маем

$$b_{ij}=a_{ij}d=da_{ij}=b'_{ij} \qquad (2.7)$$

пры ўсіх i, j ($i=\overline{1,\, n}$, $j=\overline{1,\, n}$), адкуль атрымаем $AD=DA$.

Няцяжка пераканацца ў справядлівасці роўнасцяў

$$AE=EA=A, \qquad AO=OA=O. \qquad (2.8)$$

Формулы (2.8) паказваюць, што пры множанні матрыц адзінкавая матрыца E і нулявая O выконваюць тыя ж ролі, што лікі 1 і 0 пры множанні рэчаісных лікаў.

Заўважым яшчэ, што ў адрозненне ад лікаў здабытак дзвюх ненулявых матрыц можа даць нулявую матрыцу.

Раім чытачу самастойна пераканацца ў гэтым, знайшоўшы здабытак AB для матрыц

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 8 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix}.$$

4°. Транспанаванне матрыц. Няхай зададзена матрыца A памеру $m\times n$ у выглядзе (2.1). Кожны яе радок заменім яе слупком з тым жа нумарам. Атрымаем

матрыцу памеру $n \times m$, якая называецца *транспанаванай* да дадзенай; яе абазначаюць A^T:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Аперацыя знаходжання матрыцы A^T называецца *транспанаваннем матрыцы*. Для яе справядлівыя наступныя ўласцівасці:

1) $(A^T)^T = A$;

2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

3) $(A+B)^T = A^T + B^T$, *дзе матрыцы A, B маюць аднолькавы памер;*

4) $(AB)^T = B^T A^T$, *дзе матрыца A узгоднена з матрыцай B.*

□ У праўдзівасці роўнасцяў 1—3 можна лёгка пераканацца, зыходзячы з азначэння аперацый складання матрыц, множання на лік, транспанавання.

Дакажам чацвёртую ўласцівасць. Няхай зададзены $A = A_{m \times n}$ і $B = B_{n \times l}$. Відавочна, што мае сэнс здабытак $B^T A^T$, бо матрыца B^T памеру $l \times n$ узгоднена з матрыцай A^T памеру $n \times m$. Пакажам, што матрыцы $(AB)^T$ і $B^T A^T$ маюць аднолькавыя памеры і іх адпаведныя элементы роўныя. Здабытак AB ёсць матрыца памеру $m \times l$, значыць, $(AB)^T$ — матрыца памеру $l \times m$. Матрыца $B^T A^T$ таксама мае памер $l \times m$.

Няхай a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} ёсць адпаведна элементы матрыц A, B, AB, якія стаяць у i-м радку і ў j-м слупку; a'_{ij}, b'_{ij}, c'_{ij} — элементы матрыц A^T, B^T, $(AB)^T$. Згодна з азначэннем транспанавання, маем:

$$a'_{ij} = a_{ji}, \quad b'_{ij} = b_{ji}, \quad c'_{ij} = c_{ji}.$$

Грунтуючыся на азначэнні здабытку матрыц, для элемента c'_{ij} $(i = \overline{1, l},\ j = \overline{1, m})$ матрыцы $(AB)^T$ атрымліваем:

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a'_{kj} b'_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj}. \qquad (2.9)$$

Апошні выраз у роўнасці (2.9) уяўляе суму здабыткаў элементаў i-га радка матрыцы B^T і адпаведных элементаў j-га слупка матрыцы A^T. Мы паказалі, што на адпаведных месцах матрыц $(AB)^T$ і $B^T A^T$ знаходзяцца роўныя элементы. ■

Для здабытку трох матрыц маем:

$$(ABC)^T=((AB)C)^T=C^T(AB)^T=C^T(B^TA^T)=C^TB^TA^T.$$

Па аналогіі для n матрыцавых множнікаў праўдзівая роўнасць

$$(A_1A_2\cdots A_n)^T=A_n^TA_{n-1}^T\cdots A_2^TA_1^T,$$

у чым можна пераканацца з дапамогаю метаду матэматычнай індукцыі.

На дакончанне адзначым яшчэ той факт, што для сіметрычнай матрыцы A выконваецца $A^T=A$. Матрыцу B, для якой $B^T=-B$, назавем *косасіметрычнай.* Лёгка заўважыць, што ў косасіметрычнай матрыцы ўсе элементы галоўнай дыяганалі ёсць нулі.

У якасці прыкладаў такіх матрыц можна падаць наступныя:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -5\\ 2 & 1 & 0\\ -5 & 0 & -4\end{bmatrix}=A^T;\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix}=-B^T.$$

Заўвага 2.1. У дадзеным параграфе мы разглядалі паняцце лікавай матрыцы. Можна азначыць таксама матрыцу як табліцу, элементамі якой з'яўляюцца функцыі. Правілы дзеянняў з функцыйнымі матрыцамі застаюцца такімі ж, як і з лікавымі. У межах нашага падручніка будуць разглядацца, як правіла, лікавыя матрыцы, якія мы будзем называць проста матрыцамі.

2.2. ВЫЗНАЧНІКІ ДРУГОГА І ТРЭЦЯГА ПАРАДКАЎ

1°. Паняцце вызначнікаў другога і трэцяга парадкаў. Паводле пэўнага правіла кожнай квадратнай матрыцы A можна паставіць у адпаведнасць лік, які называецца *вызначнікам* і абазначаецца $|A|$. У гэтым параграфе разгледзім вызначнікі для матрыц парадкаў 1, 2, 3.

Калі парадак матрыцы A роўны адзінцы, то яна складаецца з адзінага элемента a_{11}. *Вызначнікам першага парадку,* які адпавядае матрыцы $A=[a_{11}]$, назавем лік a_{11}: $|A|\overset{\text{def}}{=}a_{11}$.

Для квадратнай матрыцы

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\tag{2.10}$$

вызначнікам другога парадку назавем лік, які роўны розніцы здабыткаў элементаў галоўнай дыяганалі і пабочнай:

$$|A| \overset{\text{def}}{=} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (2.11)$$

Відавочна, што паводле азначэння (2.11) матрыцы (2.10) адпавядае адзіны лік $|A|$.

Акрамя абазначэння вызначніка $|A|$, будзем ужываць таксама абазначэнне, якое аналагічнае абазначэнню матрыцы з заменай квадратных дужак на прамыя рыскі:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

У далейшым мы будзем называць *элементамі, радкамі* і *слупкамі* менавіта тыя элементы вызначніка $|A|$ адвольнага парадку, якія стаяць на тым жа месцы, што і адпаведныя элементы, радкі і слупкі матрыцы A.

Абапіраючыся на азначэнне (2.11), мы можам, у сваю чаргу, азначыць паняцце вызначніка для матрыцы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \qquad (2.12)$$

Вызначнікам трэцяга парадку назавем лік, які вызначаецца роўнасцю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + $$
$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (2.13)$$

Заўважым, што для вылічэння вызначніка трэцяга парадку скарыстоўваюць алгебраічную суму здабыткаў элементаў першага радка і вызначнікаў другога парадку з элементаў другога і трэцяга радкоў. Для элемента a_{11} адпаведны вызначнік другога парадку, які ўваходзіць у азначэнне (2.13), утвараюць тыя элементы другога і трэцяга радкоў, што не стаяць у першым слупку, для элемента a_{12} — тыя, што не стаяць у другім слупку (якому належыць a_{12}), для a_{13} — што не стаяць у трэцім слупку.

Такім чынам, грунтуючыся на роўнасці (2.13), кожнай

матрыцы A трэцяга парадку пастаўлены ў адпаведнасць адзіны лік $|A|$.

Роўнасць (2.11), якая азначае $|A|$ для матрыцы другога парадку, можна аналагічна трактаваць як алгебраічную суму здабыткаў элементаў першага радка і вызначнікаў першага парадку з элементаў другога радка.

Менавіта такое азначэнне вызначнікаў для матрыц A_n пры $n=2$, 3 забяспечвае адзіны падыход да вылічэння вызначнікаў і дазволіць у далейшым абагульніць яго на выпадак квадратных матрыц адвольнага парадку n, $n>3$.

Скарыстоўваючы роўнасць (2.11), азначэнне вызначніка трэцяга парадку (2.13) можна запісаць у іншым выглядзе:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (2.14)$$

Звернем увагу на тое, што кожны складнік алгебраічнай сумы (2.14) мае ў якасці множніка адзін і толькі адзін элемент з кожнага радка і кожнага слупка. Пры гэтым у суму ўваходзяць усе магчымыя камбінацыі такіх здабыткаў. Аналагічная сітуацыя назіраецца ў вызначніка другога парадку.

Адзначым, што замест слова «вызначнік» можна ўжываць слова *«дэтэрмінант»*, якое знаходзіцца ў адпаведнасці з лацінскім тэрмінам, замацаваным за паняццем вызначніка. Дапускаюцца таксама, разам з пададзенымі абазначэннямі вызначніка, і іншыя запісы, напрыклад $\det A$ ці Δ.

2°. Уласцівасці вызначнікаў. Сфармулюем шэраг уласцівасцяў, якія характэрныя для вызначнікаў другога і трэцяга парадкаў (вызначнік першага парадку разглядаць далей не будзем з прычыны яго элементарнасці, паколькі ён адразу азначаецца як велічыня адзінага ліку, які змяшчае матрыца A_1). Доказ ніжэй пададзеных сцверджанняў здзейснім для вызначнікаў трэцяга парадку (для другога парадку яны даказваюцца аналагічна і больш проста).

1. *У выніку транспанавання матрыцы A яе вызначнік не мяняецца:* $|A^T|=|A|$.

□ Для матрыцы A^T, атрыманай у выніку транспанавання матрыцы (2.12), маем, згодна з роўнасцю (2.13),

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) -$$

$$- a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).$$

У правай частцы апошняй роўнасці стаіць той жа лік, што і ў роўнасці (2.14), у чым можна пераканацца, калі апусціць дужкі і скарыстаць камутатыўнасць множання лікаў. ■

Заўвага 2.2. На падставе першай уласцівасці прыходзім да высновы, што радкі і слупкі вызначніка раўнапраўныя. З гэтай прычыны далейшыя ўласцівасці сфармулюем і дакажам толькі для радкоў вызначніка і будзем мець на ўвазе, што яны праўдзяцца і для слупкоў.

2. *У выніку перастановы двух радкоў знак вызначніка мяняецца на процілеглы.*

□ Разгледзім выпадак, калі першы і другі радкі вызначніка матрыцы (2.12) памяняліся месцамі:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) -$$

$$- a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) =$$

$$= -(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}) + a_{13}a_{22}a_{31} +$$

$$+ a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Няцяжка заўважыць, калі параўнаць апошнюю роўнасць з роўнасцю (2.14), што ў дадзеным выпадку ўласцівасць даказана. Пры перастанове іншых радкоў вызначніка сцверджанне даказваецца аналагічна. ■

3. *Калі ўсе элементы некаторага радка вызначніка роўныя нулю, то і сам вызначнік роўны нулю.*

□ Уласцівасць праўдзіцца з прычыны таго, што ў кожны складнік алгебраічнай сумы (2.14) уваходзяць у якасці множніка па адным элеменце з кожнага радка. ■

4. *Вызначнік з двума аднолькавымі радкамі роўны нулю.*

□ Няхай зададзены вызначнік ёсць Δ. Памяняем

месцамі два яго аднолькавыя радкі. З аднаго боку, атрымаем усё той жа вызначнік Δ. З другога боку, грунтуючыся на ўласцівасці 2, будзем мець вызначнік $-\Delta$. Атрыманая роўнасць $\Delta=-\Delta$ магчымая толькі ў выпадку $\Delta=0$. ■

5. *Супольны множнік усіх элементаў радка можна вылучыць за знак вызначніка.*

□ Сапраўды, карыстаючыся формулай (2.14), маем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(ka_{22})a_{33} + a_{12}(ka_{23})a_{31} +$$

$$+ a_{13}(ka_{21})a_{32} - a_{13}(ka_{22})a_{31} - a_{12}(ka_{21})a_{33} - a_{11}(ka_{23})a_{32} =$$

$$= k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Уласцівасць даказана для другога радка вызначніка, аналагічна даказваецца для першага і трэцяга радкоў. ■

6. *Вызначнік з двума прапарцыйнымі радкамі роўны нулю.*

□ Сапраўды, калі $a_{21}=ka_{31}$, $a_{22}=ka_{32}$, $a_{23}=ka_{33}$, $k\in\mathbf{R}$, $k\neq 0$, то на падставе ўласцівасці 5 каэфіцыент прапарцыйнасці k можна вынесці за знак вызначніка. Гэта прыводзіць да вызначніка, які роўны нулю, паколькі ён мае роўныя радкі (другі і трэці). Дадзеная ўласцівасць даказваецца аналагічна, калі прапарцыйныя іншыя радкі. ■

7. *Няхай кожны элемент i-га радка* ($i=1, 2, 3$) *вызначніка Δ ёсць сума двух лікаў. Тады Δ роўны суме двух вызначнікаў, такіх, што i-ы радок першага з іх утвараюць першыя складнікі, а другога — другія складнікі сумы; астатнія радкі вызначнікаў аднолькавыя.*

□ Не абмяжоўваючы агульнасці, доказ здзейснім на прыкладзе трэцяга радка. Скарыстаем формулу (2.14):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a'_{31} & a_{32}+a'_{32} & a_{33}+a'_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}(a_{33}+a'_{33}) +$$

$$+a_{12}a_{23}(a_{31}+a'_{31})+a_{13}a_{21}(a_{32}+a'_{32})-a_{11}a_{23}(a_{32}+a'_{32})-$$
$$-a_{12}a_{21}(a_{33}+a'_{33})-a_{13}a_{22}(a_{31}+a'_{31})=$$
$$=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})+(a_{11}a_{22}a'_{33}+a_{12}a_{23}a'_{31}+$$
$$+a_{13}a_{21}a'_{32}-a_{11}a_{23}a'_{32}-a_{12}a_{21}a'_{33}-a_{13}a_{22}a'_{31})=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Заўвага 2.3. Апошнюю ўласцівасць можна абагульніць на выпадак, калі кожны элемент i-га радка ($i=1, 2, 3$) вызначніка ёсць лінейная камбінацыя k складнікаў ($k\geqslant 2$) з аднымі і тымі ж лікавымі множнікамі $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

8. *Вызначнік не зменіцца, калі да элементаў некаторага радка дадаць адпаведныя элементы іншага радка, якія папярэдне памножаны на адзін і той жа лік.*

□ Няхай, напрыклад, да элементаў трэцяга радка вызначніка (2.13) дадаюцца элементы другога, памножаныя на лік λ. Тады на аснове ўласцівасцяў 7, 5, 4 маем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{21} & a_{32}+\lambda a_{22} & a_{33}+\lambda a_{23} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+$$

$$+\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \blacksquare$$

2.3. ВЫЗНАЧНІКІ n-га ПАРАДКУ

1°. Паняцце вызначніка n-га парадку. Няхай зададзена адвольная квадратная матрыца парадку n, $n\geqslant 2$:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}\in \mathbf{R}, \quad i, j=\overline{1, n}. \qquad (2.15)$$

У папярэднім параграфе для матрыц другога і трэцяга парадкаў азначаны адпаведна вызначнікі другога і трэцяга парадкаў. Пры гэтым азначэнне вызначніка трэцяга парадку грунтавалася на азначэнні вызначніка другога парадку. Абагульнім гэта паняцце на выпадак квадратнай матрыцы (2.15) адвольнага парадку n, $n \geqslant 2$, для чаго скарыстаем рэкурэнтны спосаб азначэння: будзем лічыць, што намі ўжо азначана паняцце вызначніка парадку $n-1$ і на яго аснове азначым вызначнік парадку n.

Вызначнік M_{ij} парадку $n-1$, які адпавядае матрыцы, што атрымліваецца з матрыцы (2.15) у выніку выкрэслівання яе i-га радка і j-га слупка, назавем *мінорам элемента* a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$. Паняцце мінора, якое (заўважым яшчэ раз!) лічым азначаным як вызначнік парадку $n-1$, мы істотна скарыстаем пры азначэнні вызначніка парадку n.

Азначэнне 2.2. *Вызначнікам ці дэтэрмінантам парадку n, які адпавядае матрыцы (2.15), называецца лік*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}. \qquad (2.16)$$

Па формуле (2.16) вызначнік парадку n азначаецца як лік, які роўны алгебраічнай суме здабыткаў элементаў першага радка і адпаведных ім мінораў. Формула (2.16) называецца *раскладам вызначніка па элементах першага радка,* а працэс выяўлення вызначніка ў выглядзе сумы (2.16) называецца *раскладаннем вызначніка па элементах першага радка.*

Вызначнік парадку n, які адпавядае матрыцы (2.15), абазначаецца таксама $|A|$, $\det A$, Δ.

Калі $n=2$, то роўнасць (2.16) раўназначная роўнасці (2.11). Сапраўды, элементам a_{11} і a_{12} матрыцы другога парадку (2.10) (якая з'яўляецца прыватным выпадкам матрыцы (2.15) пры $n=2$) адпавядаюць міноры $M_{11}=a_{22}$ і $M_{12}=a_{21}$. З улікам гэтага правая частка формулы (2.16) набывае выгляд правай часткі роўнасці (2.11).

Відавочна, што для $n=3$ формула (2.16) пераўтвараецца ў формулу (2.13). Аналагічна шукаюць вызначнік чацвёртага парадку: спачатку яго раскладаюць па эле-

ментах першага радка і атрымліваюць у якасці множнікаў вызначнікі трэцяга парадку, а затым ад кожнага з іх здзяйсняюць пераход да вызначнікаў другога парадку, якія вылічаюць па формуле (2.11). Гэтак жа для вызначніка Δ адвольнага парадку n: ён выражаецца спачатку праз вызначнікі M_{1j}, $j=\overline{1, n}$, парадку $n-1$, затым усе n вызначнікаў M_{1j} выражаюцца праз вызначнікі $(n-2)$-га парадку і так далей, пакуль сума Δ будзе змяшчаць вызначнікі другога парадку, якія лёгка вылічыць.

Карыстаючыся азначэннем 2.2, можна лёгка паказаць, што вызначнік, які адпавядае трохвугольнай матрыцы *(трохвугольны вызначнік)*, роўны здабытку элементаў, што стаяць на галоўнай дыяганалі. Разгледзім, напрыклад, вызначнік, у якога нулі стаяць над галоўнай дыяганаллю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Аналагічна да здабытку элементаў галоўнай дыяганалі прыйдзем, калі будзем вылічаць дыяганальны вызначнік. У прыватнасці, для адзінкавай матрыцы E атрымліваем $\det E = 1$.

Абазначым надалей $\Delta = \det A$, дзе матрыца A зададзена ў выглядзе (2.15).

Формулай (2.16) мы азначылі вызначнік парадку n, $n \geqslant 2$, як расклад па элементах першага радка. Натуральна ўзнікае пытанне, ці можна скарыстаць для вылічэння вызначніка расклад па элементах іншага радка ці слупка. Частковы адказ на гэтае пытанне дае

Лема 2.1. *Для кожнага вызначніка Δ парадку n, $n \geqslant 2$, справядлівы расклад па першым слупку:*

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}. \qquad (2.17)$$

□ Доказ ажыццявім на падставе метаду матэма-

тычнай індукцыі. Лёгка заўважыць, што роўнасць (2.17) праўдзіцца для вызначнікаў другога парадку. Будзем лічыць, што формула (2.17) мае месца для вызначнікаў парадку $n-1$, дакажам яе для вызначнікаў парадку n. Для гэтага скарыстаем формулу (2.16) і вылучым у ёй першы складнік сумы:

$$\Delta=a_{11}M_{11}+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}M_{1j}. \tag{2.18}$$

Вызначнік M_{1j}, які ўваходзіць у суму (2.18), мае парадак $n-1$, значыць, для яго расклад па першым слупку справядлівы паводле індуктыўнага пагаднення.

Пры гэтым першы слупок мінора M_{1j}, $j=\overline{2, n}$, змяшчае ўсе элементы першага слупка вызначніка Δ, акрамя элемента a_{11}. Улічым таксама тое, што пад нумарам $i-1$ вызначнік M_{1j} мае i-ы радок вызначніка Δ.

На падставе сказанага маем для адвольнага $j\geqslant 2$

$$M_{1j}=\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}a_{i1}(M_{1j})_{i1}, \tag{2.19}$$

дзе мінор $(M_{1j})_{i1}$ ёсць вызначнік парадку $n-2$, які атрымліваецца з M_{1j} у выніку выкрэслівання $(i-1)$-га радка і 1-га слупка. З першапачатковага вызначніка Δ мінор $(M_{1j})_{i1}$ атрымліваецца ў выніку выкрэслівання 1-га, i-га радкоў, а таксама 1-га, j-га слупкоў:

$$(M_{1j})_{i1}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1\,j-1} & a_{1j} & a_{1\,j+1} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2\,j-1} & a_{2j} & a_{2\,j+1} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \dots a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j} & a_{i-1\,j+1} & \dots a_{i-1\,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots a_{i\,j-1} & a_{ij} & a_{i\,j+1} & \dots a_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \dots a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j} & a_{i+1\,j+1} & \dots a_{i+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{n\,j-1} & a_{nj} & a_{n\,j+1} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.20}$$

З улікам формулы (2.19) запіс (2.18) набывае выгляд

$$\Delta=a_{11}M_{11}+\sum_{j=2}^{n}\left[(-1)^{j+1}a_{1j}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}a_{i1}(M_{1j})_{i1}\right].$$

На падставе ўласцівасцяў сумы зменім парадак падсумоўвання, улічыўшы пры гэтым, што множнік, які не залежыць ад індэкса сумавання, можна заносіць пад знак сумы і выносіць з-пад яго:

$$\Delta = a_{11}M_{11} + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{1j}a_{i1}(M_{1j})_{i1} =$$
$$= a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j}a_{1j}(M_{1j})_{i1}. \qquad (2.21)$$

Разгледзім цяпер мінoры M_{i1}, дзе $i \geqslant 2$. Раскладзем іх па першым радку, грунтуючыся на формуле (2.16). Пры гэтым захаваем тую нумарацыю, якую мелі радкі і слупкі ў зыходным вызначніку Δ. Атрымаем

$$M_{i1} = \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j}a_{1j}(M_{i1})_{1j}. \qquad (2.22)$$

Параўноўваючы мінор $(M_{i1})_{1j}$ з мінорам $(M_{1j})_{i1}$, пададзеным у роўнасці (2.20), прыходзім да высновы, што

$$(M_{i1})_{1j} = (M_{1j})_{i1}. \qquad (2.23)$$

Улічваючы формулы (2.21) — (2.23), атрымліваем:

$$\Delta = a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}. \blacksquare$$

2°. Уласцівасці вызначнікаў. У папярэднім параграфе разгледжаны ўласцівасці вызначнікаў другога і трэцяга парадкаў. Абагульнім іх на выпадак вызначніка адвольнага парадку n, $n \geqslant 2$.

1. ***Уласцівасць раўнапраўных радкоў і слупкоў.*** *У выніку транспанавання матрыцы яе вызначнік не мяняецца.*

□ Дакажам гэтае сцверджанне па індукцыі. Відавочна, што для матрыц другога парадку яно праўдзіцца. Дапусцім, што ўласцівасць раўнапраўнасці радкоў і слупкоў мае месца для матрыц парадку $n-1$, і пакажам, што гэта справядліва і для матрыц парадку n.

Няхай A_{1j}, $j=\overline{1, n}$, — матрыца, якая атрымліваецца з зыходнай матрыцы $A=[a_{ij}]$, $i, j=\overline{1, n}$, пасля выкрэслівання першага радка і j-га слупка, B_{j1} — матрыца, якая атрымліваецца з $A^T=[b_{ji}]$, $j, i=\overline{1, n}$, пасля выкрэслівання j-га радка і першага слупка. Матрыцы A_{1j} і B_{j1} маюць парадак $n-1$ і, як няцяжка заўважыць, $(A_{1j})^T = B_{j1}$. Паколькі паводле індуктыўнага пагаднення $\det A_{1j} = \det (A_{1j})^T$ маем $\det A_{1j} = \det B_{j1}$. Апошняя роўнасць азначае, што кожны мінор элемента a_{1j}, $j=\overline{1, n}$,

матрыцы A роўны адпаведнаму мінору элемента b_{j1}, $j=\overline{1, n}$, матрыцы A^T. Акрамя гэтага, з азначэння аперацыі транспанавання матрыц маем $a_{1j}=b_{j1}$, $j=\overline{1, n}$. Усё сказанае прыводзіць да высновы, што расклад $\det A$ па першым радку супадае з раскладам $\det A^T$ па першым слупку. ■

На аснове першай уласцівасці ўсе далейшыя сцверджанні сфармулюем толькі для радкоў і будзем мець на ўвазе, што яны праўдзяцца і для слупкоў.

2. ***Уласцівасць антысіметрыі пры перастанове двух радкоў.*** *Пры перастанове месцамі двух радкоў вызначнік захоўвае сваю абсалютную велічыню, але мяняе знак на процілеглы.*

□ Дакажам уласцівасць метадам матэматычнай індукцыі спачатку для двух суседніх радкоў. Для вызначнікаў другога парадку ўласцівасць лёгка правяраецца непасрэдна. Лічым, што яна мае месца для вызначнікаў парадку $n-1$, і дакажам яе для вызначнікаў парадку n.

Няхай k, $k+1$ — нумары радкоў вызначніка Δ парадку n, якія перастаўляюць. Скарыстаем формулу (2.17) і запішам расклад вызначніка Δ па першым слупку, пры гэтым вылучым за знак сумы тыя два складнікі, якія адпавядаюць радкам з нумарамі k і $k+1$:

$$\Delta=(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}+(-1)^{k+2}a_{k+1\,1}M_{k+1\,1}+ \\ +\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k,\,k+1}}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}.$$

Няхай Δ' — той вызначнік, які атрыманы з Δ у выніку перастановы k-га і $(k+1)$-га радкоў. На падставе формулы (2.17) для яго маем

$$\Delta'=(-1)^{k+1}a_{k+1\,1}N_{k1}+(-1)^{k+2}a_{k1}N_{k+1\,1}+ \\ +\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k,\,k+1}}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}N_{i1}, \tag{2.24}$$

дзе N_{i1} — мінор элемента a_{i1}, $i=\overline{1, n}$, вызначніка Δ.

Міноры M_{i1}, N_{i1} маюць парадак $n-1$. Калі $i\neq k$, $i\neq k+1$, то яны змяшчаюць k-ы і $(k+1)$-ы радкі, якія перастаўляюцца. Значыць, паводле індуктыўнай згоды $M_{i1}=-N_{i1}$, $i\neq k,\ k+1$.

Заўважым, што k-ы радок вызначніка Δ утвараюць тыя ж элементы, што і $(k+1)$-ы радок вызначніка Δ', а $(k+1)$-ы радок вызначніка Δ — тыя ж, што і k-ы радок

вызначніка Δ'. З гэтай прычыны $M_{kl}=N_{k+1\,l}$, $M_{k+1\,l}=N_{kl}$. Улічваючы пададзеныя стасункі для мінораў, роўнасць (2.24) можна запісаць у выглядзе

$$\Delta'=-(-1)^{k+2}a_{k+1\,l}M_{k+1\,l}-(-1)^{k+1}a_{kl}M_{kl}-$$
$$-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k,\,k+1}}^{n}(-1)^{i+1}a_{il}M_{il}.$$

Гэта і азначае, што вызначнікі Δ і Δ' адрозніваюцца толькі знакамі.

Няхай цяпер у вызначніку Δ перастаўляюцца несуседнія радкі з нумарамі k і m ($k<m$). Тады колькасць радкоў, якія знаходзяцца паміж k-м і m-м радкамі, ёсць $m-k-1$. Перастанову k-га і m-га радкоў здзейснім, перастаўляючы паслядоўна толькі суседнія радкі. Спачатку мы перастаўляем m-ы радок па чарзе з $m-k$ радкамі, што стаяць над ім, пакуль m-ы радок займе месца k-га радка. Затым k-ы радок апускаем на месца m-га радка, для чаго мяняем яго з $m-k-1$ радкамі. Агульная колькасць перастановў суседніх радкоў ёсць $2(m-k)-1$. Кожная такая перастанова мяняе знак вызначніка на процілеглы. Паколькі іх здзяйсняецца няцотная колькасць, вызначнік у выніку зменіць свой знак. ■

Дзеля далейшага разгляду ўласцівасцяў вызначніка n-га парадку нам спатрэбяцца наступныя дзве тэарэмы.

Тэарэма 2.1. *Для кожнага вызначніка Δ парадку n, $n\geqslant 2$, справядлівы расклад па адвольным яго радку:*

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij},\quad i=\overline{1,\,n}. \qquad (2.25)$$

□ Калі $i=1$, то формула (2.25) набывае выгляд формулы (2.16), якая ляжыць у аснове азначэння вызначніка. Разгледзім адвольны i-ы радок ($i\geqslant 2$) вызначніка Δ. Пераставім яго на месца першага радка так, каб не змяніць чаргаванне ўсіх астатніх радкоў. Колькасць радкоў, што стаяць вышэй i-га радка, ёсць $i-1$. Пераставім i-ы радок паслядоўна з кожным з іх. У выніку атрымаем вызначнік Δ', прычым на падставе ўласцівасці антысіметрыі маем $\Delta=(-1)^{i-1}\Delta'$. Раскладзем вызначнік Δ' па першым радку (фактычна, па элементах i-га радка вызначніка Δ). Атрымаем

$$\Delta=(-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{ij}N_{1j},$$

дзе N_{1j} — мінор, утвораны з Δ' пасля выкрэслівання 1-га радка і j-га слупка. Інакш кажучы, N_{1j} атрымліваецца ў выніку выкрэслівання з вызначніка Δ i-га радка і j-га слупка. З гэтай прычыны $N_{1j}=M_{1j}$, што і прыводзіць да формулы (2.25). ■

Аналагічна даказваецца

Тэарэма 2.2. *Для кожнага вызначніка Δ парадку n, $n\geqslant 2$, справядлівы расклад па адвольным яго слупку:*

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij},\quad j=\overline{1,\ n}. \tag{2.26}$$

Заўважым, што формула (2.17) з'яўляецца прыватным выпадкам формулы (2.26) пры $j=1$.

Засяродзім увагу на тым, што ў формуле (2.25) фіксаваным з'яўляецца нумар i радка, а ў формуле (2.26) — нумар j слупка. Гэтыя дзве роўнасці называюцца *формуламі Ляпляса**, яны маюць шырокія дастасаванні пры вылічэнні вызначнікаў. Асабліва карысна скарыстоўваць расклад па тых радках (ці слупках) вызначніка, многія элементы якіх роўныя нулю. У прыватнасці, калі якісьці радок мае толькі адзін ненулявы элемент, то формула раскладу вызначніка менавіта па гэтым радку будзе мець толькі адзін складнік. У такім разе вылічэнне вызначніка n-га парадку адразу зводзіцца да вылічэння вызначніка $(n-1)$-га парадку (гэта значыць, мінора, які прысутнічае ў адзіным ненулявым складніку). Гэтым спосабам мы ўжо карысталіся вышэй пры вылічэнні трохвугольнага вызначніка з нулямі над галоўнай дыяганаллю, калі раскладвалі яго па першым слупку. Пры вылічэнні трохвугольнага вызначніка з нулямі пад галоўнай дыяганаллю мэтазгодна раскладваць яго па першым радку.

Працягнем вывучэнне ўласцівасцяў вызначнікаў.

Будзем лічыць, што некаторы радок $a_1, a_2, \ldots, a_n$ вызначніка Δ ёсць лінейная камбінацыя k яго радкоў $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $c_1, c_2, \ldots, c_n$; …; $d_1, d_2, \ldots, d_n$, калі для кожнага j, $j=\overline{1,\ n}$, выконваецца роўнасць

$$a_j=\alpha_1 b_j+\alpha_2 c_j+\ldots+\alpha_k d_j, \tag{2.27}$$

дзе $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\in\mathbf{R}$; $k=\overline{1,\ n-1}$.

---

* *Ляпляс П'ер Сымон* (Laplace Pierre Simon, 1749—1827) — французскі астраном, матэматык, фізік.

3. ***Лінейная ўласцівасць вызначніка.*** *Няхай для элементаў i-га радка ($i=\overline{1, n}$) вызначніка Δ выконваецца роўнасць (2.27). Тады*

$$\Delta=\alpha_1\Delta_1+\alpha_2\Delta_2+\ldots+\alpha_k\Delta_k, \qquad (2.28)$$

дзе Δ_1 — вызначнік, у якога i-ы радок ёсць $b_1, b_2, \ldots, b_n$; Δ_2 мае i-м радком лікі $c_1, c_2, \ldots, c_n$; ...; Δ_k — лікі $d_1, d_2, \ldots, d_n$; усе астатнія радкі вызначнікаў $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ такія ж, як у Δ.

□ Скарыстаем формулу (2.25) і раскладзем кожны вызначнік $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ па i-м радку. Заўважым, што ва ўсіх гэтых вызначніках міноры M_{ij} элементаў i-га радка аднолькавыя. Паколькі для элементаў i-га радка вызначніка Δ мае месца роўнасць (2.27), то

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(\alpha_1 b_j+\alpha_2 c_j+\ldots+\alpha_k d_j)M_{ij}=$$
$$=\alpha_1\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_jM_{ij}+\alpha_2\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}c_jM_{ij}+\ldots+$$
$$+\alpha_k\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}d_jM_{ij},$$

адкуль і вынікае формула (2.28). ■

Даказаныя тры ўласцівасці вызначніка з'яўляюцца асноўнымі ўласцівасцямі, якія характарызуюць яго сутнасць. Пададзім наступныя пяць уласцівасцяў, што вынікаюць з іх.

Вынік 1. *Вызначнік з двума аднолькавымі радкамі роўны нулю.*

□ На самай справе, пры перастанове двух аднолькавых радкоў вызначнік Δ, з аднаго боку, не мяняецца, а з другога (на аснове ўласцівасці 2) ён роўны $-\Delta$. Гэта магчыма толькі пры $\Delta=0$. ■

Вынік 2. *Супольны множнік усіх элементаў некаторага радка можна вылучыць за знак вызначніка.*

□ Сцверджанне атрымліваем з лінейнасці вызначніка (уласцівасць 3) пры ўмове, што $\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_k=0$. ■

Вынік 3. *Калі ўсе элементы некаторага радка роўныя нулю, то і сам вызначнік роўны нулю.*

□ Гэтая ўласцівасць вынікае з папярэдняга сцверджання, калі лічыць, што ўсе элементы гэтага радка памножаны на нуль, які можна вылучыць за знак вызначніка. ■

Вынік 4. *Калі ўсе элементы двух радкоў вызначніка адпаведна прапарцыйныя, то вызначнік роўны нулю.*

□ Сапраўды, на падставе выніку 2 каэфіцыент прапарцыйнасці можна вылучыць за знак вызначніка, пасля чаго вызначнік будзе мець два аднолькавыя радкі, а значыць, згодна з вынікам 1, ён роўны нулю. ■

Вынік 5. *Калі да элементаў некаторага радка вызначніка дадаць адпаведныя элементы іншага радка, памножаныя на адвольны лік, то велічыня вызначніка не зменіцца.*

□ Атрыманы ў выніку складання элементаў вызначнік можна падаць у выглядзе сумы двух вызначнікаў (на аснове лінейнай уласцівасці), першы з якіх супадае з зыходным, а другі роўны нулю, бо мае два прапарцыйныя радкі. ■

Заўвага 2.4. Няцяжка давесці, што сцверджанне абагульняецца наступным чынам: калі да некаторага радка вызначніка дадаць лінейную камбінацыю некалькіх іншых радкоў гэтага вызначніка, то велічыня вызначніка не зменіцца.

Вышэй мы адзначылі асаблівую эфектыўнасць скарыстання формул Ляпляса, калі вызначнік змяшчае нулі. У прыватнасці, лёгка вылічаюцца дыяганальныя і трохвугольныя вызначнікі. У агульным выпадку, калі нулявых элементаў няма (ці іх мала), можна спачатку прывесці вызначнік да трохвугольнага выгляду, а затым вылічыць. Для гэтага карыстаюцца ўласцівасцямі вызначніка і, перш за ўсё, пятым вынікам з уласцівасці 3.

Прыклад 2.1. Вылічыць

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -8 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

▷ Пераўтворым вызначнік да трохвугольнага выгляду з нулямі пад галоўнай дыяганаллю, для чаго спачатку пераставім першы і другі радкі і скарыстаем уласцівасць антысіметрыі. Затым памножым першы радок на —3 і дададзім да другога, што дасць нам лік нуль у першым слупку другога радка. Аналагічна памножым першы радок на —2 і дададзім да трэцяга, а затым памножым на 6 і дададзім да чацвёртага. Атрымаем:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}1&-1&-2&5\\3&2&0&4\\2&4&-8&3\\-6&0&1&7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&-2&5\\0&5&6&-11\\0&6&-4&-7\\0&-6&-11&37\end{vmatrix}.$$

Далей да другога і трэцяга радкоў дададзім апошні радок. Каб дамагчыся нуля ў другім слупку чацвёртага радка, памножым другі радок на -6 і дададзім да чацвёртага:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}1&-1&-2&5\\0&-1&-5&26\\0&0&-15&30\\0&-6&-11&37\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&-2&5\\0&-1&-5&26\\0&0&-15&30\\0&0&19&-119\end{vmatrix}.$$

Застаецца з трэцяга радка вылучыць супольны множнік за знак вызначніка, затым памножыць гэты радок на 19 і дадаць да чацвёртага:

$$\Delta=-15\begin{vmatrix}1&-1&-2&5\\0&-1&-5&26\\0&0&-1&2\\0&0&19&-119\end{vmatrix}=-15\begin{vmatrix}1&-1&-2&5\\0&-1&-5&26\\0&0&-1&2\\0&0&0&-81\end{vmatrix}=$$

$$=(-15)(-81)=1215. \blacktriangleleft$$

З а ў в а г а 2.5. Можна паказаць, што ў выніку дастасавання азначэння 2.2, пасля паэтапнай замены мінораў здабыткамі элементаў, для вылічэння вызначніка атрымліваем алгебраічную суму ўсіх магчымых здабыткаў элементаў, якія ўзятыя па адным і толькі па адным з кожнага радка і кожнага слупка. Названая якасць вызначніка добра праілюстравана на прыкладзе дэтэрмінантаў (2.11) і (2.14). Менавіта гэтую ўласцівасць часта кладуць у аснову азначэння вызначніка адвольнага парадку, а затым, зыходзячы з яе, даказваюць, што вызначнік можна раскласці па адвольным яго радку ці слупку*.

3°. Алгебраічны дадатак. Акрамя пададзеных у папярэднім пункце ўласцівасцяў вызначніка, дакажам для яго яшчэ дзве, для чаго нам спатрэбіцца паняцце алгебраічнага дадатку.

Алгебраічным дадаткам элемента a_{ij} вызначніка n-га парадку назавем лік, які роўны $(-1)^{i+j}M_{ij}$, абазначым яго A_{ij}. Згодна з азначэннем, алгебраічны дадатак элемента a_{ij} можа адрозніваецца ад яго мінора толькі знакам. Скарыстаўшы паняцце алгебраічнага дадатку, формулы

---

* З такім падыходам можна азнаёміцца, напрыклад, у кнізе: *М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко.* Алгебра и аналитическая геометрия (Мн.: Выш. шк., 1984. Ч. 2.).

Ляпляса (2.25) і (2.26) можна запісаць у наступным выглядзе

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \qquad (2.29)$$

дзе i — адвольны фіксаваны нумар радка; $i=\overline{1,\ n}$;

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \qquad (2.30)$$

дзе j — адвольны фіксаваны нумар слупка; $j=\overline{1,\ n}$.

Дакажам яшчэ дзве ўласцівасці вызначнікаў.

4. ***Уласцівасць замены.*** *Сума здабыткаў адвольных n лікаў $d_1, d_2, \ldots, d_n$ і алгебраічных дадаткаў элементаў i-га радка, $i=\overline{1,\ n}$, матрыцы ёсць вызначнік матрыцы, якая атрымана з дадзенай заменай элементаў i-га радка на лікі $d_1, d_2, \ldots, d_n$.*

□ Няхай зададзена матрыца (2.15). Возьмем адвольныя n лікаў $d_1, d_2, \ldots, d_n$ і алгебраічныя дадаткі элементаў i-га радка $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$. Дакажам, што

$$d_1A_{i1}+d_2A_{i2}+\ldots+d_nA_{in}=|A'|, \qquad (2.31)$$

дзе

$$|A'|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \ldots & a_{i-1\,n} \\ d_1 & d_2 & \ldots & d_n \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \ldots & a_{i+1\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Раскладзем вызначнік $|A'|$ па элементах i-га радка і атрымаем роўнасць (2.31). ■

5. ***Уласцівасць ануліравання.*** *Сума здабыткаў элементаў аднаго з радкоў і адпаведных алгебраічных дадаткаў элементаў іншага радка роўная нулю:*

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=0, \qquad (2.32)$$

дзе $i\neq k$; $i=\overline{1,\ n}$; $k=\overline{1,\ n}$.

□ Левая частка роўнасці (2.32) ёсць сума здабыткаў алгебраічных дадаткаў k-га радка матрыцы (2.15) і лікаў $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. Згодна з уласцівасцямі замены, гэта сума роўная вызначніку матрыцы, атрыманай з матрыцы

(2.15) заменай элементаў k-га радка на лікі $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. Але тады гэты вызначнік мае два аднолькавыя радкі (роўныя i-му радку), значыць, ён роўны нулю. ■

Засяродзім увагу яшчэ раз на тым, што ўласцівасці 2—5 (разам з вынікамі) застаюцца справядлівымі і для слупкоў вызначніка, што гарантуецца ўласцівасцю 1.

4°. Вызначнікі сумы і здабытку матрыц. Паколькі вызначнік — гэта лік, які адпавядае квадратнай матрыцы, узнікае натуральнае жаданне высветліць, які лік адпавядае суме і здабытку дзвюх матрыц. Адказ даюць наступныя дзве тэарэмы.

Тэарэма 2.3. *Вызначнік сумы дзвюх матрыц $A=[a_{ij}]$ і $B=[b_{ij}]$ аднаго і таго ж парадку n, $n\geqslant 2$, роўны суме ўсіх магчымых вызначнікаў парадку n, у якіх частка радкоў (ці слупкоў) супадае з адпаведнымі радкамі (ці слупкамі) матрыцы A, а астатняя частка — з адпаведнымі радкамі (ці слупкамі) матрыцы B.*

□ Доказ тэарэмы непасрэдна вынікае з лінейнай уласцівасці вызначнікаў:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & \ldots & a_{3n}+b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}+b_{n1} & \ldots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & \ldots & a_{3n}+b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}+b_{n1} & \ldots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & \ldots & a_{3n}+b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}+b_{n1} & \ldots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & \ldots & a_{3n}+b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}+b_{n1} & \ldots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & \ldots & a_{3n}+b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}+b_{n1} & \ldots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & \dots & a_{3n}+b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & \dots & a_{3n}+b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Працягваючы далей скарыстоўваць лінейную ўласцівасць вызначніка па чарзе для кожнага радка, атрымаем сцверджанне тэарэмы. Аналагічна тэарэма даказваецца і для слупкоў. ■

Каб высветліць, чаму роўны вызначнік здабытку дзвюх матрыц, трэба абагульніць тэарэмы 2.1 і 2.2. З гэтай мэтай разгледзім два новых паняцці.

Для квадратнай матрыцы (2.15) парадку n разгледзім мінары двух тыпаў. Няхай $k<n$ ($k, n \in \mathbf{N}$), $i_1, i_2, \dots, i_k$, $j_1, j_2, \dots, j_k$ — адвольныя нумары, такія, што $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqslant n$. Мінор першага тыпу $M'_{\overline{i_1 i_k}\,\overline{j_1 j_k}}$ ёсць вызначнік парадку k; ён адпавядае матрыцы, утворанай тымі элементамі, якія стаяць на перасячэнні k радкоў з нумарамі $i_1, i_2, \dots, i_k$, а таксама k слупкоў з нумарамі $j_1, j_2, \dots, j_k$. Мінор другога тыпу $M_{\overline{i_1 i_k}\,\overline{j_1 j_k}}$ ёсць вызначнік парадку $n-k$; ён адпавядае той матрыцы, якая атрымліваецца ў выніку выкрэслівання k радкоў з нумарамі $i_1, i_2, \dots, i_k$, а таксама k слупкоў з нумарамі $j_1, j_2, \dots, j_k$.

Паняцці мінораў першага і другога тыпу дазваляюць сфармуляваць для вызначніка Δ, што адпавядае матрыцы (2.15), наступныя дзве асноўныя тэарэмы, якія мы падаем без доказу*.

Тэарэма 2.4 **(Лапляса).** *Для адвольнага нумара k, $k<n$, і адвольных фіксаваных нумароў радкоў $i_1, i_2, \dots, i_k$, такіх, што $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$, праўдзіцца формула*

$$\Delta = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k} (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} M'_{\overline{i_1 i_k}\,\overline{j_1 j_k}} M_{\overline{i_1 i_k}\,\overline{j_1 j_k}}. \tag{2.33}$$

Формула (2.33) называецца *раскладам вызначніка па k радках* $i_1, i_2, \dots, i_k$. Сумаванне ў гэтай формуле ідзе па ўсіх магчымых значэннях індэксаў $j_1, j_2, \dots, j_k$, якія адпавядаюць умове $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqslant n$.

---

* З доказам асноўных тэарэм можна азнаёміцца, напрыклад, у кнізе: *В. А. Ильин, Э. Г. Позняк.* Линейная алгебра (М.: Наука, 1984).

Калі $k=1$, то $M'_{i_1j_1}=a_{i_1j_1}$, і мінор $M_{i_1j_1}$ — гэта азначаны вышэй мінор элемента $a_{i_1j_1}$. Будзем лічыць $i_1=i$ $(i=\overline{1,\ n})$, дзе i — адвольны фіксаваны нумар радка; $j_1=j$ $(j=\overline{1,\ n})$ — нумар слупка вызначніка. У гэтым выпадку ў якасці выніку з тэарэмы 2.4 мы атрымліваем тэарэму 2.1.

У поўнай аналогіі з тэарэмай 2.4 фармулюецца сцверджанне аб раскладанні вызначніка па k слупках.

***Тэарэма 2.5* (Ляпляса).** *Для адвольнага нумара k, $k<n$, і адвольных фіксаваных нумароў слупкоў $j_1, j_2, \ldots, j_k$, такіх, што $1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_k\leqslant n$, праўдзіцца формула*

$$\Delta=\sum_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_k}(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}M'_{\overline{i_1i_k}\,\overline{j_1j_k}}M_{\overline{i_1i_k}\,\overline{j_1j_k}}. \qquad (2.34)$$

Формула (2.34) называецца *раскладам вызначніка па k слупках* $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Сумаванне ў ёй ідзе па ўсіх магчымых значэннях індэксаў $i_1, i_2, \ldots, i_k$, такіх, што $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n$.

Калі для $k=1$ нумар слупка j_1 фіксаваны, $j_1=j$ $(j=\overline{1,\ n})$, а i_1 — нумар радка $i_1=i$ $(i=\overline{1,\ n})$, з тэарэмы 2.5 атрымліваем як вынік тэарэму 2.2.

Адзначым адразу, што тэарэму Ляпляса карысна дастасоўваць да вылічэння тых вызначнікаў парадку n, $n\geqslant 2$, якія маюць роўныя нулю міноры парадку $k\geqslant 2$, $k<n$. Для вылічэння такога вызначніка неабходна выдзеліць у ім тыя k радкоў ці слупкоў, якія маюць найбольшую колькасць мінораў k-га парадку, роўных нулю.

Напрыклад,

$$\left|\begin{array}{rr|rrr} 1 & 6 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0\\ \hline 6 & 9 & 1 & 0 & 0\\ -7 & 8 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 6\\ -3 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -240.$$

Скарыстаем тэарэму Ляпляса для доказу наступнага сцверджання.

Тэарэма 2.6. *Вызначнік здабытку дзвюх квадратных матрыц аднолькавага парадку n, $n\geqslant 2$, роўны здабытку вызначнікаў гэтых матрыц.*

□ Няхай $C=AB$, дзе $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, i, $j=\overline{1, n}$. Разгледзім вызначнік Δ парадку $2n$:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.35)$$

Паводле тэарэмы 2.4 (для першых n радкоў) маем

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}=|A||B|. \qquad (2.36)$$

Карыстаючыся ўласцівасцямі вызначніка, пераўтворым вызначнік (2.35) такім чынам, каб замест элементаў a_{ij}, i, $j=\overline{1, n}$, сталі нулі, а замест нулёў у першых радках — элементы c_{ij}, дзе $C=AB=[c_{ij}]$, i, $j=\overline{1, n}$. Для гэтага да першага радка вызначніка (2.35) дададзім $(n+1)$-ы радок, памножаны на a_{11}, $(n+2)$-і радок, памножаны на a_{12}, ..., $2n$-ы радок, памножаны на a_{1n}. Тады ў атрыманым вызначніку першыя n элементаў першага радка будуць нулявыя, а астатнія n элементаў гэтага радка — роўныя адпаведна $\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}$, $\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2}$, $\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn}$. Згодна з азначэннем здабытку дзвюх матрыц, гэтыя сумы ёсць элементы c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n}, якія ўтвараюць першы радок матрыцы $C=AB$. Аналагічна для астатніх радкоў: да i-га радка ($i=\overline{2, n}$) вызначніка Δ дададзім $(n+1)$-ы радок, памножаны на a_{i1}, $(n+2)$-і, памножаны на a_{i2}, ..., $2n$-ы, памножаны на a_{in}. Тады i-ы радок набывае выгляд

$$0 \dots 0 \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2} \dots \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kn}$$

пры адвольным i, $i=\overline{1, n}$, значыць,

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 \dots & 0 & c_{11} & c_{12} \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 \dots & 0 & c_{21} & c_{22} \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 0 & c_{n1} & c_{n2} \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 \dots & 0 & b_{11} & b_{12} \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 \dots & 0 & b_{21} & b_{22} \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Дастасуем да апошняга вызначніка тэарэму 2.4:

$$\Delta=(-1)^{1+2+\dots+n+(n+1)+\dots+2n}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{2(1+2+\dots+n)+nn}|C|(-1)^n=(-1)^{n(n+1)}|C|=|C|.$$

Сцверджанне тэарэмы атрымаем, калі параўнаем апошнюю роўнасць з роўнасцю (2.36). ■

Звернем увагу на тое, што з дапамогаю метада матэматычнай індукцыі тэарэму 2.6 можна абагульніць да роўнасці

$$|A_1A_2\cdots A_m|=|A_1||A_2|\cdots|A_m|,$$

дзе матрыцы $A_1, A_2, \dots, A_m$ маюць аднолькавы парадак n.

Заўвага 2.6. Вызначнік для функцыйнай матрыцы азначаецца аналагічна і захоўвае тыя ж уласцівасці, што і лікавы.

2.4. АДВАРОТНАЯ МАТРЫЦА

Паняцце адваротнай матрыцы і яе ўласцівасці. Для ненулявога рэчаіснага ліку a азначана паняцце адваротнага ліку — такога, які ў выніку множання на лік a дае адзінку. Аналагічна для квадратнай матрыцы парадку n можна разглядаць паняцце ёй адваротнай.

Напачатку неабходна азначыць два паняцці, якія будуць істотна ўжывацца пры разглядзе пытанняў, звязаных з адваротнай матрыцай.

Будзем казаць, што матрыца A ёсць *незвыродная*, калі $\overline{\det} A \neq 0$, і *звыродная*, калі $\overline{\det} A = 0$.

Для матрыцы A, зададзенай роўнасцю (2.15), разгледзім матрыцу

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

дзе A_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ — алгебраічны дадатак элемента a_{ij} матрыцы A. Матрыца C называецца *далучанай* да матрыцы A. Звернем увагу на тое, што алгебраічныя дадаткі элементаў i-га радка $(i = \overline{1, n})$ матрыцы A размешчаны ў i-м слупку матрыцы C.

Лема 2.2. *Калі A ёсць квадратная матрыца парадку n, C — далучаная да яе матрыца, то праўдзіцца роўнасць*

$$AC = CA = E|A|, \tag{2.37}$$

дзе E — адзінкавая матрыца парадку n.

□ Для доказу разгледзім матрыцу

$$AC = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Яе элемент d_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, згодна з азначэннем здабытку матрыц, роўны суме здабыткаў элементаў i-га радка матрыцы A і адпаведных элементаў j-га слупка матрыцы C. У прыватнасці, для кожнага элемента d_{ii}, $i = \overline{1, n}$, які стаіць на галоўнай дыяганалі матрыцы AC, атрымаем суму здабыткаў элементаў i-га радка матрыцы A і іх алгебраічных дадаткаў. Гэтая сума паводле формулы (2.29) роўная $\det A$. Для астатніх элементаў d_{ij}, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, атрымаем суму здабыткаў элементаў i-га радка і алгебраічных дадаткаў j-га радка. Кожная такая сума

на падставе ўласцівасці анулявання роўная нулю. У выніку гэтых разважанняў маем

$$AC=\begin{bmatrix}|A| & 0 & 0 \ldots & 0\\ 0 & |A| & 0 \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 \ldots & |A|\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1\end{bmatrix}|A|=E|A|.$$

Аналагічна даказваецца, што $CA=E|A|$. ■

Азначэнне 2.3. *Калі для матрыцы A існуе матрыца B, такая, што*

$$AB=BA=E, \tag{2.38}$$

дзе E — адзінкавая матрыца, то матрыца B называецца адваротнай для матрыцы A.

Са стасунку (2.38) вынікае, што для існавання адваротнай матрыцы неабходна, каб зыходная была квадратнай, прычым тады абедзве матрыцы маюць аднолькавыя парадкі.

Матрыцу, якая адваротная для матрыцы A, абазначым A^{-1}. Тады роўнасць, што ляжыць у аснове азначэння адваротнай матрыцы, у новым абазначэнні набывае выгляд

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E. \tag{2.39}$$

Тэарэма 2.7. *Матрыца A мае адваротную матрыцу A^{-1}, калі і толькі калі матрыца A незвыродная.*

□ Неабходнасць. Няхай для матрыцы A існуе адваротная матрыца A^{-1}. Тады $AA^{-1}=E$, адкуль $\det(AA^{-1})=\det E$. Скарыстоўваючы тэарэму пра вызначнік здабытку дзвюх матрыц, маем $\det A \det A^{-1}=1$. Апошняя роўнасць і азначае, што A ёсць незвыродная матрыца, бо $\det A\neq 0$.

Дастатковасць. Няхай A ёсць незвыродная матрыца. Дакажам, што для яе

$$A^{-1}=C/|A|, \tag{2.40}$$

дзе C — матрыца, далучаная да матрыцы A. Сапраўды, згодна з лемай 2.2,

$$(AC)/|A|=(CA)/|A|=E$$

ці, тое сама,

$$A(C/|A|)=(C/|A|)A=E.$$

Апошняя роўнасць у адпаведнасці з азначэннем адваротнай матрыцы даказвае справядлівасць формулы (2.40). ■

Звернем увагу на тое, што ў працэсе доказу тэарэмы 2.7 атрымана формула (2.40), якая дае спосаб знаходжання адваротнай матрыцы. Улічваючы азначэнне далучанай матрыцы C, формулу (2.40) можна запісаць ў выглядзе

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (2.41)$$

Натуральна высветліць, колькі адваротных матрыц мае кожная незвыродная матрыца.

Тэарэма 2.8. *Незвыродная матрыца мае адзіную адваротную матрыцу.*

□ Доказ здзейснім ад процілеглага. Няхай A — адвольная незвыродная матрыца. Дапусцім, што яна мае дзве адваротныя матрыцы A_1^{-1}, A_2^{-1}. Тады справядлівая роўнасць $AA_1^{-1}=E$, якую мы памножым злева на A_2^{-1}:

$$A_2^{-1}AA_1^{-1}=A_2^{-1}(AA_1^{-1})=A_2^{-1}E=A_2^{-1}.$$

З другога боку,

$$A_2^{-1}AA_1^{-1}=(A_2^{-1}A)A_1^{-1}=EA_1^{-1}=A_1^{-1}.$$

Атрымалі $A_1^{-1}=A_2^{-1}$. ■

Можна пераканацца, што *праўдзяцца наступныя ўласцівасці адваротнай матрыцы:*

1) $\det A^{-1}=1/\det A$; 2) $(A^{-1})^{-1}=A$;

3) $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$, $k\in\mathbf{N}$; 4) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

5) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

□ Сапраўды, справядлівасць першай уласцівасці вынікае з роўнасцяў:

$$1=\det E=\det(A^{-1}A)=\det A^{-1}\det A.$$

Для матрыцы A разгледзім адваротную матрыцу A^{-1} і для апошняй, у сваю чаргу, разгледзім яе адваротную матрыцу $(A^{-1})^{-1}$. На падставе формулы (2.39) маем $(A^{-1})^{-1}A^{-1}=E$. Памножым апошнюю роўнасць справа на матрыцу A, а затым скарыстаем у левай частцы асацыятыўнасць множання і атрымаем $(A^{-1})^{-1}(A^{-1}A)=E$ ці, тое сама, $(A^{-1})^{-1}E=A$, адкуль і вынікае другая ўласцівасць.

Для матрыцы A^k і адваротнай ёй $(A^k)^{-1}$, $k\in\mathbf{N}$, на падставе азначэння выконваецца роўнасць $(A^k)^{-1}A^k=E$. Памножым гэтую роўнасць справа на матрыцу $(A^{-1})^k$, дзе A^{-1} — адваротная для матрыцы A, і ўлічым асацыятыўнасць множання:

$$(A^k)^{-1}(AA^{-1})^k=(A^{-1})^k.$$

Апошняя роўнасць прыводзіць нас да трэцяй уласцівасці.

Няхай A, B — адвольныя незвыродныя матрыцы. Для матрыцы AB і адваротнай ёй $(AB)^{-1}$ выконваецца роўнасць $(AB)(AB)^{-1}=E$, якую мы памножым злева на A^{-1}: $B(AB)^{-1}=A^{-1}$. Апошнюю роўнасць зноў памножым злева на B^{-1} (бо ў агульным выпадку камутатыўнасць не мае месца) і атрымаем чацвёртую ўласцівасць.

Для доказу пятай уласцівасці заўважым, што матрыца, далучаная да матрыцы A^T, атрымліваецца транспанаваннем матрыцы C, дзе C — матрыца, далучаная да матрыцы A. Паколькі, згодна з формулай (2.41), атрымліваем:

$$(A^T)^{-1}=\frac{1}{|A^T|}C^T,\quad (A^{-1})^T=\frac{1}{|A|}C^T$$

і $|A^T|=|A|$, то ўласцівасць 5 даказана. ■

2°. Элементарныя пераўтварэнні матрыцы. Сфармулюем

Азначэнне 2.4. *Элементарным пераўтварэннем матрыцы называецца кожнае наступнае дзеянне з матрыцай:*

1) *множанне некаторага радка (слупка) матрыцы на лік, няроўны нулю;*

2) *дадаванне да аднаго радка (слупка) матрыцы іншага радка (слупка), памножанага на адвольны лік;*

3) *перастанова месцамі двух радкоў (слупкоў) матрыцы.*

Калі матрыца B атрымана з матрыцы A з дапамогаю элементарных пераўтварэнняў, то будзем пісаць $A\sim B$ і казаць: «матрыца A эквівалентная матрыцы B». Відавочна, што ў гэтым выпадку можна з дапамогаю элементарных пераўтварэнняў здзейсніць і зваротны пера-

ход ад B да A, г. зн. $B \sim A$. Калі матрыца B атрымана з A некаторым элементарным пераўтварэннем ($A \sim B$), а матрыца C атрымана у сваю чаргу з матрыцы B таксама некаторым пераўтварэннем ($B \sim C$), то матрыца C можа быць атрымана з матрыцы A паслядоўным скарыстаннем гэтых двух пераўтварэнняў ($A \sim C$).

У дачыненні да элементарных пераўтварэнняў матрыцы, пададзеных ў азначэнні 2.4, справядлівая

Лема 2.3. *Элементарнае пераўтварэнне 3 можа быць атрымана паслядоўным скарыстаннем пераўтварэнняў 1 і 2.*

☐ Разгледзім элементарныя пераўтварэнні, якія тычацца i-га і j-га слупкоў матрыцы (2.15):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}-a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}-a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}-a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A_1.$$

Матрыцу A_1 атрымалі з A, калі да i-га слупка дадалі j-ы слупок, які папярэдне памножылі на -1. Дададзім да j-га слупка атрыманы i-ы слупок матрыцы A_1:

$$A_1 \sim \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}-a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}-a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}-a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & -a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & -a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & -a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A_2.$$

Матрыцу A_2 атрымалі з A_1, калі да i-га слупка (да элементаў $a_{ki}-a_{kj}$, $k=\overline{1, n}$) дадалі j-ы слупок (элементы

a_{ki}, $k=\overline{1, n}$), памножаны на -1. У выніку множання i-га слупка (элементаў $-a_{kj}$, $k=\overline{1, n}$) на -1 атрымаем

$$A_2 \sim \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A_3.$$

Лёгка заўважыць, што матрыца A_3 атрымліваецца з матрыцы A з дапамогаю перастановы i-га і j-га слупкоў.

Доказ лемы для радкоў здзяйсняецца аналагічна. ■

Тэарэма 2.9. *Усякае элементарнае пераўтварэнне слупкоў матрыцы A парадку n, $n \geqslant 2$, ёсць эквівалентнае множанню матрыцы A справа на матрыцу, атрыманую з адзінкавай матрыцы E_n пры дапамозе таго ж элементарнага пераўтварэння.*

□ Для доказу разгледзім тры магчымыя выпадкі.

1. Няхай матрыца A_1 атрымана з матрыцы A у выніку множання i-га слупка на лік $\lambda \neq 0$. Скарыстаем тое ж пераўтварэнне да матрыцы E_n, пасля чаго атрымаем некаторую матрыцу B. Тады:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \lambda a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \lambda a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A_1.$$

2. Няхай да i-га слупка матрыцы A дадалі яе j-ы слупок, які памножылі на лік $\lambda \neq 0$. Атрымалі матрыцу A_2. У выніку гэтых жа пераўтварэнняў адзінкавай матрыцы атрымаем некаторую матрыцу C. Дакажам, што і ў гэтым разе $AC = A_2$. Маем:

$$AC=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i}+\lambda a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i}+\lambda a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii}+\lambda a_{ij} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji}+\lambda a_{jj} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni}+\lambda a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A_2.$$

3. Тэарэма справядлівая і ў выпадку перастановы двух слупкоў, паколькі такая перастанова раўназначная паслядоўнаму скарыстанню пераўтварэнняў 1 і 2 (на падставе лемы 2.3). ■

Аналагічнымі разважаннямі даказваецца і наступная тэарэма.

Тэарэма 2.10. *Усякае элементарнае пераўтварэнне радкоў матрыцы A парадку n, $n \geqslant 2$, ёсць эквівалентнае множанню матрыцы A злева на матрыцу, якая атрымана з адзінкавай E_n пры дапамозе таго ж элементарнага пераўтварэння.*

3°. Знаходжанне адваротнай матрыцы з дапамогаю элементарных пераўтварэнняў. Формула (2.41) дае метад знаходжання адваротнай матрыцы, у аснове якога ляжыць скарыстанне паняццяў вызначніка і алгебраічнага дадатку. Метад знаходжання адваротнай матрыцы на падставе элементарных пераўтварэнняў грунтуецца на наступных дзвюх тэарэмах.

Тэарэма 2.11. *Усякая незвыродная матрыца можа быць пераўтворана ў адзінкавую пры дапамозе элементарных пераўтварэнняў толькі слупкоў (ці толькі радкоў).*

□ Доказ ажыццявім метадам матэматычнай індукцыі. Для матрыцы першага парадку тэарэма відавочная. Дапусцім, што яна справядлівая для кожнай незвыроднай матрыцы $(n-1)$-га парадку, і дакажам, што яна праўдзіцца для адвольнай незвыроднай матрыцы A парадку n, $n \geqslant 2$.

Паколькі матрыца A незвыродная, то сярод элементаў першага радка ёсць хаця б адзін ненулявы. Агульнасць доказу не парушыцца, калі будзем лічыць $a_{11} \neq 0$. Памножым першы слупок матрыцы на $1/a_{11}$ і атрымаем матрыцу

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

дзе $a'_{i1} = a_{i1}/a_{11}$; $i = \overline{2, n}$.

Памножым першы слупок матрыцы па чарзе на $-a_{12}$, $-a_{13}$, ..., $-a_{1n}$ і дададзім адпаведна да другога, трэцяга, ..., n-га слупка. У выніку матрыца A_1 пераўтворыцца ў матрыцу

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

дзе b_{ij} $(i,\ j = \overline{2, n})$ — лікі, атрыманыя ў выніку гэтага пераўтварэння. Матрыца A_2 — незвыродная, бо па адпаведнай уласцівасці велічыня вызначніка не мяняецца ад дадавання да пэўнага яго слупка іншага слупка, памножанага на лік. На падставе азначэння

$$|A_2| = 1 \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = |B| \neq 0.$$

Значыць, атрымана незвыродная матрыца B парадку $n-1$. Адпаведна індуктыўнай згодзе, матрыца B можа быць прыведзена да адзінкавай з дапамогаю элементарных пераўтварэнняў толькі слупкоў матрыцы. У выніку гэтага матрыца A_2 набывае выгляд

$$A_2 \sim A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Да першага слупка матрыцы A_3 дададзім лінейную камбінацыю другога, трэцяга, ..., n-га слупкоў з лікавымі множнікамі $-a'_{21}$, $-a'_{31}$, ..., $-a'_{n1}$ адпаведна. Атрымаем адзінкавую матрыцу. Паколькі $A \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim E$, то матрыца A пры дапамозе элементарных пераўтварэнняў слупкоў зведзена да адзінкавай матрыцы.

Аналагічна тэарэма доказваецца і для пераўтварэнняў радкоў матрыцы. ■

Даказаная тэарэма мае відавочны

Вынік. *Для ўсякай незвыроднай матрыцы A існуюць элементарныя пераўтварэнні толькі слупкоў (радкоў) адзінкавай матрыцы E, якія пераўтвараюць матрыцу E ў матрыцу A.*

Тэарэма 2.12. *Калі скарыстаць у той жа паслядоўнасці ўсе элементарныя пераўтварэнні толькі слупкоў (радкоў) матрыцы E_n, пры дапамозе якіх незвыродная матрыца A парадку n пераўтвараецца ў адзінкавую, то атрыманая матрыца будзе адваротнай для матрыцы A.*

□ Для доказу тэарэмы ажыццявім такія элементарныя пераўтварэнні слупкоў матрыцы A, якія прывядуць яе да адзінкавай матрыцы E_n. Такія ж пераўтварэнні і ў той жа паслядоўнасці здзейснім з матрыцай E_n, у выніку чаго яна пераўтворыцца ў некаторую матрыцу B. Грунтуючыся на тэарэме 2.9, прыходзім да роўнасці $AB = E_n$, адкуль вынікае $B = A^{-1}$.

Сцверджанне для радкоў матрыцы даказваецца аналагічна на падставе тэарэмы 2.10. ■

Для знаходжання адваротнай матрыцы A^{-1} мэтазгод-

на запісваць матрыцы A і E праз рыску адна пад другой, калі пераўтвараюцца слупкі, ці побач, калі пераўтвараюцца радкі. Матрыца, атрыманая на месцы адзінкавай пасля таго, як матрыца A пераўтворыцца ў адзінкавую, і будзе матрыцай A^{-1}:

Прыклад 2.2. Знайсці A^{-1} для матрыцы

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

▷ Для развязання скарыстаем пераўтварэнне радкоў. Справа ад матрыц дадзім сімвалічны каментар дзеянняў. Будзем мець:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] -5 \sim 6 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right] -3 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right] -1 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right].$$

Атрымалі адваротную матрыцу

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

2.5. РАНГ І БАЗІСНЫ МІНОР МАТРЫЦЫ

1°. Ранг матрыцы і яго ўласцівасці. Няхай зададзена прамавугольная матрыца A памеру $m\times n$ у выглядзе (2.1).

Азначэнне 2.5. *Рангам матрыцы называецца найбольшы парадак тых яе мінораў, якія няроўныя нулю.*

Калі ўсе міноры матрыцы роўныя нулю, то дамовімся, што ранг такой матрыцы таксама роўны нулю.

Ранг матрыцы A абазначым $r(A)$ ці проста r, калі зразумела, пра якую матрыцу ідзе размова.

Для ранга матрыцы характэрныя наступныя ўласцівасці.

1. *Калі матрыца A мае памер $m\times n$, то $0\leqslant r(A)\leqslant\min(m, n)$, дзе $\min(m, n)$ ёсць меншы з лікаў m і n.*

2. *Роўнасць $r(A)=0$ мае месца, калі і толькі калі A — нулявая матрыца.*

3. *Для квадратнай матрыцы A парадку n маем $r(A)=n$, калі і толькі калі A — незвыродная матрыца.*

4. *Для адвольнай матрыцы A праўдзіцца роўнасць*

$$r(A^T)=r(A).$$

5. *Ранг матрыцы, атрыманай з дадзенай у выніку выкрэсління некаторага яе радка (слупка), роўны рангу зыходнай матрыцы, ці меншы на адзінку.*

6. *Ранг матрыцы, атрыманай з дадзенай у выніку дапісвання да яе адвольнага радка (слупка), роўны рангу зыходнай ці большы на адзінку.*

7. *Калі з дадзенай матрыцы выкрасліць ці дапісаць да яе нулявы радок (слупок), то ранг матрыцы не зменіцца.*

Уласцівасці 1—7 лёгка даказваюцца, калі скарыстаць азначэнні ранга матрыцы і вызначніка, а таксама ўласцівасці вызначніка.

Для знаходжання ранга матрыцы нам спатрэбіцца

Лема 2.4. *Калі для дадзенай матрыцы памеру $m\times n$ усе міноры парадку k, $k<\min(m, n)$, роўныя нулю, то ўсе*

міноры больш высокага парадку таксама роўныя нулю.

□ Для доказу разгледзім адвольны мінор парадку $k+1$. На падставе тэарэмы Ляпляса яго можна раскласці па элементах адвольнага радка (ці слупка). Кожны складнік такога раскладу змяшчае ў якасці множніка мінор k-га парадку, што і азначае роўнасць нулю ўсёй сумы. ■

Непасрэдна з лемы 2.4 атрымліваем наступнае сцверджанне.

Вынік. *Калі сярод мінораў парадку k дадзенай матрыцы A ёсць няроўныя нулю, а ўсе міноры $(k+1)$-га парадку роўныя нулю, то $r(A)=k$.*

Грунтуючыся на леме і выніку з яе, ранг матрыцы можна знайсці наступным чынам. Калі ўсе міноры першага парадку (г. зн. элементы) матрыцы роўныя нулю, то $r=0$. Пры наяўнасці хаця б аднаго ненулявога элемента неабходна разгледзець міноры другога парадку. Калі ўсе яны роўныя нулю, то $r=1$. У тым разе, калі знойдзецца хаця б адзін ненулявы мінор другога парадку, неабходна даследаваць усе міноры трэцяга парадку. Тут таксама магчымы два варыянты: усе міноры трэцяга парадку роўныя нулю, г. зн. $r=2$; сярод мінораў трэцяга парадку ёсць хаця б адзін ненулявы, што вымагае далейшага аналізу. Працэс даследавання працягваецца датуль, пакуль не высветліцца, што ўсе міноры парадку k роўныя нулю ці міноры парадку k для дадзенай матрыцы ўжо не існуюць. Тады прыходзяць да высновы, што $r=k-1$.

Прыклад 2.3. Знайсці ранг матрыцы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2 & -1\\ 2 & 8 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

▷ Адразу заўважым, што $r(A)\geqslant 1$, бо матрыца A мае ненулявыя элементы. Матрыца A змяшчае адзін нулявы радок, значыць, яе ранг будзе такім жа, як ранг матрыцы

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2 & -1\\ 2 & 8 & 4 & -2\end{bmatrix}.$$

Паколькі памер матрыцы A_1 ёсць 2×4, то $1\leqslant r(A_1)\leqslant 2$. Але ўсе міноры другога парадку роўныя нулю, паколькі слупкі прапарцыйныя. Канчаткова высвятляем, што $r(A)=1$. ◀

Апісаны спосаб знаходжання ранга матрыцы не заўсёды рацыянальны. У тым выпадку, калі разглядаецца

матрыца вялікага памеру, якая не мае нулявых радкоў ці слупкоў, ён даволі працаёмісты. Наступная тэарэма дае тэарэтычную аснову для знаходжання ранга матрыцы іншым спосабам.

Тэарэма 2.13. *Элементарныя пераўтварэнні матрыцы не змяняюць яе ранга.*

☐ Няхай зададзена матрыца (2.1). Для доказу дастаткова паказаць, што яе ранг не зменіцца ў выніку скарыстання элементарных пераўтварэнняў 1 і 2 (гл. лему 2.3). Разгледзім гэтыя пераўтварэнні для слупкоў матрыцы (для радкоў аналагічна).

Будзем лічыць, што i-ы слупок матрыцы (2.1) памножылі на лік k, $k \neq 0$, і ў выніку атрымалі матрыцу A_1. Лёгка заўважыць, што тыя міноры матрыцы A_1, якія не змяшчаюць i-га слупка, супадаюць з адпаведнымі мінорамі матрыцы A, а тыя, якія змяшчаюць,— роўныя адпаведным мінорам матрыцы A, памножаным на лік k. Гэта азначае, што адпаведныя міноры матрыц A і A_1 роўныя (ці няроўныя) нулю адначасова, што і даказвае справядлівасць тэарэмы ў дадзеным выпадку.

Дакажам, што другое элементарнае пераўтварэнне таксама не мяняе ранга матрыцы, для чаго разгледзім матрыцу

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + ka_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} + ka_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} + ka_{mj} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Няхай ранг зыходнай матрыцы A роўны r, гэта азначае, што сярод мінораў парадку r матрыцы A ёсць хаця б адзін, які адрозніваецца ад нуля, а ўсе міноры парадку $r+1$ роўныя нулю. Трэба даказаць, што: 1) матрыца A_2 мае хаця б адзін ненулявы мінор парадку r; 2) усе міноры парадку $r+1$ матрыцы A_2 ёсць нулі.

Разгледзім міноры парадку r зыходнай матрыцы A, якія не змяшчаюць элементаў i-га слупка. Тут магчымы два выпадкі: сярод іх знойдзецца ненулявы мінор M ці ўсе такія міноры ёсць нулі. У першым выпадку сцверджанне 1 даказана, бо мінор M з'яўляецца адначасова і мінорам матрыцы A_2. У другім выпадку прыходзім да высновы, што матрыца A мае ненулявы мінор M з элементамі i-га слупка. Разгледзім мінор M_1 матрыцы A_2, які займае ў гэтай матрыцы такое ж становішча, як і мінор

M у матрыцы A. Але кожны элемент i-га слупка мінора M_1 ёсць сума двух лікаў. З гэтай прычыны (на падставе ўласцівасці вызначніка) $M_1 = M + M_2$. Засяродзім увагу на тым, што $M_2 = 0$. Сапраўды, калі M_2 мае j-ы слупок матрыцы A, то гэта азначае, што ён мае два прапарцыйныя слупкі; калі M_2 не мае j-га слупка, то ён ёсць мінор r-га парадку матрыцы A, які памножаны на лік k (мы разглядаем выпадак, калі такія міноры матрыцы A ёсць нулі). Сцверджанне 1 даказана і ў гэтым выпадку.

Сцверджанне 2 лёгка атрымліваецца з аналагічных разважанняў. Калі разглядаюцца міноры парадку $r + 1$ матрыцы A_2, якія не маюць i-га слупка, то яны ёсць нулі, бо адначасова з'яўляюцца мінорамі матрыцы A. Калі міноры парадку $r+1$ матрыцы A_2 змяшчаюць i-ы слупок, то яны ёсць сума двух мінораў. Першы з іх ёсць нуль як мінор матрыцы A, а другі — нуль ці таму, што ён мае два прапарцыйныя слупкі, ці таму, што ён ёсць мінор матрыцы A, памножаны на лік k. ■

Для практычнага дастасавання даказанай тэарэмы пры знаходжанні ранга зыходную матрыцу з дапамогай элементарных пераўтварэнняў пераводзяць у матрыцу, ранг якой лёгка знайсці. Няцяжка даказаць, што кожная ненулявая прамавугольная матрыца (2.1) пераўтвараецца ў трапецыйную:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, r}.$$

На аснове ўласцівасці ранга маем $r(B) = r(B_1)$, дзе B_1 — матрыца памеру $r \times n$, атрыманая з B у выніку выкрэслівання нулявых радкоў. Але матрыца B_1 мае ненулявы мінор M парадку r, які стаіць у левым верхнім куце $(M = b_{11} b_{22} \cdots b_{rr})$. Значыць, $r(A) = r(B) = r(B_1) = r$.

На падставе тэарэмы 2.3 можна даказаць яшчэ адну важную ўласцівасць ранга.

Тэарэма 2.14. *Калі матрыцу A памножыць злева ці справа на незвыродную матрыцу B, то ранг атрыманай матрыцы будзе роўны рангу матрыцы A:* $r(AB) = r(BA) = r(A)$, $\det B \neq 0$.

□ Паколькі ўсякую незвыродную матрыцу можна атрымаць з адзінкавай шляхам элементарных пераўтварэнняў слупкоў матрыцы (гл. вынік з тэарэмы 2.11), то множанне матрыцы A справа на незвыродную матрыцу B раўназначнае скарыстанню элементарных пераўтварэнняў слупкоў матрыцы A (тэарэма 2.9). Зыходзячы з таго, што элементарныя пераўтварэнні не мяняюць ранга матрыцы, прыходзім да высновы, што $r(AB)=r(A)$.

Аналагічна даказваецца роўнасць $r(BA)=r(A)$. ■

2°. Базісны мінор. Калі некаторы радок (слупок) матрыцы можна падаць у выглядзе сумы іншых k радкоў (слупкоў), памножаных на лікі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ адпаведна, то будзем казаць, што дадзены радок (слупок) ёсць *лінейная камбінацыя k радкоў (слупкоў).*

Азначэнне 2.6. *Радкі $P_1, P_2, \ldots, P_m$ $(m>1)$ матрыцы $A_{m\times n}$ называюцца лінейна залежнымі, калі хаця б адзін з іх ёсць лінейная камбінацыя астатніх. У адваротным выпадку радкі называюцца лінейна незалежнымі.*

Аналагічна азначаецца лінейная залежнасць і незалежнасць слупкоў.

Калі некаторы радок матрыцы $A_{m\times n}$ з'яўляецца лінейнай камбінацыяй k іншых радкоў $(k<m-1)$, то гэты радок ёсць лінейная камбінацыя ўсіх астатніх радкоў (бо ў азначэнні лінейнай камбінацыі лікавыя каэфіцыенты могуць быць і нулявыя). Аналагічнае сцверджанне мае месца і для слупкоў матрыцы.

Калі, напрыклад, першы слупок матрыцы $A_{m\times n}$ з'яўляецца лінейнай камбінацыяй астатніх слупкоў, то гэта азначае, што існуюць такія лікі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, для якіх

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_{n-1} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Аналагічны запіс можна зрабіць і ў тым выпадку, калі некаторы радок ёсць лінейная камбінацыя астатніх.

Напрыклад, для трэцяга радка матрыцы

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

маем

$$[0 \quad 4] = -2[6 \quad -2] + 4[3 \quad 0] + 0[-5 \quad 1],$$

значыць, $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 0$.

Азначым шэраг паняццяў, якія нам спатрэбяцца для развіцця далейшай тэорыі.

Радкамі (слупкамі), якія праходзяць праз мінор M матрыцы A, будзем называць тыя радкі (слупкі) матрыцы A, на перасячэнні якіх стаяць элементы мінора M.

Абымальным мінорам для мінора M парадку k матрыцы A назавем мінор парадку $k+1$ гэтай матрыцы, які змяшчае мінор M.

Базісным мінорам матрыцы дамовімся называць ненулявы мінор, парадак якога роўны рангу матрыцы. Адразу засяродзім увагу на тым, што для ненулявой матрыцы заўсёды існуе базісны мінор, прычым ён можа быць не адзін.

Дапусцім, што для дадзенай матрыцы выбраны пэўны базісны мінор. Радкі і слупкі, на перасячэнні якіх стаяць элементы базіснага мінора, будзем называць *базіснымі радкамі* і *слупкамі матрыцы.*

Тэарэма 2.15 (пра базісны мінор). *1. Кожны радок (слупок) матрыцы ёсць лінейная камбінацыя базісных радкоў (слупкоў).*

2. *Базісныя радкі (слупкі) матрыцы лінейна незалежныя.*

☐ Няхай базісны мінор матрыцы (2.1)

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Зафіксуем j, $1 < j \leqslant n$, і разгледзім вызначнікі

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Калі $i \leqslant r$ ці $j \leqslant r$, то $M_{ij}=0$, бо M_{ij} мае два аднолькавыя радкі ці слупкі. Калі $i>r$, а таксама $j>r$, то $M_{ij}=0$ з той прычыны, што M_{ij} ёсць мінор парадку $r+1$ матрыцы з рангам r. Раскладзем вызначнік M_{ij} па элементах апошняга радка і атрымаем

$$M_{ij}=a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\ldots+a_{ir}\alpha_r+a_{ij}\alpha_{r+1}, \qquad (2.42)$$

дзе $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ — алгебраічныя дадаткі элементаў апошняга радка, прычым значэнні лікаў $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ не залежаць ад i. Відавочна таксама, што α_{r+1} не залежыць ні ад i, ні ад j, паколькі $\alpha_{r+1}=M$. Улічваючы, што $M_{ij}=$ $=0$ і $M \neq 0$, з роўнасці (2.42) маем

$$a_{ij}=\beta_i a_{i1}+\beta_2 a_{i2}+\ldots+\beta_r a_{ir}, \qquad (2.43)$$

дзе $\beta_1=-\alpha_i/M$; $i=\overline{1, m}$.

Роўнасць (2.43) якраз і азначае, што j-ы слупок матрыцы A (нумар j у нас фіксаваны) ёсць лінейная камбінацыя базісных слупкоў.

Для радкоў першае сцверджанне тэарэмы даказваецца аналагічна.

Доказ другога сцверджання здзейснім метадам ад процілеглага. Дапусцім, што базісныя радкі (слупкі) матрыцы лінейна залежныя. Тады адзін з базісных радкоў (слупкоў) матрыцы ёсць лінейная камбінацыя астатніх базісных радкоў (слупкоў). Апошняе азначае, што адзін з радкоў (слупкоў) базіснага мінора ёсць лінейная камбінацыя астатніх яго радкоў (слупкоў). Але тады на падставе адпаведнай уласцівасці вызначнікаў прыходзім да высновы, што базісны мінор роўны нулю, а гэта супярэчыць яго азначэнню. ■

Можна лёгка пераканацца, што справядлівыя наступныя вынікі з тэарэмы 2.15.

Вынік 1. *Усякі нябазісны радок (слупок) матрыцы ёсць лінейная камбінацыя ўсіх радкоў (слупкоў) гэтай матрыцы.*

Вынік 2. *Максімальная колькасць лінейна незалежных радкоў (слупкоў) матрыцы роўная рангу матрыцы.*

Вынік 3 (крытэр роўнасці нулю вызначніка). *Для таго каб вызначнік матрыцы быў роўны нулю, неабходна і дастаткова, каб нейкі адзін з яго радкоў (слупкоў) быў лінейнай камбінацыяй іншых яго радкоў (слупкоў).*

Доказ тэарэмы 2.15 дае нам магчымасць сфармуляваць карысны для практычнага дастасавання пры вылічэнні ранга матрыцы *метад абымальных мінораў*: калі

матрыца мае ненулявы мінор парадку r і ўсе яго абымальныя міноры роўныя нулю ці не існуюць, то ранг матрыцы роўны r.

Значыць, акрамя двух апісаных вышэй спосабаў знаходжання ранга матрыцы A (пошуку ненулявога мінора максімальнага парадку і скарыстання элементарных пераўтварэнняў), можна знаходзіць ранг і наступным чынам: вызначыць ненулявы мінор M некаторага парадку r, разгледзець усе яго абымальныя міноры (дапісваючы па чарзе ўсе магчымыя варыянты з радкоў і слупкоў матрыцы A), высветліць, ці ўсе абымальныя міноры роўныя нулю. Калі знойдзецца ненулявы абымальны мінор M', то гэта ўжо наводзіць на думку, што ранг матрыцы можа быць роўны $r+1$. Каб пераканацца, трэба разглядаць (калі яны існуюць) усе абымальныя міноры для мінора M'.

2.6. СІСТЭМЫ ЛІНЕЙНЫХ АЛГЕБРАІЧНЫХ РАЎНАННЯЎ

1°. Асноўныя паняцці. Пачнем з наступнага азначэння.

Азначэнне 2.7. *Сістэмай m лінейных алгебраічных раўнанняў з n невядомымі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называецца сістэма выгляду*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m.\end{array}\right\} \qquad (2.44)$$

Лікі $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ называюцца каэфіцыентамі сістэмы, а лікі $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — вольнымі складнікамі.

Калі $b_i=0$, $i=\overline{1, m}$, то сістэму будзем называць *аднароднай*; калі хаця б адзін вольны складнік ненулявы, сістэма называецца *неаднароднай*.

Развязкам сістэмы (2.44) называецца ўсякая ўпарадкаваная сукупнасць n лікаў ($c_1, c_2, \ldots, c_n$), якія пры падстанове ў кожнае раўнанне сістэмы на месца адпаведных невядомых пераўтвараюць кожнае раўнанне сістэмы (2.44) у тоеснасць. Калі сістэма мае хаця б адзін развязак, дамовімся называць яе *супольнай*, у процілеглым выпадку — *несупольнай*. Супольная сістэма, якая мае дакладна адзін развязак, называецца *вызначанай*, а тая,

якая мае больш за адзін развязак,— *нявызначанай*. Ніжэй мы пакажам, што нявызначаная сістэма мае бясконца многа развязкаў.

Развязаць сістэму — гэта значыць высветліць, супольная яна ці не, і, калі супольная, знайсці ўсе яе развязкі. Відавочна, што калі ў сістэме (2.44) $a_{ij}=0$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$, то: 1) сістэма мае бясконцае мноства развязкаў пры $b_i=0$, $i=\overline{1, m}$; 2) яна з'яўляецца несупольнай, калі ёсць хаця б адзін ненулявы вольны складнік.

Сістэму (2.44) зручна запісваць у матрычным выглядзе, для чаго азначым неабходныя паняцці. Матрыцу

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{2.45}$$

элементамі якой з'яўляюцца каэфіцыенты сістэмы, назавем *матрыцай сістэмы*. Нам спатрэбіцца таксама *матрыца-слупок невядомых* і *матрыца-слупок вольных складнікаў*, якія азначаюцца адпаведна роўнасцямі:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Відавочна, што кожнай лінейнай сістэме (2.44) адпавядае адзіная пара матрыц A, B і, наадварот, кожнай пары матрыц A, B — адзіная сістэма.

Паколькі матрыца A узгоднена з матрыцай X, то можна знайсці здабытак

$$AX=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Як паказваюць роўнасці (2.44), кожны элемент матрыцы-слупка AX ёсць адпаведны элемент матрыцы B. Зыходзя-

чы з азначэння роўных матрыц, атрымліваем матрычны запіс сістэмы (2.44):

$$AX = B. \tag{2.46}$$

Калі $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — развязак сістэмы (2.44), то матрыца

$$C^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

задавальняе раўнанне (2.46) і называецца *вектар-развязкам сістэмы* (2.44).

Скарыстоўваючы матрыцы-слупкі каэфіцыентаў, якія стаяць пры адной невядомай велічыні, сістэму (2.44) можна запісаць таксама ў выглядзе:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{2.47}$$

Дзве сістэмы называюцца *эквівалентнымі (раўназначнымі)*, калі яны маюць адно і тое ж мноства развязкаў. У прыватнасці, усякія дзве несупольныя сістэмы з аднолькавай колькасцю невядомых лічацца эквівалентнымі.

Элементарнымі пераўтварэннямі лінейнай сістэмы называюцца наступныя дзеянні:

1) множанне раўнання сістэмы на ненулявы лік;

2) дадаванне да аднаго раўнання сістэмы іншага яе раўнання, памножанага на адвольны лік;

3) перастанова месцамі двух раўнанняў сістэмы.

У дачыненні да элементарных пераўтварэнняў сістэмы справядлівая

Тэарэма 2.16. *Скарыстанне элементарных пераўтварэнняў прыводзіць да эквівалентнай сістэмы.*

□ Не абмяжоўваючы агульнасці, будзем памнажаць на лік $\beta \neq 0$, напрыклад, першае раўнанне сістэмы (2.44) і дадаваць да другога. Атрымаем раўнанне

$$\beta(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) = \beta b_1 + b_2. \tag{2.48}$$

У выніку гэтага дзеяння сістэма набывае выгляд

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a'_{21}x_1+a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+\ldots+a_{3n}x_n=b_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{array}\right\} \quad (2.49)$$

дзе $a'_{2j}=\beta a_{1j}+a_{2j}$, $j=\overline{1, n}$; $b'_2=\beta b_1+b_2$, $\beta\neq 0$. Сістэма (2.49) адрозніваецца ад сістэмы (2.44) толькі другім раўнаннем. Калі $(c_1, c_2, ..., c_n)$ — развязак сістэмы (2.38), то ён будзе таксама развязкам сістэмы (2.49), бо ўсе раўнанні, акрамя другога, у гэтых сістэмах аднолькавыя. Пры падстанове $c_1, c_2, ..., c_n$ замест адпаведных невядомых у другое раўнанне сістэмы (2.49) яно таксама пераўтвараецца ў лікавую тоеснасць. Праўдзіцца і адваротнае сцверджанне: калі $(c_1, c_2, ..., c_n)$ — развязак сістэмы (2.49), то гэта ёсць таксама развязак сістэмы (2.44). Сапраўды, другое раўнанне сістэмы (2.44), якім адрозніваюцца сістэмы, атрымліваецца ў выніку множання першага раўнання сістэмы (2.49) на лік $-\beta$ і дадавання да другога раўнання. Для такога дзеяння справядлівасць тэарэмы даказаная.

Відавочна, што пры неаднаразовым скарыстанні элементарных пераўтварэнняў новая сістэма будзе эквівалентная зыходнай. Лёгка ўбачыць таксама, што эквівалентнасць сістэм мае месца і пры перастанове двух адвольных раўнанняў сістэмы. ■

Заўвага 2.7. У выніку элементарных пераўтварэнняў можа здарыцца так, што новая сістэма змяшчае раўнанне з усімі нулявымі каэфіцыентамі пры невядомых. Тут магчымыя два выпадкі: 1) вольны складнік ёсць таксама нуль; 2) вольны складнік ненулявы. У першым выпадку эквівалентная сістэма складаецца з меншай колькасці раўнанняў, чым зыходная (раўнанне з нулявымі каэфіцыентамі адкідваем); у другім выпадку атрымліваем несупольную сістэму і прыходзім да высновы, што і першапачатковая сістэма раўнанняў ёсць несупольная.

2°. Супольнасць сістэмы. Пры развязанні сістэмы лінейных раўнанняў узнікае натуральнае жаданне высветліць спачатку супольнасць сістэмы. Для гэтага нам спатрэбіцца паняцце *пашыранай матрыцы*, якая атрымліваецца з матрыцы (2.45) у выніку дапісвання справа слупка з вольных складнікаў:

$$[A|B]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]. \qquad (2.50)$$

Справядлівы наступны крытэр супольнасці сістэмы.

***Тэарэма 2.17* (Кронэкера* — Капэлі**).** *Для супольнасці сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў неабходна і дастаткова, каб ранг матрыцы сістэмы быў роўны рангу яе пашыранай матрыцы.*

□ Неабходнасць. Няхай сістэма (2.44) супольная. Дакажам, што $r(A)=r[A|B]$, дзе матрыцы A і $[A|B]$ вызначаны роўнасцямі (2.45) і (2.50). Скарыстаем запіс сістэмы ў форме (2.47). На падставе супольнасці сістэмы можам сцвярджаць, што існуе такая сукупнасць лікаў $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, што

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} c_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} c_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \qquad (2.51)$$

Роўнасць (2.51) азначае, што апошні слупок матрыцы $[A|B]$ ёсць лінейная камбінацыя астатніх яго слупкоў. Значыць, з дапамогаю элементарных пераўтварэнняў матрыцы можна зрабіць апошні слупок нулявым (калі дадаць да яго лінейную камбінацыю першых n слупкоў з множнікамі $-c_1, -c_2, \dots, -c_n$ адпаведна). На падставе тэарэмы 2.13 і ўласцівасці 7 ранга матрыцы атрымліваем $r(A)=r([A|B])$.

Дастатковасць. Няхай $r(A)=r([A|B])=r$. Тады існуе мінор парадку r, які з'яўляецца базісным як для матрыцы A, так і для матрыцы $[A|B]$, бо кожны мінор матрыцы A з'яўляецца адначасова і мінорам пашыранай матрыцы. На падставе тэарэмы 2.15 апошні слупок матрыцы $[A|B]$ ёсць лінейная камбінацыя слупкоў базіснага мінора, значыць, і ўсіх слупкоў матрыцы A. З гэтай прычыны існуюць лікі $c_1, c_2, \dots, c_n$, такія, што матры-

---

* *Кронэкер Леапольд* (Kronecker Leopold, 1823—1891) — нямецкі матэматык.

** *Капэлі Альфрэда* (Capelli Alfredo, 1855—1910) — італьянскі матэматык.

цу-слупок B можна падаць у выглядзе (2.51). Гэтая роўнасць і дазваляе сцвярджаць, што сукупнасць лікаў $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ёсць развязак сістэмы (2.44). ■

Вынік. *Калі рангі матрыцы сістэмы і пашыранай матрыцы няроўныя, то сістэма несупольная.*

3°. Развязанне незвыродных сістэм метадамі адваротнай матрыцы і Крамэра. Разгледзім прыватны выпадак сістэмы (2.44), менавіта выпадак сістэмы n раўнанняў з n невядомымі:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{array}\right\} \qquad (2.52)$$

Вызначнікам сістэмы (2.52) назавем вызначнік яе матрыцы:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Калі матрыца сістэмы незвыродная ($\Delta \neq 0$), то сістэма (2.52) называецца *незвыроднай*. У процілеглым выпадку яна называецца *звыроднай*.

Разгледзім два метады развязання незвыродных сістэм. Як вядома, сістэму (2.52) можна запісаць у матрычным выглядзе (2.46). Паколькі $|A| \neq 0$, матрыца A мае адзіную адваротную матрыцу A^{-1} (гл. тэарэму 2.7). Памножым матрычнае раўнанне (2.46) злева на матрыцу A^{-1}. Атрымаем роўнасць

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B.$$

З прычыны асацыятыўнасці множання матрыц і таго, што $A^{-1}A=E$, прыходзім да раўнання

$$X=A^{-1}B. \qquad (2.53)$$

Такім чынам, мы атрымалі развязак сістэмы, які запісаны ў матрычным выглядзе. Для знаходжання адваротнай матрыцы A^{-1} можна скарыстаць, напрыклад, роўнасць (2.41), якая дае нам магчымасць запісаць формулу развязка (2.53) у выглядзе

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \qquad (2.54)$$

Падсумоўваючы сказанае, можна сфармуляваць наступнае правіла знаходжання развязка сістэмы *метадам адваротнай матрыцы*. Для развязання сістэмы (2.52) неабходна:

1) высветліць, ці з'яўляецца сістэма незвыроднай;

2) калі для яе $\Delta \neq 0$, знайсці матрыцу A^{-1};

3) згодна з формулай (2.5), знайсці здабытак матрыц у правай частцы роўнасці (2.54);

4) на падставе азначэння роўных матрыц атрымаць развязак

$$x_j = \frac{1}{\Delta}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \dots + A_{nj}b_n), \ j = \overline{1, n}. \qquad (2.55)$$

Метад адваротнай матрыцы для знаходжання развязка сістэмы можна трансфармаваць у *метад Крамэра**. Скарыстаем уласцівасць замены для вызначніка (гл. формулу (2.31)). Тады для сумы, што стаіць у дужках роўнасці (2.55), маем

$$A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \dots + A_{nj}b_n = \Delta_j, \ j = \overline{1, n},$$

дзе Δ_j — вызначнік, які атрымліваецца з асноўнага вызначніка Δ у выніку замены j-га слупка на слупок вольных складнікаў. Такім чынам, мы атрымалі *формулы Крамэра* для знаходжання развязка сістэмы (2.45):

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \ j = \overline{1, n}. \qquad (2.56)$$

Адзначым, што існаванне развязка незвыроднай сістэмы вынікае з тэарэмы Кронэкера — Капэлі. Сапраўды, умова $|A| \neq 0$ азначае, што ранг матрыцы сістэмы роўны n. Разам з тым $r = ([A|B]) \leqslant n$, бо пашыраная матрыца змяшчае n радкоў. Адсюль прыходзім да высновы, што $r(A) = r([A|B]) = n$.

---

* *Крамэр Габрыэль* (Cramer Gabriel, 1704—1752) — швейцарскі матэматык.

На дакончанне сфармулюем

Правіла Крамэра. *Калі вызначнік сістэмы* (2.52) *ненулявы, то сістэма раўнанняў мае адзіны развязак, які можна знайсці па формулах* (2.56).

4°. Даследаванне сістэм лінейных раўнанняў. Даволі частая сітуацыя, калі ў матэматычных даследаваннях і практычных дастасаваннях патрэбна ведаць (без развязання), ці супольная сістэма (2.44), а калі так, колькі развязкаў яна мае. Адказ на першае пытанне дае даказаная вышэй тэарэма Кронэкера — Капэлі. У прыватнасці, для сістэмы (2.52) правіла Крамэра дазваляе сцвярджаць, што гэтая сістэма мае адзіны развязак (калі $\Delta \neq 0$). Пры даследаванні адвольнай супольнай сістэмы карыстаюцца наступнымі дзвюма тэарэмамі.

Тэарэма 2.18. *Калі ранг матрыцы супольнай сістэмы роўны колькасці невядомых, то сістэма мае адзіны развязак.*

□ Няхай для сістэмы (2.44) выконваецца роўнасць $r(A)=r([A|B])=n$. Тады існуе мінор, які з'яўляецца базісным і для матрыцы $[A|B]$, і для матрыцы A. Кожны нябазісны радок матрыцы $[A|B]$ ёсць лінейная камбінацыя n базісных радкоў. З гэтай прычыны сістэма (2.44) эквівалентная сістэме тых n раўнанняў пачатковай сістэмы, у якіх каэфіцыенты пры невядомых утвараюць базісны мінор. Апошняя сістэма ёсць незвыродная сістэма n раўнанняў з n невядомымі. Яна мае адзіны развязак (гл. правіла Крамэра). ■

Тэарэма 2.19. *Калі ранг матрыцы супольнай сістэмы меншы за колькасць невядомых, то сістэма мае бясконцае мноства развязкаў.*

□ Няхай для сістэмы (2.44) выконваецца роўнасць $r(A)=r([A|B])=r$, прычым $r<n$. Будзем лічыць, што элементы базіснага мінора матрыц A і $[A|B]$ размешчаны ў левым верхнім куце матрыцы A (гэтага заўсёды можна дасягнуць, калі раўнанні сістэмы пераставіць і змяніць нумарацыю невядомых):

$$M=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Паколькі кожны нябазісны радок матрыцы $[A|B]$ ёсць лінейная камбінацыя базісных радкоў, то зыходная сістэ-

ма эквівалентная сістэме першых r раўнанняў з n невядомымі:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r+a_{1\,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2r}x_r+a_{2\,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r+a_{r\,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{rn}x_n=b_r. \end{array}\right\} \quad (2.57)$$

Сістэму (2.57) запішам такім чынам, каб у левай частцы кожнага раўнання заставаліся толькі першыя r невядомых. Невядомым x_i, $i=\overline{r+1,\ n}$, нададзім затым адвольныя лікавыя значэнні c_{r+1}, c_{r+2}, ..., c_n і прыйдзем да незвыроднай ($\Delta=M\neq0$) сістэмы r раўнанняў з r невядомымі:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1\,r+1}c_{r+1}-\ldots-a_{1n}c_n,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2\,r+1}c_{r+1}-\ldots-a_{2n}c_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r\,r+1}c_{r+1}-\ldots-a_{rn}c_n. \end{array}\right\} (2.58)$$

Пры фіксаваных адвольных канстантах c_{r+1}, c_{r+2}, ..., c_n сістэма (2.58) мае адзіны развязак $x_1=c_1$, $x_2=c_2$, ..., $x_r=c_r$. Відавочна, што сукупнасць лікаў (c_1, c_2, ..., c_r, c_{r+1}, ..., c_n) ёсць развязак сістэмы (2.57). Паколькі сістэма (2.57) эквівалентная зыходнай сістэме (2.44), то (c_1, c_2, ..., c_r, c_{r+1}, ..., c_n) ёсць таксама развязак сістэмы раўнанняў (2.44). З прычыны адвольнасці лікаў c_{r+1}, c_{r+2}, ..., c_n прыходзім да высновы, што сістэма (2.44) мае бясконцае мноства развязкаў. ■

З а ў в а г а 2.8. Спосабам, які скарыстоўваўся пры доказе тэарэмы 2.19, можна атрымаць усе развязкі сістэмы. Сапраўды, няхай (c'_1, c'_2, ..., c'_r, c'_{r+1}, ..., c'_n) — адвольны развязак сістэмы (2.44). Тады ў якасці c_{r+1}, c_{r+2}, ..., c_n возьмем c'_{r+1}, c'_{r+2}, ..., c'_n адпаведна. Развяжам сістэму раўнанняў (2.58) у дачыненні да x_1, x_2, ..., x_r і атрыманы развязак пазначым (c_1, c_2, ..., c_r). Паколькі $\Delta\neq0$, то відавочна маем $c_i=c'_i$, $i=\overline{1,\ r}$. Такім чынам, мы пабудавалі адвольны наперад зададзены развязак сістэмы (2.57), а значыць, і сістэмы (2.44).

Назавем *базіснымі невядомымі* супольнай сістэмы (ранг матрыцы якой роўны r) тыя r невядомых, каэфіцыенты пры якіх утвараюць базісны мінор. Астатнія невядомыя назавем *вольнымі*. Кожны развязак з бясконцага мноства развязкаў нявызначанай сістэмы назавем *частковым*.

Калі паглядзець на ўсю пададзеную вышэй тэорыю даследавання і развязання сістэм лінейных раўнанняў з гледзішча практычнага дастасавання, атрымаем наступны алгарытм развязання сістэм лінейных раўнанняў.

1. Знайсці $r(A)$ і $r([A|B])$, для чаго здзейсніць элементарныя пераўтварэнні толькі радкоў. Калі $r(A) \neq r([A|B])$, то сістэма несупольная. Гэта і ёсць канчатковы вынік яе развязання.

2. Калі $r(A) = r([A|B]) = r$, то сістэма супольная. Знайсці і зафіксаваць базісны мінор матрыцы сістэмы. Ад зыходнай сістэмы раўнанняў перайсці да эквівалентнай сістэмы тых раўнанняў, якія ў якасці каэфіцыентаў пры невядомых маюць элементы базіснага мінора. Магчымы два выпадкі:

1) калі $r = n$, дзе n — колькасць невядомых, то сістэма мае адзіны развязак, які знаходзяць, напрыклад, з дапамогаю формул Крамэра;

2) калі $r < n$, то сістэма мае бясконцае мноства развязкаў. Для іх знаходжання з апошняй сістэмы выражаюць базісныя невядомыя праз вольныя, напрыклад, з дапамогаю формул Крамэра і такім чынам атрымліваюць *агульны* развязак сістэмы (2.44). Частковы развязак можна атрымаць, калі надаць вольным невядомым адвольныя лікавыя значэнні.

5°. Развязанне сістэм раўнанняў метадам Гаўса. Паводле сваёй сутнасці *метад Гаўса** зводзіцца да паслядоўнага выключэння невядомых у раўнаннях сістэмы (2.44). Для гэтага скарыстоўваюць элементарныя пераўтварэнні радкоў пашыранай матрыцы сістэмы, каб прывесці асноўную матрыцу да трохвугольнага ці трапецыйнага выгляду.

Калі сістэма (2.44) супольная і вызначаная (гл. тэарэмы 2.17 і 2.18), то яе матрыца можа быць зведзена да верхняй трохвугольнай у выніку элементарных пераўтварэнняў радкоў і, магчыма, перастановы слупкоў (каб дасягнуць ненулявых дыяганальных элементаў). Калі сістэма (2.44) супольная і нявызначаная (гл. тэарэмы 2.17 і 2.19), то элементарнымі пераўтварэннямі радкоў і пры неабходнасці перастановай слупкоў можна звесці яе матрыцу да трапецыйнай. Такім чынам, у выніку такіх дзеянняў матрыца $[A|B]$ пераўтворыцца ў эквівалентную матрыцу

---

* *Гаўс Карл Фрыдрых* (Gauss Carl Friedrich, 1777—1855) — нямецкі матэматык.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} & \vline & b_1 \\ 0 & d_{22} & \ldots & d_{2i} & \ldots & d_{2n} & \vline & p_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vline & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & d_{ii} & \ldots & d_{1n} & \vline & p_i \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \vline & p_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vline & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \vline & p_m \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Заўважым, што калі пры пераходзе ад матрыцы $[A|B]$ да матрыцы (2.59) мы вымушаны перастаўляць слупкі, то гэта выклікае перанумарацыю адпаведных невядомых сістэмы. Дзеля вызначанасці будзем лічыць, што мы перайшлі да матрыцы (2.59) толькі ў выніку элементарных пераўтварэнняў радкоў зыходнай матрыцы $[A|B]$. Тады матрыцы (2.59) адпавядае сістэма раўнанняў

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1i}x_1+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ d_{22}x_2+\ldots+d_{2i}x_i+\ldots+d_{2n}x_n&=p_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ d_{ii}x_i+\ldots+d_{in}x_n&=p_i,\\ 0&=p_{i+1},\\ \ldots\ldots&\\ 0&=p_m, \end{aligned}\right\} \quad (2.60)$$

якая эквівалентная зыходнай сістэме (2.44), прычым $a_{11}\neq 0$, $d_{22}\neq 0$, ..., $d_{ii}\neq 0$. Пераход ад сістэмы (2.44) да сістэмы (2.60) называецца *прамым ходам метада Гаўса.*

У дачыненні да сістэмы (2.60) (а значыць, і да (2.44)) магчымы наступныя выпадкі.

1. Сярод лікаў p_{i+1}, p_{i+2}, ..., p_m ёсць хаця б адзін ненулявы. Тады сістэма несупольная. Гэты выпадак адпавядае таму, што $r(A)\neq r([A|B])$.

2. Усе лікі p_{i+1}, p_{i+2}, ..., p_m ёсць нулі. Тады сістэма супольная і ў сістэме (2.60) можна адкінуць апошнія $m-i$ раўнанні. Сістэма (2.60) набудзе адзін з двух выглядаў:

1) калі $i=n$, то яна з'яўляецца трохвугольнай:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ d_{22}x_2+\ldots+d_{2n}x_n&=p_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\\ d_{nn}x_n&=p_n; \end{aligned}\right\} \quad (2.61)$$

2) калі $i<n$, сістэма набывае трапецыйны выгляд:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1i}x_i+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ d_{22}x_2+\ldots+d_{2i}x_i+\ldots+d_{2n}x_n=p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{ii}x_i+\ldots+d_{nn}x_n=p_i. \end{array}\right\} \quad (2.62)$$

Знаходжанне невядомых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з сістэм (2.61) ці (2.62) называецца *зваротным ходам метада Гаўса.*

Сістэма (2.61) (і разам з ёю пачатковая (2.44)) мае адзіны развязак. Для яго пошуку робім наступнае. З апошняга раўнання знаходзім $x_n=p_n/d_{nn}$. Падстаўляем знойдзенае лікавае значэнне замест невядомай x_n у папярэдняе раўнанне і атрымліваем таксама адзінае значэнне невядомай x_{n-1}. Працягваем гэты працэс далей і паслядоўна знаходзім $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$. У выніку будзе знойдзены адзіны развязак сістэмы (2.44).

Засяродзім увагу на тым, што выпадак сістэмы (2.61) адпавядае выкананню роўнасці $r(A)=r([A|B])=n$ для зыходнай сістэмы.

Для сістэмы (2.62) характэрная тая асаблівасць, што колькасць невядомых большая за колькасць раўнанняў. У гэтым выпадку складнікі з невядомымі $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$ пераносім у правы бок раўнанняў. Гэтыя невядомыя будзем лічыць вольнымі. Невядомыя $x_1, x_2, \ldots, x_i$ выступаюць у ролі базісных. Для іх знаходжання трэба ажыццявіць зваротны ход метада Гаўса аналагічна апісанаму вышэй парадку развязання сістэмы (2.61). У выніку гэтага невядомыя $x_1, x_2, \ldots, x_i$ адзіным чынам выразяцца праз невядомыя $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$. Калі вольным невядомым надаваць адвольныя лікавыя значэнні, то можам атрымаць усе развязкі (іх будзе бясконца многа) сістэмы (2.62), а значыць, і сістэмы (2.44).

Заўважым яшчэ, што для сістэмы (2.62) характэрна ўмова $r(A)=r([A|B])<n$, якая і прыводзіць да нявызначанасці сістэмы.

Характэрнай асаблівасцю метаду Гаўса з'яўляецца тое, што ён дае магчымасць не толькі развязаць сістэму, але і папярэдне высветліць яе супольнасць і вызначанасць. Гэтая акалічнасць забяспечвае рацыянальнасць даследавання і развязання сістэм.

6°. Сістэмы аднародных лінейных раўнанняў. Аднародная сістэма раўнанняў

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0\end{array}\right\}\qquad(2.63)$$

ёсць прыватны выпадак сістэмы (2.44). Няцяжка заўважыць, што аднародная сістэма заўсёды мае нулявы развязак $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, што сведчыць пра яе сумясц... пальнасць. Нулявы развязак з'яўляецца адзіным, калі і толькі калі ранг матрыцы сістэмы роўны колькасці невядомых n (гл. тэарэмы 2.18). У прыватнасці, гэта праўдзіцца для незвыроднай сістэмы n раўнанняў з n невядомымі. Калі ранг матрыцы сістэмы (2.63) меншы за колькасць невядомых, то (гл. тэарэму 2.19) для аднароднай сістэмы характэрная наяўнасць ненулявых развязкаў. У якасці выніку з апошняга сцверджання атрымліваем наступнае: аднародная сістэма n лінейных раўнанняў з n невядомымі мае ненулявыя развязкі ў тым выпадку, калі яна звыродная.

Няхай $C_1=(c_1^1, c_2^1, \ldots, c_n^1)$, $C_2=(c_1^2, c_2^2, \ldots, c_n^2)$, $\ldots$, $C_k=(c_1^k, c_2^k, \ldots, c_n^k)$, $k\in\mathbf{N}$,— развязкі сістэмы (2.63). Пад *здабыткам развязка* C_i *і ліку* λ будзем разумець сукупнасць лікаў $\lambda C_i=(\lambda c_1^i, \lambda c_2^i, \ldots, \lambda c_n^i)$.

Сумай двух развязкаў C_i і C_j, $i, j\in\mathbf{N}$, называецца сукупнасць лікаў $C_i+C_j=(c_1^i+c_1^j, c_2^i+c_2^j, \ldots, c_n^i+c_n^j)$. Сума выгляду $\alpha_1C_1+\alpha_2C_2+\ldots+\alpha_kC_k$, $k\in\mathbf{N}$, дзе каэфіцыенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — некаторыя лікі, называецца *лінейнай камбінацыяй развязкаў* $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

Тэарэма 2.20. *Адвольная лінейная камбінацыя развязкаў аднароднай сістэмы лінейных раўнанняў ёсць развязак гэтай сістэмы.*

□ Доказ здзейснім на прыкладзе i-га раўнання сістэмы (2.57), $i=\overline{1, m}$. Маем:

$$a_{i1}(\alpha_1c_1^1+\alpha_2c_1^2+\ldots+\alpha_kc_1^k)+a_{i2}(\alpha_1c_2^1+\alpha_2c_2^2+\ldots+\alpha_kc_2^k)+$$
$$+\ldots+a_{in}(\alpha_1c_n^1+\alpha_2c_n^2+\ldots+\alpha_kc_n^k)=$$
$$=\alpha_1(a_{i1}c_1^1+a_{i2}c_2^1+\ldots+a_{in}c_n^1)+\alpha_2(a_{i1}c_1^2+a_{i2}c_2^2+\ldots+$$
$$+a_{in}c_n^2)+\ldots+\alpha_k(a_{i1}c_1^k+a_{i2}c_2^k+\ldots+a_{in}c_n^k)=$$
$$=\alpha_1\cdot 0+\alpha_2\cdot 0+\ldots+\alpha_k\cdot 0=0. \blacksquare$$

Развязкі $C_1=(c_1^1, c_2^1, \ldots, c_n^1)$, $C_2=(c_1^2, c_2^2, \ldots, c_n^2)$, $\ldots$, $C_k=(c_1^k, c_2^k, \ldots, c_n^k)$ аднароднай сістэмы (2.63) называюцца *лінейна залежнымі*, калі радкі матрыцы

$$\begin{bmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^k & c_2^k & \dots & c_n^k \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

ёсць лінейна залежныя. У процілеглым выпадку развязкі называюцца *лінейна незалежнымі*.

Лагічна высветліць далей, ці існуюць у бясконцым мностве развязкаў сістэмы (2.63) лінейна незалежныя развязкі. Адказ на гэтае пытанне дае наступная

Тэарэма 2.21. *Няхай ранг r матрыцы аднароднай сістэмы раўнанняў меншы за колькасць невядомых n. Тады існуе $n-r$ лінейна незалежных развязкаў $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ гэтай сістэмы; кожны развязак аднароднай сістэмы ёсць лінейная камбінацыя развязкаў $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$.*

□ Дзеля вызначанасці будзем лічыць, што базісны мінор M r-га парадку знаходзіцца ў левым верхнім куце матрыцы сістэмы:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Перанясем складнікі з невядомымі $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ у правы бок раўнанняў і будзем лічыць гэтыя невядомыя вольнымі. Атрымаем сістэму

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = -a_{2\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{r\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{array}\right\} \quad (2.65)$$

Паколькі $M \neq 0$, сістэма (2.65) будзе мець развязак, які можна знайсці, напрыклад, па формулах Крамэра. Відавочна, што развязак залежыць ад $n-r$ вольных невядомых $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ і мае выгляд

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = c_1^1 x_{r+1} + c_1^2 x_{r+2} + \dots + c_1^{n-r} x_n, \\ x_2 = c_2^1 x_{r+1} + c_2^2 x_{r+2} + \dots + c_2^{n-r} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = c_r^1 x_{r+1} + c_r^2 x_{r+2} + \dots + c_r^{n-r} x_n, \end{array}\right\} \quad (2.66)$$

дзе c_i^j $(i=\overline{1, r},\ j=\overline{1, n-r})$ — пэўныя лікавыя каэфіцыенты.

У якасці значэнняў вольных невядомых разгледзім паслядоўна наступныя $n-r$ сукупнасцяў лікаў:

1) $x_{r+1}=1,\ x_{r+2}=0,\ \ldots,\ x_n=0;$
2) $x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=1,\ \ldots,\ x_n=0;$
. . . .
$n-r$) $x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=0,\ \ldots,\ x_n=1.$

Кожнаму з гэтых набораў значэнняў адпавядае свой развязак сістэмы (2.65). Выходзячы з роўнасцяў (2.66), мы атрымліваем наступныя $n-r$ развязкаў:

$$\begin{gathered}C_1=(c_1^1,\ c_2^1,\ \ldots,\ c_r^1,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\\ C_2=(c_1^2,\ c_2^2,\ \ldots,\ c_r^2,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_{n-r}=(c_1^{n-r},\ c_2^{n-r},\ \ldots,\ c_r^{n-r},\ 0,\ 0,\ \ldots\ 1).\end{gathered} \tag{2.67}$$

Развязкі (2.67) лінейна незалежныя, бо матрыца, якую можна запісаць у адпаведнасці з матрыцай (2.64) для развязкаў (2.67), мае ненулявы мінор парадку $n-r$ (апошнія $n-r$ слупкоў). З гэтай прычыны радкі C_1, $C_2, \ldots, C_{n-r}$ дадзенай матрыцы ёсць базісныя, а значыць, лінейна незалежныя (гл. тэарэму 2.15). Існаванне $n-r$ лінейна незалежных развязкаў даказана.

Адвольны развязак сістэмы (2.65) (і (2.63)) атрымліваем, калі нададзім невядомым $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ адвольныя лікавыя значэнні $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ адпаведна. Згодна з роўнасцямі (2.66), атрымаем развязак

$$\left.\begin{array}{l}x_1^0=c_1^1\alpha_1+c_1^2\alpha_2+\ldots+c_1^{n-r}\alpha_{n-r},\\ x_2^0=c_2^1\alpha_1+c_2^2\alpha_2+\ldots+c_2^{n-r}\alpha_{n-r},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_r^0=c_r^1\alpha_1+c_r^2\alpha_2+\ldots+c_r^{n-r}\alpha_{n-r}.\end{array}\right\}$$

Няцяжка заўважыць, што ў дадзеным выпадку развязак $C=(x_1^0,\ x_2^0, \ldots,\ x_r^0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n-r})$ ёсць лінейная камбінацыя развязкаў (2.67):

$$C=\alpha_1C_1+\alpha_2C_2+\ldots+\alpha_{n-r}C_{n-r}. \tag{2.68}$$

Тэарэма даказана. ■

Вынік 1. *Максімальная колькасць лінейна незалежных развязкаў аднароднай сістэмы роўная $n-r$, дзе n —*

колькасць невядомых; r — ранг матрыцы сістэмы.

Азначым яшчэ адно паняцце.

Азначэнне 2.8. *Сукупнасць максімальнай колькасці лінейна незалежных развязкаў аднароднай сістэмы лінейных раўнанняў называецца фундаментальнай сістэмай развязкаў.*

У адпаведнасці з азначэннем 2.8 сукупнасць (2.67) ёсць фундаментальная сістэма развязкаў для аднароднай сістэмы раўнанняў (2.63).

Заўважым, што пры пабудове фундаментальнай сістэмы развязкаў (2.67) вольным невядомым мы надавалі $n-r$ сукупнасцяў значэнняў па радках адзінкавай матрыцы E_{n-r}. Доказ тэарэмы можна ажыццявіць і ў больш агульнай сітуацыі, калі надаць вольным невядомым значэнні па радках адвольнай незвыроднай матрыцы парадку $n-r$. Атрыманая такім чынам з сістэмы (2.66) сукупнасць развязкаў C_1', C_2', ..., C_{n-r}' таксама з'яўляецца фундаментальнай сістэмай развязкаў. У адпаведнасці з гэтым можна сфармуляваць наступны вынік з тэарэмы 2.21.

Вынік 2. *Адвольны развязак аднароднай сістэмы лінейных раўнанняў ёсць лінейная камбінацыя развязкаў фундаментальнай сістэмы:*

$$C=\alpha_1C_1'+\alpha_2C_2'+\ldots+\alpha_{n-r}C_{n-r}', \qquad (2.69)$$

дзе α_1, α_2, ..., α_{n-r} — адвольныя лікі.

Адзначым, што развязак аднароднай сістэмы, вызначаны роўнасцю (2.69), называецца *агульным.* Кожны развязак, які атрымліваецца з роўнасці (2.69) пры канкрэтных значэннях лікавых каэфіцыентаў α_i, $i=\overline{1, n-r}$, называецца *частковым.*

На практыцы пры развязанні аднародных сістэм лінейных раўнанняў у якасці значэнняў вольных невядомых выбіраюць, як правіла, значэнні па радках адзінкавай матрыцы, паколькі гэта найменш працаёмісты спосаб вылічэння. У выніку прыходзяць да сістэмы развязкаў выгляду (2.67), якую называюць яшчэ *ўнармаванай фундаментальнай сістэмай развязкаў.* У гэтым разе агульны развязак зададзенай сістэмы раўнанняў запісваюць у выглядзе (2.68).

Вернемся да неаднароднай сістэмы (2.44). Назавем аднародную сістэму (2.63) *адпаведнай для неаднароднай сістэмы,* калі яна атрымліваецца з сістэмы (2.44) заменай вольных складнікаў b_1, b_2, ..., b_m нулямі.

Разгледзім супольную сістэму (2.44), у якой $r<n$, дзе r — ранг яе матрыцы; n — колькасць невядомых. У гэтым выпадку (гл. тэарэму 2.19) сістэма (2.44) з'яўляецца нявызначанай, як і адпаведная ёй сістэма (2.63). Высветлім сувязь паміж развязкамі неаднароднай і адпаведнай ёй аднароднай сістэм.

Тэарэма 2.22. *Кожны развязак нявызначанай неаднароднай сістэмы лінейных раўнанняў ёсць сума пэўнага часткавага развязка гэтай сістэмы і агульнага развязка адпаведнай аднароднай сістэмы.*

□ Няхай X_0 — пэўны часткавы развязак сістэмы (2.44), а $C=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_r^0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ — агульны развязак адпаведнай сістэмы (2.63). Для доказу скарыстаем запіс сістэм у матрычным выглядзе.

Матрыца X_0^T задавальняе раўнанне $AX=B$, а матрыца C^T — раўнанне $AX=O$. Згодна з дыстрыбутыўнасцю множання матрыц, маем:

$$A(X_0^T+C^T)=AX_0^T+AC^T=B+O=B.$$

Мы даказалі, што сума развязкаў X_0 і C ёсць развязак сістэмы (2.44).

Няхай X — адвольны развязак сістэмы (2.44). Тады

$$O=B-B=AX^T-AX_0^T=A(X^T-X_0^T).$$

З апошняй роўнасці прыходзім да высновы, што $X^T-X_0^T$ ёсць развязак аднароднай сістэмы (2.63), г. зн. $X-X_0=$ $=C$, ці $X=X_0+C$. ■

З тэарэмы 2.22 і формулы (2.69) атрымліваем яшчэ адзін

Метад знаходжання агульнага развязка X нявызначанай неаднароднай сістэмы (2.44). *Агульны развязак задаецца формулай*

$$X=X_0+\alpha_1C_1+\alpha_2C_2+\ldots+\alpha_{n-r}C_r,$$

дзе $C_1, C_2, \ldots, C_r$ — фундаментальная сістэма развязкаў адпаведнай аднароднай сістэмы; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}\in\mathbf{R}$; X_0 — адвольны часткавы развязак сістэмы (2.44).

3. ВЕКТАРНАЯ АЛГЕБРА

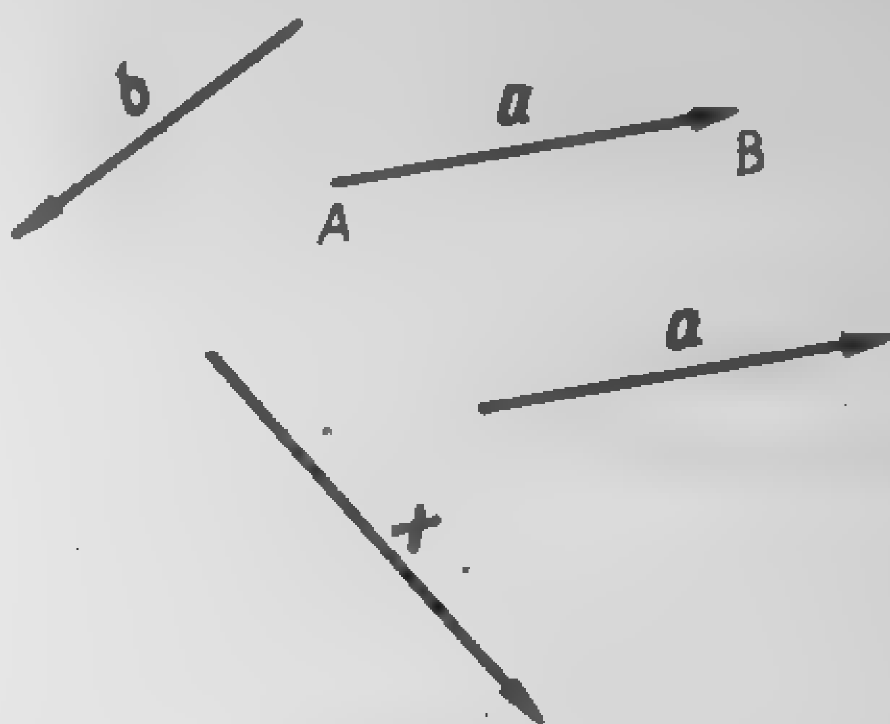
У матэматыцы і яе дастасаваннях адрозніваюць велічыні скалярныя і вектарныя. Прапанаваны раздзел прысвечаны вывучэнню вектарных велічынь і дзеянняў з імі.

3.1. ВЕКТАРЫ І ЛІНЕЙНЫЯ АПЕРАЦЫІ З ІМІ. ПРАЕКЦЫЯ

1°. Паняцце вектара. *Скалярная велічыня (скаляр)* вызначаецца толькі лікам, які паказвае, колькі пэўных адзінак вымярэння характарызуе дадзеную велічыню. Скалярнымі велічынямі з'яўляюцца, напрыклад, плошча, аб'ём, тэмпература, маса, работа. Велічыні, якія характарызуюцца не толькі лікам, але і кірункам, называюцца *вектарнымі.* У якасці прыкладаў з фізікі можна нагадаць хуткасць, паскарэнне, сілу і інш. Калі выбраны пэўны маштаб, выяўленнем вектарнай велічыні на плоскасці ці ў прасторы можна лічыць накіраваны адрэзак.

Накіраваным адрэзкам называюць адрэзак пэўнай даўжыні і пэўнага кірунку. Накіраваны адрэзак з фіксаванымі пачаткам A і канцом B называецца *звязаным вектарам* і абазначаецца $\overrightarrow{AB}$. Відавочна, што даўжыня і кірунак такога накіраванага адрэзка (звязанага вектара) поўнасцю вызначаюцца месцазнаходжаннем і парадкаваннем пунктаў A і B. Калі для накіраванага адрэзка фіксуецца толькі даўжыня і кірунак (пры адвольнасці яго становішча ў прасторы), то ён называецца *свабодным вектарам.* Свабодны вектар, такім чынам, мае права свабодна перамяшчацца ў прасторы паралельна сам сабе. Для абазначэння свабодных вектараў (а таксама звязаных, калі няма неабходнасці пазначаць іх пачатак і канец) ужываюць малыя літары лацінскага алфавіту, надрукаваныя тлустым шрыфтам, напрыклад **a**, **b**, **x**, ..., ці літары з рыскай або стрэлкай зверху: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{x}$, ...;

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, ... Геаметрычнае выяўленне вектараў пададзена на рыс. 3.1.



Рыс. 3.1

Даўжынёй звязанага вектара $\overrightarrow{AB}$ *(модулем, нормай)* назавем адлегласць паміж пунктамі A, B і абазначым $|\overrightarrow{AB}|$. Запіс $|\mathbf{a}|$ таксама абазначае даўжыню (звязанага ці свабоднага) вектара **a**, якую знаходзяць як даўжыню адпаведна накіраванага адрэзка. Для вектараў не маюць месца паняцці «большы», «меншы». Можна параўноўваць у гэтым сэнсе толькі іх модулі.

Вектар, пачатак і канец якога супадаюць, называецца *нулявым* і абазначаецца **0**. Ён мае адвольны кірунак і для яго $|\mathbf{0}|=0$. *Адзінкавым* ці *ўнармаваным* назавем вектар, даўжыня якога роўная адзінцы. Часцей за ўсё адзінкавы вектар абазначаецца літарай **e**.

Кажуць, што два ненулявыя вектары **a**, **b** ёсць *калініярныя*, калі яны паралельныя адной і той жа прамой, і пішуць $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$ (некалініярнасць абазначаюць $\mathbf{a}\nparallel\mathbf{b}$).

Няхай зададзены два звязаныя вектары $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, прычым $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$. Правядзем плоскасць такім чынам, каб пункты A і C ляжалі на ёй, а B і D не ляжалі. Калі здарыцца так, што пункты B і D ляжаць у адной паўпрасторы ў дачыненні да плоскасці, то будзем называць $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ *аднолькава накіраванымі* ($\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$); калі B і D знаходзяцца ў розных паўпрасторах,— то *процілегла накіраванымі* ($\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$). Няхай цяпер ненулявыя вектары $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ ляжаць на адной прамой. Калі існуе ненулявы вектар, які аднолькава накіраваны з вектарамі $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$,

то будзем лічыць, што $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$; у процілеглым выпадку — $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

Два вектары **a**, **b** называюцца *роўнымі* (**a**=**b**), калі яны аднолькава накіраваныя і маюць роўныя модулі:

$$(\mathbf{a}=\mathbf{b}) \Leftrightarrow ((\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}) \wedge (|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|)).$$

З азначэння роўных вектараў вынікае, што, які б ні быў свабодны вектар **a** і пункт A, можна пабудаваць адзіны звязаны вектар $\overrightarrow{AB}$ з пачаткам у пункце A, такі, што $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$. У гэтым разе кажуць, што *можна перанесці свабодны вектар* **a** *у пункт* A (гл. рыс. 3.1).

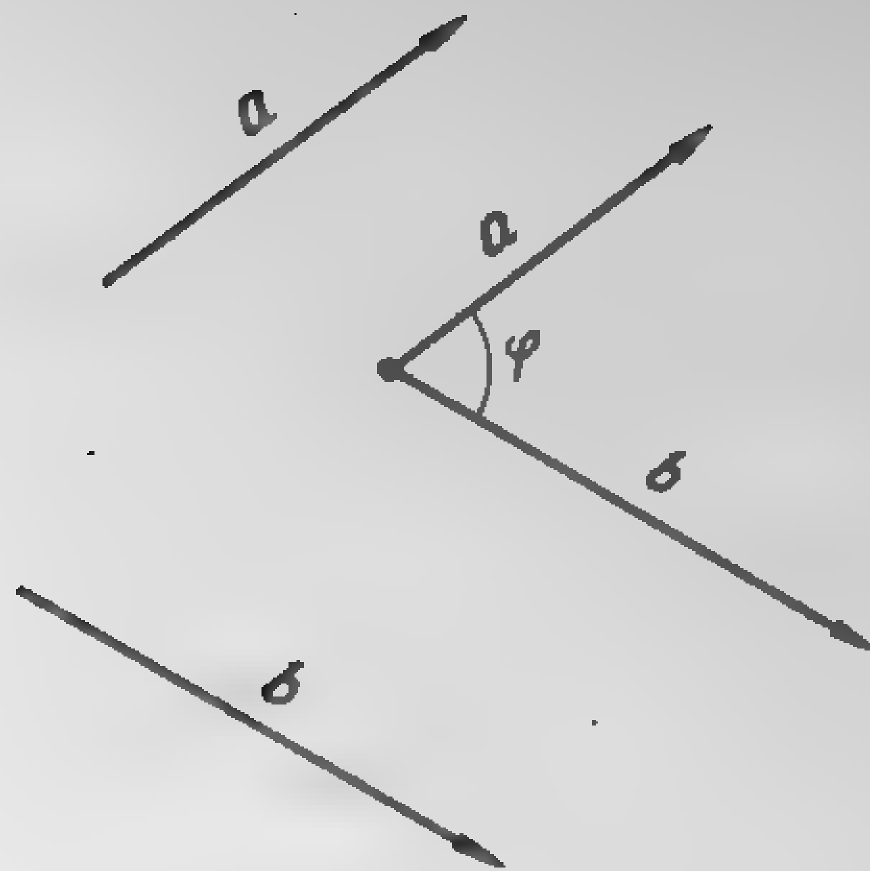
Заўважым, што ў некаторых раздзелах фізікі на паняцце вектара таксама накладваюцца розныя абмежаванні. Напрыклад, пры развязанні фізічных задач, што тычацца абарачальнага руху цвёрдага цела, вектар лінейнай хуткасці $\overrightarrow{AB}$ вызначанага матэрыяльнага пункта A нельга перамяшчаць. Такі вектар лічаць звязаным і пункт A называюць пунктам замацавання. Разам з гэтым шырока скарыстоўваюцца і свабодныя вектары, напрыклад пры развязанні задачы знаходжання імпульса сістэмы матэрыяльных пунктаў, рух якіх не абмежаваны ў прасторы.

У матэматычнай тэорыі, якая прапануецца чытачу ў межах нашага падручніка, пад *вектарам* усюды далей будзем разумець свабодны вектар, а запіс $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ будзе азначаць, што вектар **a** заняў становішча звязанага вектара $\overrightarrow{AB}$.

Разгледзім яшчэ два паняцці, якія шырока скарыстоўваюцца ў вектарнай алгебры.

Вектары **a**, **b**, **c** дамовімся называць *кампланарнымі*, калі існуе плоскасць, якой усе яны паралельныя. Будзем лічыць, што нулявы вектар калініярны з усякім вектарам і кампланарны з усякімі двума.

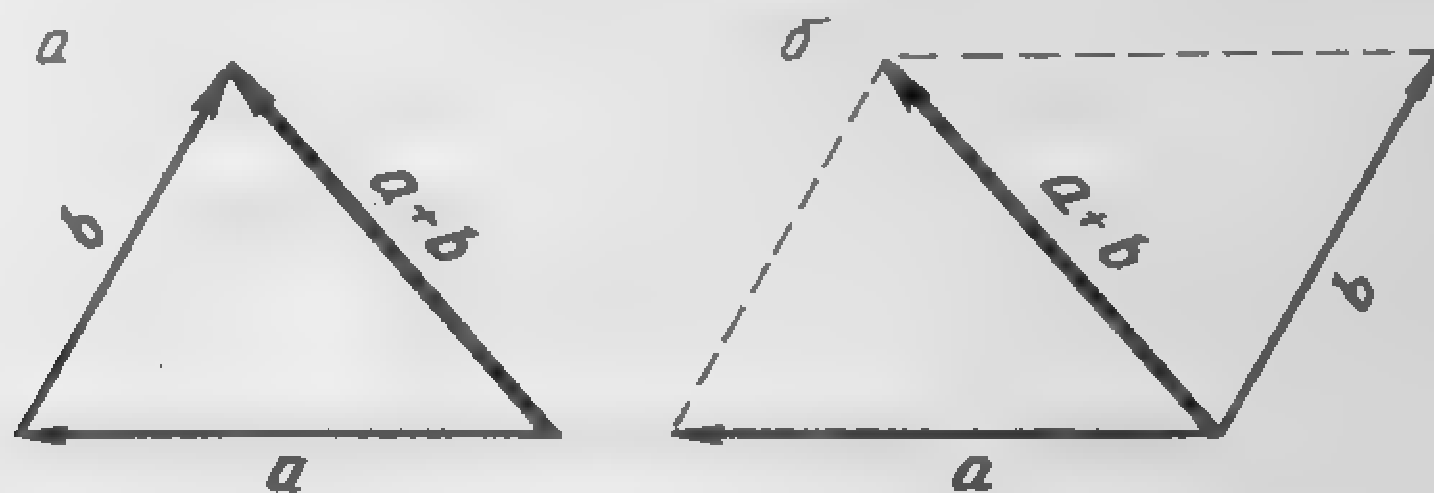
Вуглом паміж вектарамі **a** *і* **b** будзем называць найменшы вугал, на які трэба павярнуць вектар **a**, каб яго кірунак супаў з кірункам вектара **b**, пры ўмове, што вектары аднесены да агульнага пачатку (рыс. 3.2). Вугал абазначым $\varphi=(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$. Відавочна, што $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Калі $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=\pi/2$, то вектары называюцца *артаганальнымі*. Будзем лічыць, што **0** артаганальны кожнаму вектару.



Рыс. 3.2

2°. Лінейныя аперацыі з вектарамі. Вектары можна складаць, адымаць, множыць на лік. Гэтыя аперацыі называюцца *лінейнымі.*

Калі вектары $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ не калініярныя, то іх суму $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ можна знайсці паводле *правіла трохвугольніка* (рыс. 3.3, *а*) або *правіла паралелаграма* (рыс. 3.3, *б*) у залежнасці ад таго, як размясціць іх пачаткі і канцы.



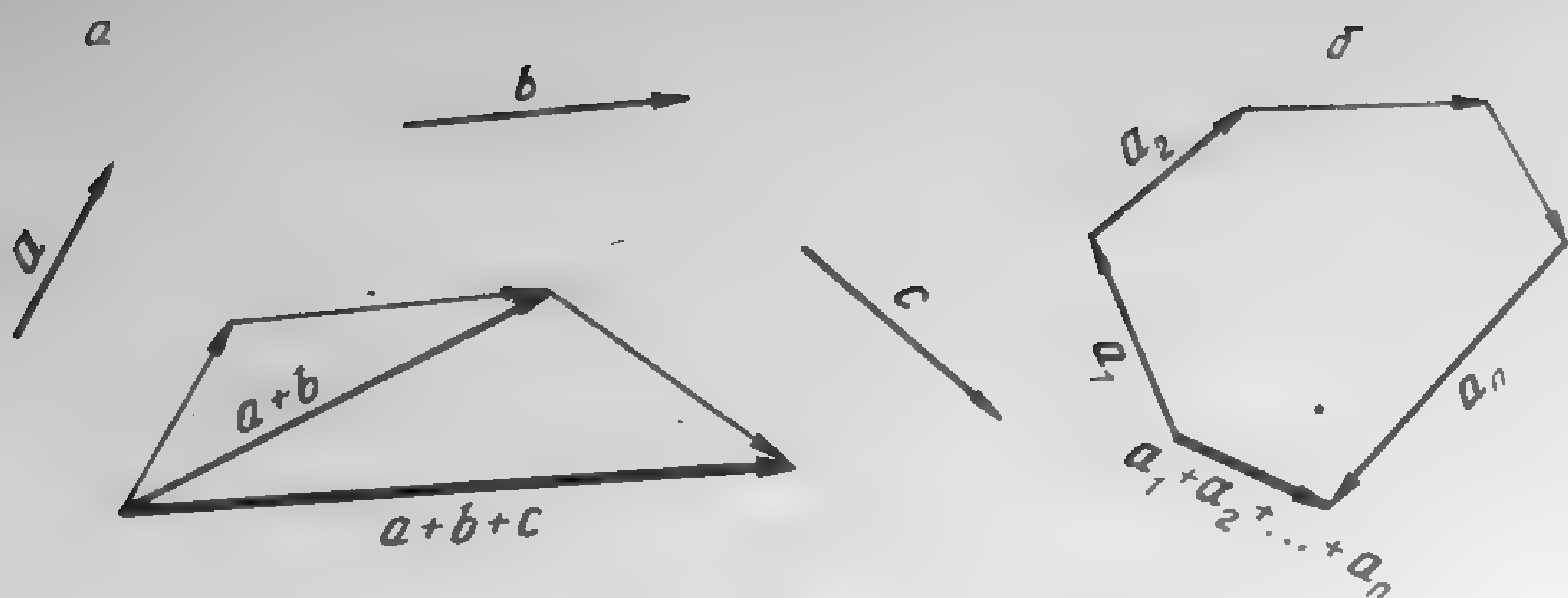
Рыс. 3.3

У задачах механікі часта даводзіцца выконваць аперацыі з вектарнымі велічынямі, якія супадаюць з азначанай аперацыяй складання. Напрыклад, дзве сілы $\mathbf{f}_1$ і $\mathbf{f}_2$, што дзейнічаюць у матэрыяльным пункце пад вуглом, замяняюць адной сілай $\mathbf{f}$, якая супадае па кірунку і даўжыні з дыяганаллю паралелаграма, пабудаванага на сілах $\mathbf{f}_1$ і $\mathbf{f}_2$. Гэта азначае, што $\mathbf{f}$ у дадзеным выпадку супадае з сумай вектараў: $\mathbf{f}=\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2$.

У якасці сумы трох вектараў $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ будзем разумець вектар, які атрымліваецца ў выніку паслядоўнага складання (рыс. 3.4, *а*):

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}\overset{\text{def}}{=}(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}.$$

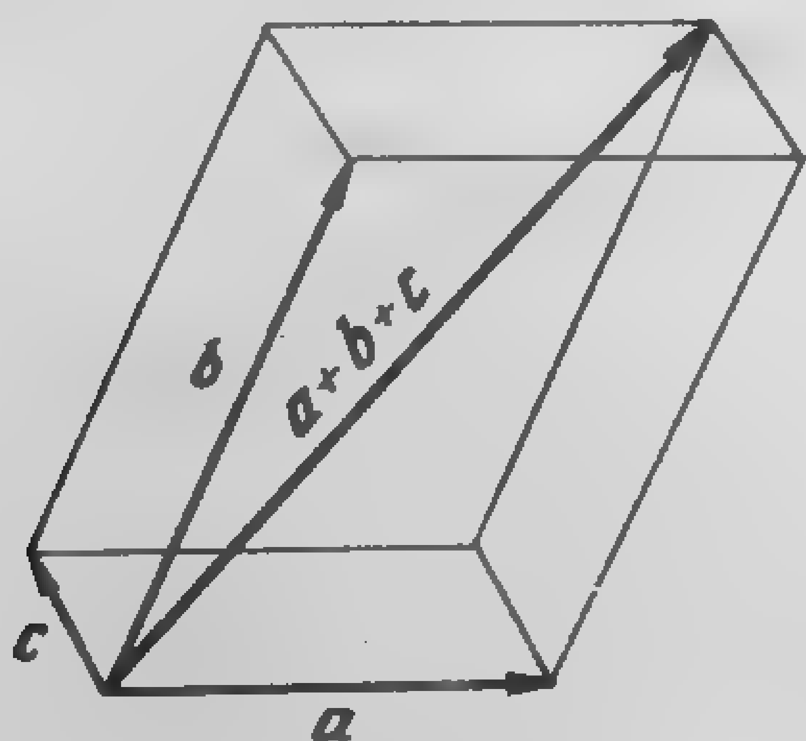
Сумай адвольнай канечнай колькасці вектараў $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ натуральна лічыць вектар $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n$, які замыкае ламаную лінію, утвораную зададзенымі векта-



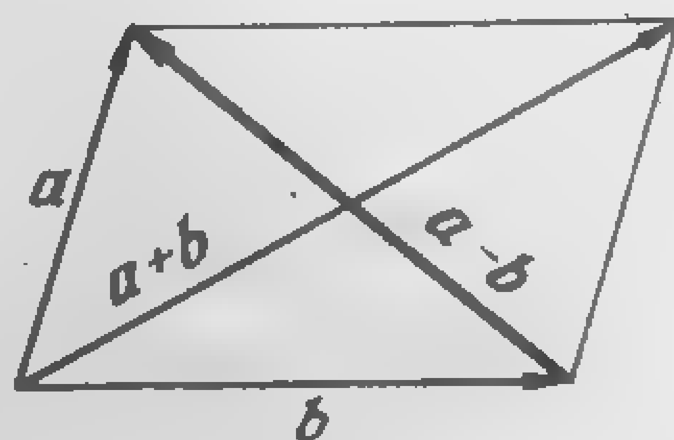
Рыс. 3.4

рамі (рыс. 3.4, *б*). Суму трох некампланарных вектараў можна знайсці таксама паводле *правіла паралелепіпеда*, калі сумясціць іх пачаткі (рыс. 3.5).

Вектар **—a** называецца *процілеглым* для вектара **a**, калі **—a**, **a** накіраваныя процілегла і $|-\mathbf{a}|=|\mathbf{a}|$. Скарыстоўваючы паняцце процілеглага вектара, можна азначыць аперацыю адымання вектараў. *Розніцай вектараў* **a** і **b** называецца вектар **a—b**, які з'яўляецца сумай вектараў **a** і **—b** (рыс. 3.6).



Рыс. 3.5



Рыс. 3.6

На падставе азначэнняў няцяжка пераканацца, што *для сумы і розніцы адвольных вектараў* **a**, **b**, **c** *маюць месца ўласцівасці, аналагічныя ўласцівасцям гэтых аперацый для лікаў:*

1) *для* **a** і **b** *існуе адзіны вектар* **a+b**;

2) **a+b=b+a** — *камутатыўнасць складання;*

3) **(a+b)+c=a+(b+c)** — *асацыятыўнасць складання;*

4) **a+0=a**;

5) **a+(—a)=0**.

Здабыткам вектара **b** *і ліку* α назавем такі вектар α**b**, што:

1) $|\alpha\mathbf{b}|=|\alpha||\mathbf{b}|$;

2) $\alpha\mathbf{b}$ *аднолькава накіраваны з* $\mathbf{b}$, *калі* $\alpha>0$, *і процілегла — калі* $\alpha<0$;

3) $0\cdot\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

Для множання адвольных вектараў $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *на лік справядлівыя наступныя ўласцівасці:*

1) *для вектара* $\mathbf{a}$ *і ліку* α, $\alpha\in\mathbf{R}$, *існуе адзіны вектар* $\alpha\mathbf{a}$;

2) $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$;

3) $\alpha\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $\alpha\in\mathbf{R}$;

4) $\alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a}$, $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$,— *асацыятыўнасць множання на лік;*

5) $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$, $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$,— *дыстрыбутыўнасць у дачыненні да сумы лікаў;*

6) $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$, $\alpha\in\mathbf{R}$,— *дыстрыбутыўнасць у дачыненні да сумы вектараў.*

☐ Уласцівасці 1—3 вынікаюць з азначэння аперацыі множання на лік. Для доказу роўнасці 4 заўважым, што вектары $\alpha(\beta\mathbf{a})$ і $(\alpha\beta)\mathbf{a}$ маюць аднолькавыя даўжыні, паколькі

$$|\alpha(\beta\mathbf{a})|=|\alpha||\beta\mathbf{a}|=|\alpha||\beta||\mathbf{a}|,$$
$$|(\alpha\beta)\mathbf{a}|=|\alpha\beta||\mathbf{a}|=|\alpha||\beta||\mathbf{a}|.$$

Яны аднолькава накіраваныя, бо іх кірунак у дачыненні да кірунку вектара $\mathbf{a}$ вызначаецца знакам аднаго і таго ж здабытку $\alpha\beta$.

Для доказу ўласцівасці 5 дапусцім спачатку, што $\alpha\beta>0$ (лікі α і β аднаго знаку). Тады

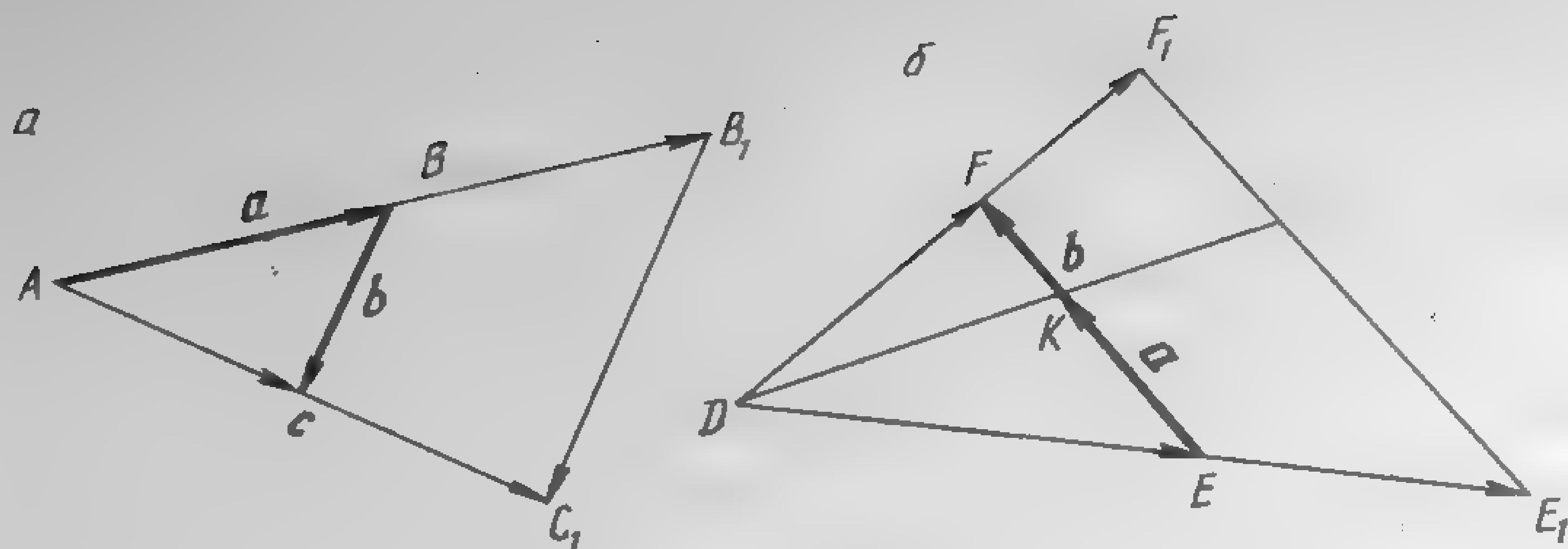
$$|\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}|=|\alpha\mathbf{a}|+|\beta\mathbf{a}|=|\alpha||\mathbf{a}|+|\beta||\mathbf{a}|=$$
$$=(|\alpha|+|\beta|)|\mathbf{a}|=|\alpha+\beta||\mathbf{a}|=|(\alpha+\beta)\mathbf{a}|.$$

Значыць, вектары ў правай і левай частцы роўнасці 5 маюць аднолькавую даўжыню. Акрамя таго, яны аднолькава накіраваныя. Дапусцім цяпер, што $\alpha\beta<0$ і, напрыклад, $|\beta|>|\alpha|$. З гэтага вынікае, што $\alpha+\beta$ і $-\alpha$ маюць аднолькавыя знакі. Грунтуючыся на даказаным,

$$(\alpha+\beta)\mathbf{a}+(-\alpha)\mathbf{a}=(\alpha+\beta-\alpha)\mathbf{a}=\beta\mathbf{a},$$

адкуль прыходзім да высновы, што дыстрыбутыўнасць у дачыненні да сумы лікаў праўдзіцца.

Дакажам уласцівасць 6. Няхай $\alpha>0$. Калі $\mathbf{a}\nparallel\mathbf{b}$, то гэтая роўнасць вынікае з падабенства трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ (рыс. 3.7, *а*), дзе $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$;



Рыс. 3.7

$\overrightarrow{AB_1} = \alpha\mathbf{a}$; $\overrightarrow{AC_1} = \alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})$; $\overrightarrow{B_1C_1} = \alpha\mathbf{b}$.

Калі $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$, то справядлівасць уласцівасці 6 гарантуецца падабенствам трохвугольнікаў DEF і DE_1F_1 (рыс. 3.7, *б*), дзе $\overrightarrow{EK} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{KF} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{DE_1} = \alpha\overrightarrow{DE}$. Пры $\alpha < 0$ сцверджанне 6 даказваецца аналагічна, а пры $\alpha = 0$ яно відавочнае. ■

Адзначым, што процілеглы для **a** вектар **—a** можна разглядаць як вектар $(-1)\mathbf{a}$.

Скарыстоўваючы дзеянне множання на лік, можна таксама нармаваць усякі ненулявы вектар **a**, у выніку чаго атрымліваем адзінкавы вектар $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, які накіраваны аднолькава з вектарам **a**.

Дзякуючы ўвядзенню аперацыі множання на лік, можна вызначыць неабходную і дастатковую ўмовы калініярнасці вектараў.

Тэарэма 3.1. *Два вектары* **a** *і* **b** $(\mathbf{a}\neq 0,\ \mathbf{b}\neq 0)$ *ёсць калініярныя, калі і толькі калі існуе рэчаісны лік* α $(\alpha\neq 0)$, *што*

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}. \tag{3.1}$$

□ Неабходнасць. Дапусцім спачатку, што **a** і **b** накіраваныя аднолькава. Тады маюць месца роўнасці $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}$ і $\mathbf{e} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$. Падставім у першую роўнасць замест вектара **e** яго выраз з другой роўнасці. Атрымаем

$$\mathbf{a} = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b}.$$

Калі выбраць $\alpha = |\mathbf{a}|/|\mathbf{b}|$, то з апошняй роўнасці вынікае (3.1).

Магчымы і другі выпадак: вектары **a** і **b** накіраваныя процілегла. Тады

$$\mathbf{a} = -\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b},$$

а калі абазначыць $\alpha = -|\mathbf{a}|/|\mathbf{b}|$, то мы таксама атрымаем роўнасць (3.1).

Дастатковасць. Няхай мае месца формула (3.1). Тады, згодна з азначэннем здабытку вектара і ліку, з гэтай роўнасці вынікае, што $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$. ■

3°. Праекцыя вектара. Прамую L будзем называць *воссю,* калі на ёй зададзены кірунак. *Вуглом паміж вектарам* **a** *і воссю* L (паміж дзвюма восямі L_1 і L) назавем найменшы вугал φ, на які трэба павярнуць вектар **a** (вось L_1), каб яго (яе) кірунак супаў з кірункам восі L. Відавочна, што гэта азначэнне адпавядае раней пададзенаму азначэнню вугла паміж вектарамі. Па аналогіі абазначым $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, L})$ (ці $\varphi = \widehat{L_1, L}$)).

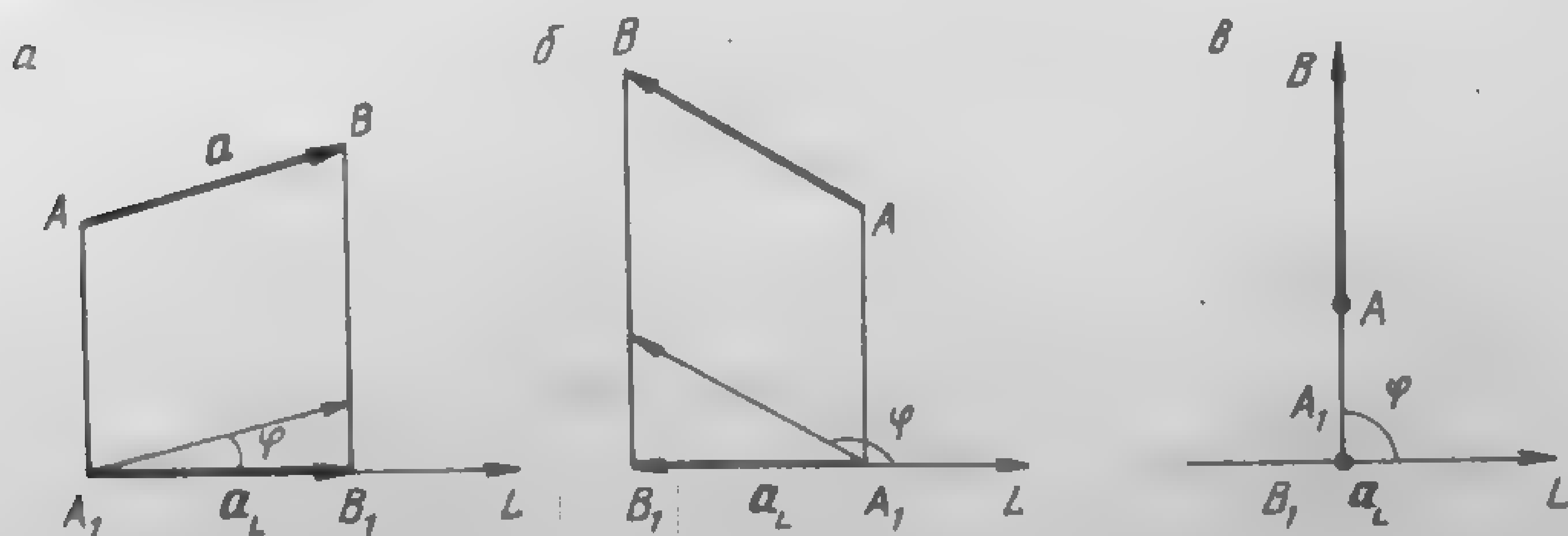
Разгледзім пэўны вектар $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ і пэўную вось L. З дапамогаю перпендыкуляра спраектуем пачатак і канец вектара $\overrightarrow{AB}$ на вось L. Атрымаем адпаведна пункты A_1, B_1 і можам разглядаць вектар $\mathbf{a}_L = \overrightarrow{A_1B_1}$, які назавем *геаметрычнай праекцыяй вектара* **a** *на вось* L. Калі на восі вызначаны маштаб, то можна азначыць наступнае паняцце.

Азначэнне 3.1. *Алгебраічнай праекцыяй вектара* **a** *на вось* L *называецца даўжыня геаметрычнай праекцыі* $\mathbf{a}_L$, *якая бярэцца са знакам «плюс», калі кірунак вектара* $\mathbf{a}_L$ *супадае з кірункам восі* L, *і са знакам «мінус», калі кірункі вектара* $\mathbf{a}_L$ *і восі* L *процілеглыя.*

Алгебраічную праекцыю вектара **a** на вось L абазначым $P_L(\mathbf{a})$.

У далейшым мы будзем разглядаць толькі алгебраічныя праекцыі, якія будзем называць проста *праекцыямі.*

Такім чынам, праекцыяй вектара на вось з'яўляецца пэўны лік (не вектар!). Магчымы выпадкі: $P_L(\mathbf{a})>0$ (рыс. 3.8, *а*), $P_L(\mathbf{a})<0$ (рыс. 3.8, *б*), $P_L(\mathbf{a})=0$ (рыс. 3.8, *в*).



Рыс. 3.8

З азначэння 3.1 вынікае, што для алгебраічнай праекцыі праўдзіцца роўнасць

$$P_L(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}| \cos \varphi, \tag{3.2}$$

а для геаметрычнай —

$$\mathbf{a}_L = P_L(\mathbf{a})\mathbf{e}, \tag{3.3}$$

дзе $\mathbf{e}$ — адзінкавы вектар, які адпавядае кірунку восі L. Улічваючы гэтыя дзве роўнасці, атрымліваем

$$\mathbf{a}_L = |\mathbf{a}| \cos \varphi \cdot \mathbf{e}.$$

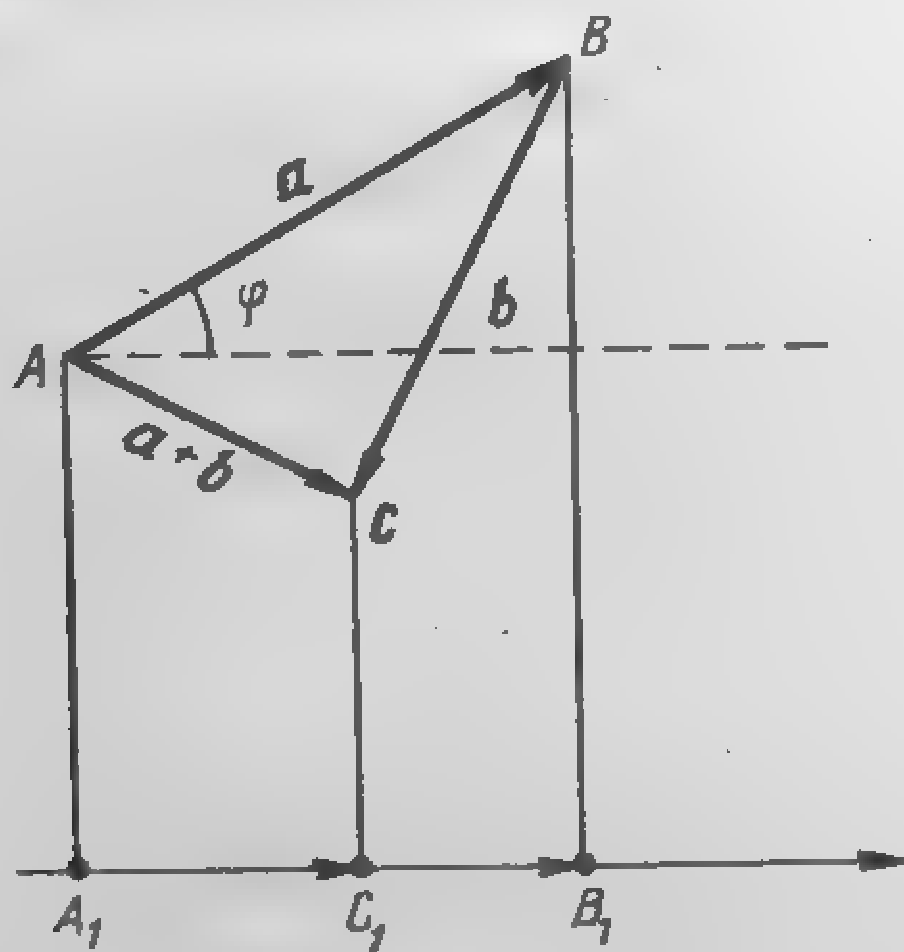
Для праекцый вектараў $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *на вось* L *характэрныя наступныя ўласцівасці:*

1) *калі* $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, *то* $P_L(\mathbf{a}) = P_L(\mathbf{b})$;
2) $P_L(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = P_L(\mathbf{a}) + P_L(\mathbf{b})$;
3) $P_L(\beta\mathbf{a}) = \beta P_L(\mathbf{a})$, $\beta \in \mathbf{R}$.

□ Сапраўды, сцверджанне 1 вынікае з роўнасці (3.2). Роўнасць 2 атрымліваем з азначэння праекцыі вектара на вось і азначэння сумы вектараў (рыс. 3.9), адкуль

$$P_L(\mathbf{a}) = |\overrightarrow{A_1B_1}| = |\overrightarrow{A_1C_1}| + |\overrightarrow{C_1B_1}| = P_L(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - P_L(\mathbf{b}),$$

што і даказвае ўласцівасць 2.



Рыс. 3.9

Дакажам цяпер роўнасць 3. Няхай $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, L})$. Калі $\beta > 0$, то з улікам формулы (3.2) маем:

$$P_L(\beta\mathbf{a}) = |\beta\mathbf{a}| \cos \varphi = \beta |\mathbf{a}| \cos \varphi = \beta P_L(\mathbf{a}).$$

Калі $\beta < 0$, то вектары $\mathbf{a}$ і $\beta\mathbf{a}$ накіраваныя процілегла, гэта азначае, што $(\widehat{\beta\mathbf{a}, L}) = \pi - \varphi$. Тады

$$P_L(\beta\mathbf{a}) = |\beta\mathbf{a}|\cos(\pi-\varphi) = -\beta|\mathbf{a}|\cos(\pi-\varphi) =$$
$$= \beta|\mathbf{a}|\cos\varphi = \beta P_L(\mathbf{a}).$$

Роўнасць 3 відавочная пры $\beta=0$. ■

3.2. ЛІНЕЙНАЯ НЕЗАЛЕЖНАСЦЬ ВЕКТАРАЎ. БАЗІС

1°. Лінейная залежнасць і незалежнасць вектараў. Назавем *лінейнай камбінацыяй вектараў* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ такі вектар $\mathbf{a}$, што

$$\mathbf{a} = \beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \beta_n\mathbf{a}_n, \quad \beta_i \in \mathbf{R}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Лікі $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ называюцца *каэфіцыентамі лінейнай камбінацыі.*

У дачыненні да пададзенай роўнасці кажуць яшчэ, што *вектар* $\mathbf{a}$ *раскладзены па вектарах* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Азначэнне 3.2. *Сістэма вектараў* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *называецца лінейна залежнай, калі існуюць рэчаісныя лікі* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, *не ўсе роўныя нулю, што*

$$\beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \beta_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Калі роўнасць (3.4) выконваецца толькі пры $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$, то сістэма вектараў называецца *лінейна незалежнай.*

Адзначым, што паняцці лінейнай залежнасці і незалежнасці вектараў характарызуюць с і с т э м у вектараў, якую разглядаюць як адзіны матэматычны аб'ект, а не самі вектары. Надалей будзем карацей гаварыць «вектары лінейна залежныя» ці «вектары лінейна незалежныя», маючы на ўвазе, што такой з'яўляецца сістэма з гэтых вектараў.

Наяўнасць сярод вектараў $\mathbf{a}_i$, $i = \overline{1, n}$, хаця б аднаго нулявога вектара прыводзіць да таго, што дадзеная сістэма вектараў з'яўляецца лінейна залежнай. Сапраўды, у гэтым выпадку перад вектарам $\mathbf{0}$ у суме (3.4) можна ўзяць адвольны ненулявы лікавы каэфіцыент. Да лінейна залежнай сістэмы мы прыходзім і ў тым разе, калі вектары $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, $k < n$ (частка зададзенай сістэмы) ёсць лінейна залежныя.

Пададзім *крытэр лінейнай залежнасці вектараў.*

Тэарэма 3.2. *Вектары* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, $n > 1$, *з'яўляюцца лінейна залежнымі, калі і толькі калі хаця б адзін з іх ёсць лінейная камбінацыя астатніх.*

□ Неабходнасць. Няхай зададзеныя вектары ёсць лінейна залежныя. Тады для іх выконваецца роўнасць (3.4), прычым хоць адзін з лікавых каэфіцыентаў у ёй ненулявы. Не абмяжоўваючы агульнасці, дапусцім, што $\beta_1 \neq 0$. Тады

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\beta_2}{\beta_1}\mathbf{a}_2 - \frac{\beta_3}{\beta_1}\mathbf{a}_3 - \ldots - \frac{\beta_n}{\beta_1}\mathbf{a}_n,$$

адкуль і вынікае, што $\mathbf{a}_1$ — лінейная камбінацыя вектараў $\mathbf{a}_i$, $i=\overline{2, n}$.

Дастатковасць. Няхай адзін з вектараў, напрыклад $\mathbf{a}_1$, ёсць лінейная камбінацыя астатніх:

$$\mathbf{a}_1 = \beta_2\mathbf{a}_2 + \beta_3\mathbf{a}_3 + \ldots + \beta_n\mathbf{a}_n, \quad \beta_i \in \mathbf{R}, \quad i=\overline{2, n}.$$

З гэтай роўнасці атрымліваем

$$\mathbf{a}_1 - \beta_2\mathbf{a}_2 - \beta_3\mathbf{a}_3 - \ldots - \beta_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

прычым каэфіцыент пры $\mathbf{a}_1$ няроўны 0. ■

Высветлім геаметрычны сэнс лінейнай залежнасці сістэмы ненулявых вектараў $\mathbf{a}_i$, $i=\overline{1, n}$, калі $n=1$, 2, 3, 4.

З азначэння лінейнай залежнасці вынікае, што сістэма з аднаго вектара $\mathbf{a}_1$ лінейна залежная толькі ў тым выпадку, калі $\mathbf{a}_1=\mathbf{0}$.

Тэарэма 3.3. *Для таго каб два вектары былі лінейна залежнымі, неабходна і дастаткова, каб яны былі калініярнымі.*

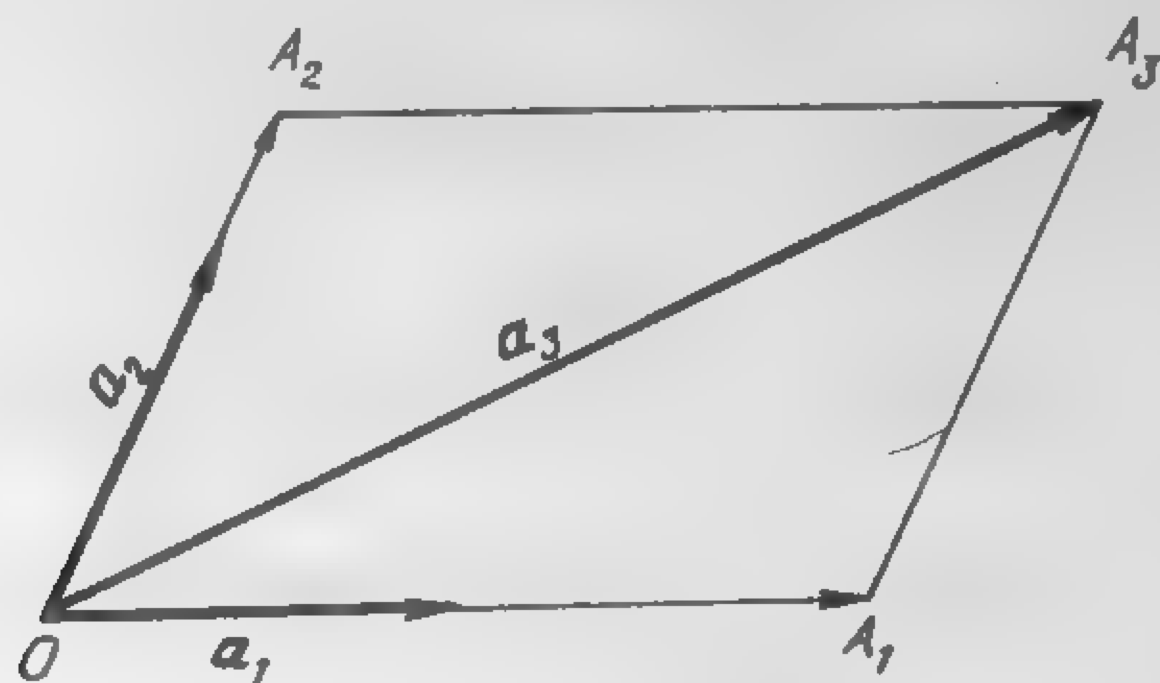
□ Калі $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$, то, згодна з тэарэмай 3.1, маем $\mathbf{a}_1 = \beta\mathbf{a}_2$, адкуль $\mathbf{a}_1 - \beta\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$. Гэта і азначае лінейную залежнасць вектараў. Наадварот, калі $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$ лінейна залежныя, то $\beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$, дзе хаця б адзін з лікавых каэфіцыентаў ненулявы, напрыклад $\beta_2 \neq 0$. Тады $\mathbf{a}_2 = (\beta_1/\beta_2)\mathbf{a}_1$, што эквівалентнае калініярнасці вектараў $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. ■

З тэарэмы 3.3 вынікае, што геаметрычны сэнс лінейнай залежнасці двух вектараў на плоскасці палягае ў іх калініярнасці.

Значыць, сказаць, што «вектары калініярныя» ці «вектары лінейна залежныя»,— гэта ўсё роўна. Адпаведна раўназначнымі з'яўляюцца выразы «некалініярныя вектары» і «лінейна незалежныя вектары».

Тэарэма 3.4. *Для таго каб тры вектары былі лінейна залежнымі, неабходна і дастаткова, каб яны былі кампланарнымі.*

□ Неабходнасць. Няхай вектары $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ лінейна залежныя. Тады, згодна з тэарэмай 3.2, хаця б адзін з іх ёсць лінейная камбінацыя астатніх, напрыклад $\mathbf{a}_3 = \beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2$. Але з гэтай роўнасці і вынікае, што вектар $\mathbf{a}_3$ ляжыць у адной плоскасці з $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$, паколькі ён з'яўляецца сумай вектараў $\beta_1\mathbf{a}_1$ і $\beta_2\mathbf{a}_2$, такіх, што $\beta_1\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_1$, $\beta_2\mathbf{a}_2 \parallel \mathbf{a}_2$ (рыс. 3.10).



Рыс. 3.10

Дастатковасць. Няхай $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — кампланарныя вектары. Дапусцім, што некаторыя два з іх калініярныя, напрыклад $\mathbf{a}_2 \parallel \mathbf{a}_3$. Тады існуе $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, што $\mathbf{a}_2 = \lambda\mathbf{a}_3$. Гэтую роўнасць можна перапісаць у выглядзе

$$0 \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \lambda\mathbf{a}_3 = \mathbf{0},$$

адкуль прыходзім да высновы, што вектары лінейна залежныя.

Няхай цяпер сярод трох вектараў няма калініярных. Перанясем усе вектары на адну плоскасць і замацуем іх пачаткі ў пункце O (гл. рыс. 3.10).

Правядзем праз канец A_3 вектара $\mathbf{a}_3$ прамыя, паралельныя вектарам $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$. У выніку перасячэння атрымаем пункты A_1 і A_2. Відавочна, што

$$\mathbf{a}_3 = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}. \qquad (3.5)$$

Але па пабудове $\mathbf{a}_1 \parallel \overrightarrow{OA_1}$ і $\mathbf{a}_2 \parallel \overrightarrow{OA_2}$, значыць, існуюць такія ненулявыя лікі β_1 і β_2, што $\overrightarrow{OA_1} = \beta_1\mathbf{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \beta_2\mathbf{a}_2$. Улічваючы гэтыя два стасункі, з роўнасці (3.5) маем $\mathbf{a}_3 = \beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2$, адкуль атрымліваем

$$\beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}.$$

Паколькі каэфіцыенты ў апошняй роўнасці ненулявыя, то гэта і азначае лінейную залежнасць вектараў $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. ■

З тэарэмы 3.4 вынікае, што з гледзішча геаметрыі лінейная залежнасць трох вектараў у прасторы эквівалентная іх кампланарнасці.

Тэарэма 3.5. *Усякія чатыры вектары прасторы ёсць лінейна залежныя.*

□ Няхай сярод зададзеных вектараў $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ маем тры кампланарныя (лінейна залежныя), напрыклад $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$. Тады, згодна з тэарэмай 3.4,

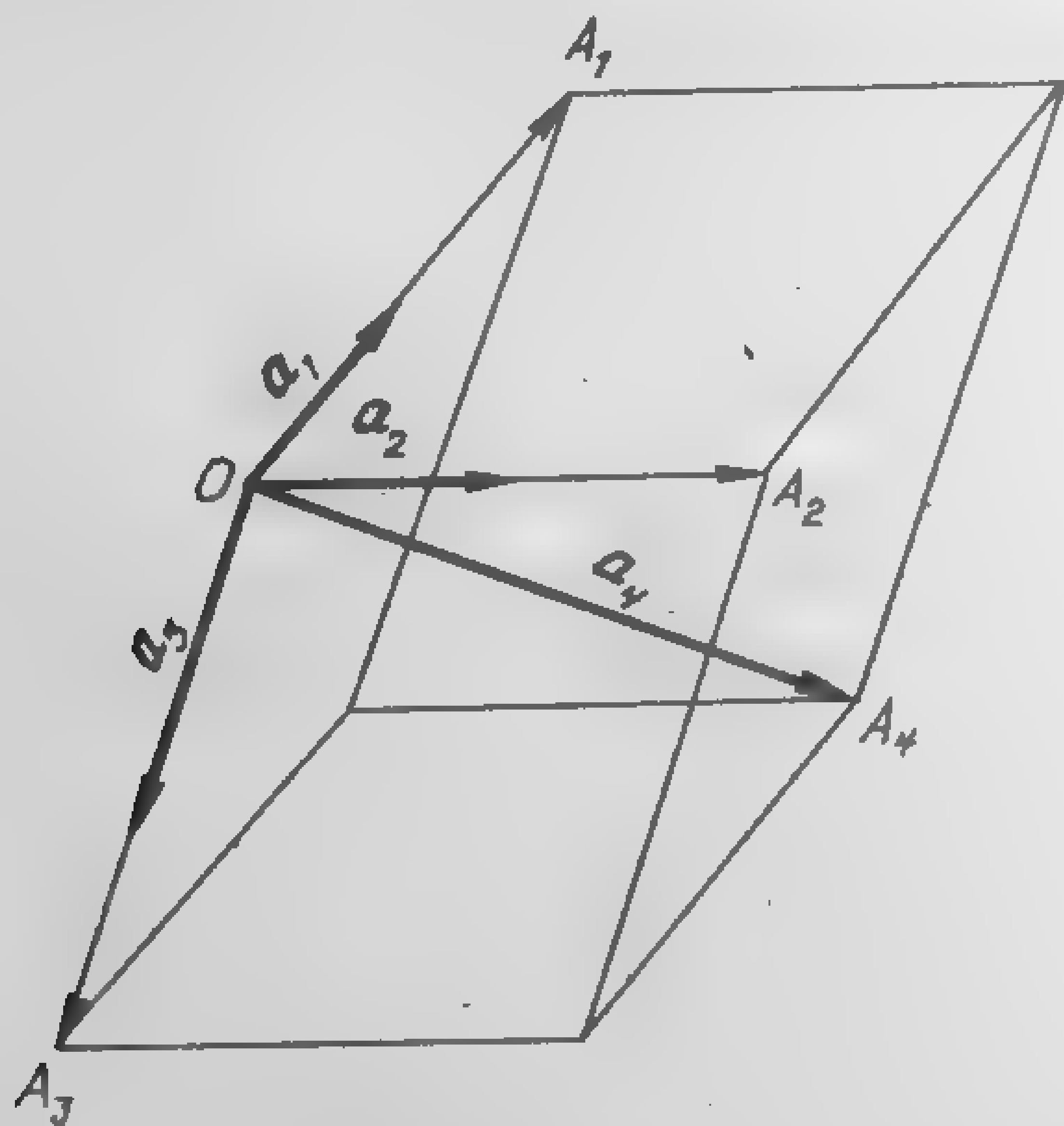
$$\beta_2\mathbf{a}_2+\beta_3\mathbf{a}_3+\beta_4\mathbf{a}_4=\mathbf{0},$$

адкуль прыходзім да роўнасці

$$0\cdot\mathbf{a}_1+\beta_2\mathbf{a}_2+\beta_3\mathbf{a}_3+\beta_4\mathbf{a}_4=\mathbf{0}.$$

Яна і азначае лінейную залежнасць дадзеных чатырох вектараў.

Дапусцім, што сярод вектараў $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ маем тры некампланарныя (лінейна незалежныя) вектары, напрыклад $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Адложым усе чатыры зададзеныя вектары з аднаго і таго ж пункта O (рыс. 3.11). Праз пункт A_4



Рыс. 3.11

(канец вектара $\mathbf{a}_4$) правядзем тры плоскасці, паралельныя адпаведна плоскасцям, якія вызначаюцца парамі вектараў $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_3$. Абазначым праз A_1, A_2, A_3 пункты перасячэння гэтых плоскасцяў з прамымі, на якіх ляжаць адпаведна вектары $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. У выніку пабудовы атрымліваем паралелепіпед з дыяганаллю $\mathbf{a}_4$.

З азначэння сумы трох вектараў маем

$$\mathbf{a}_4=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}. \tag{3.6}$$

Улічваючы калініярнасць, прыходзім да высновы, што

$$\overrightarrow{OA_1} = \beta_1 \mathbf{a}_1, \ \overrightarrow{OA_2} = \beta_2 \mathbf{a}_2, \ \overrightarrow{OA_3} = \beta_3 \mathbf{a}_3, \qquad (3.7)$$

дзе $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbf{R}$; $\beta_i \neq 0$; $i = \overline{1, 3}$. Са стасункаў (3.6) і (3.7) вынікае

$$\mathbf{a}_4 = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2 + \beta_3 \mathbf{a}_3$$

ці, тое сама,

$$\beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2 + \beta_3 \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4 = \mathbf{0}.$$

Апошняя роўнасць азначае лінейную залежнасць вектараў, бо каэфіцыенты ненулявыя. ■

2°. Базіс. У § 3.1 мы нагадалі задачу, у якой дзеянне дзвюх сілаў $\mathbf{f}_1$ і $\mathbf{f}_2$ замянялася адной вектарнай велічынёй — сілай $\mathbf{f}$. У механіцы часта даводзіцца развязваць і адваротную задачу — замяняць дзеянне адной сілы $\mathbf{f}$ дзеяннем дзвюх іншых сілаў $\mathbf{f}_1$ і $\mathbf{f}_2$, кірункі якіх зададзеныя. У такім выпадку гавораць, што сілу $\mathbf{f}$ трэба раскласці па двух пэўных кірунках. Пададзім дзве тэарэмы, якія тычацца магчымасці раскладання вектара па зададзенай сістэме вектараў на плоскасці і ў прасторы.

Тэарэма 3.6. *Усякі вектар плоскасці можна адзіным чынам раскласці па двух некалініярных вектарах.*

□ Няхай зададзены два некалініярныя вектары $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$. Для доказу магчымасці раскладу вектара $\mathbf{a}_3$ па вектарах $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$ сумясцім пачаткі ўсіх трох вектараў у адным пункце O. Зробім такую ж пабудову, як пры доказе тэарэмы 3.4 (гл. рыс. 3.10). У выніку атрымаем для вектара $\mathbf{a}_3$ выяўленне

$$\mathbf{a}_3 = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2, \quad \beta_1, \ \beta_2 \in \mathbf{R}. \qquad (3.8)$$

Каэфіцыенты β_1, β_2 вызначаюцца адназначна. Сапраўды, калі дапусціць, што існуе яшчэ выяўленне

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2,$$

то

$$\mathbf{0} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = (\beta_1 - \lambda_1)\mathbf{a}_1 + (\beta_2 - \lambda_2)\mathbf{a}_2.$$

Паколькі паводле ўмовы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ёсць лінейна незалежныя (некалініярныя), то $\beta_1 - \lambda_1 = 0$, $\beta_2 - \lambda_2 = 0$ ці $\beta_1 = \lambda_1$, $\beta_2 = \lambda_2$. ■

Вынік. *Усякія тры вектары на плоскасці лінейна залежныя.*

□ Сапраўды, калі два з трох вектараў $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ калініярныя, то ўсе тры вектары лінейна залежныя. Калі няма калініярных вектараў, то кожны з іх можна раскласці па двух іншых. Напрыклад, калі для $\mathbf{a}_3$ атрымана выяўленне (3.8), то

$$\beta_1\mathbf{a}_1+\beta_2\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3=0.$$

Апошняя роўнасць адпавядае лінейнай залежнасці зададзеных вектараў. ■

Тэарэма 3.7. *Усякі вектар прасторы можна адзіным чынам раскласці па трох некампланарных вектарах.*

□ Няхай $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — адвольныя некампланарныя вектары. Для доказу магчымасці раскладання вектара $\mathbf{a}_4$ па вектарах $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ адложым усе чатыры вектары з аднаго і таго ж пункта O. Зробім далейшую пабудову, як пры доказе тэарэмы 3.5 (гл. рыс. 3.11). Атрымаем выяўленне

$$\mathbf{a}_4=\beta_1\mathbf{a}_1+\beta_2\mathbf{a}_2+\beta_3\mathbf{a}_3,\quad \beta_i\in\mathbf{R},\ i=\overline{1,\ 3}.$$

Адзінасць такога раскладу вектара $\mathbf{a}_4$ па вектарах $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ даказваецца метадам ад процілеглага, як гэта было зроблена пры доказе тэарэмы 3.6. ■

Падвядзем вынік усяму сказанаму. Лінейна незалежная сістэма на прамой складаецца з аднаго ненулявога вектара. Калі мы выбіраем на прамой два вектары, то такая сістэма будзе ўжо лінейна залежнай, таму што вектары калініярныя. На плоскасці лінейна незалежныя сістэмы ўтвараюць два некалініярныя вектары. Адвольныя тры вектары на плоскасці ёсць ужо лінейна залежныя. У прасторы існуюць лінейна незалежныя сістэмы вектараў, якія складаюцца з трох некампланарных вектараў. А вось усякія чатыры вектары гэтай прасторы з'яўляюцца ўжо лінейна залежнымі. Значыць, максімальная колькасць лінейна незалежных вектараў на прамой — адзін, на плоскасці — два, у прасторы — тры. Адпаведна гэтаму, множства ўсіх вектараў на прамой абазначаецца $\mathbf{R}^1$, множства ўсіх вектараў на плоскасці — $\mathbf{R}^2$, множства ўсіх вектараў у прасторы — $\mathbf{R}^3$.

Азначэнне 3.3. *Базісам на плоскасці называецца ўпарадкаваная сістэма з двух некалініярных вектараў.*

Азначэнне 3.4. *Базісам у прасторы называецца ўпарадкаваная сістэма з трох некампланарных вектараў.*

Адзначым, што лінейная незалежнасць сістэмы з'яўляецца агульнай уласцівасцю як для базіса на плоскасці, так і для базіса ў прасторы. З тэарэмы 3.6 атрымліваем,

што ўсякі вектар з $\mathbf{R}^2$ можна аднназначна раскласці па базісных вектарах. Аналагічна кожны вектар $\mathbf{x}$ з $\mathbf{R}^3$, як сцвярджае тэарэма 3.7, аднназначна раскладаецца па базісных вектарах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ прасторы. У выніку атрымліваем *расклад вектара* $\mathbf{x}$ *па базісе* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3. \tag{3.9}$$

Лікі x_1, x_2, x_3 называюцца *каардынатамі вектара* x у дадзеным базісе, што запісваюць таксама ў выглядзе $\mathbf{x}=(x_1;\ x_2;\ x_3)$. Вектар плоскасці мае адпаведна дзве каардынаты.

Увядзенне базіса на прамой, плоскасці і ў прасторы дазваляе, найперш, вызначыць для вектараў лінейныя аперацыі ў каардынатнай форме. Разгледзім гэта на прыкладзе прасторы $\mathbf{R}^3$. Няхай зададзены базіс $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, па ім раскладзены два вектары — $\mathbf{x}$ (гл. формулу (3.9)) і $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+y_3\mathbf{e}_3. \tag{3.10}$$

Дададзім роўнасць (3.9) да (3.10) пакладова і згрупуем складнікі, атрымаем

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1)\mathbf{e}_1+(x_2+y_2)\mathbf{e}_2+(x_3+y_3)\mathbf{e}_3$$

ці, тое сама,

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1;\ x_2+y_2;\ x_3+y_3). \tag{3.11}$$

Такім чынам, *кожная каардыната сумы вектараў у некаторым базісе роўная суме адпаведных каардынат складнікаў у гэтым жа базісе.*

Памножым вектар $\mathbf{x}$ выгляду (3.9) на лік λ, атрымаем

$$\lambda\mathbf{x}=(\lambda x_1)\mathbf{e}_1+(\lambda x_2)\mathbf{e}_2+(\lambda x_3)\mathbf{e}_3$$

ці

$$\lambda\mathbf{x}=(\lambda x_1;\ \lambda x_2;\ \lambda x_3). \tag{3.12}$$

Такім чынам, *кожная каардыната вектара* $\lambda\mathbf{x}$ *у некаторым базісе роўная здабытку ліку* λ *і адпаведнай каардынаты вектара* $\mathbf{x}$ *у гэтым базісе.*

Улічваючы адвольнасць выбару базіса, прыходзім да высновы, што правілы дзеянняў з каардынатамі для сумы вектараў і множання на лік з'яўляюцца агульнымі.

Разгледзім выпадак, калі $\mathbf{x}=\mathbf{y}$, дзе вектары маюць адпаведна расклады (3.9) і (3.10) па адным і тым жа базісе. Знойдзем розніцу гэтых вектараў (ад роўнасці (3.9) адымем (3.10)):

$$\mathbf{0}=\mathbf{x}-\mathbf{y}=(x_1-y_1)\mathbf{e}_1+(x_2-y_2)\mathbf{e}_2+(x_3-y_3)\mathbf{e}_3.$$

Паколькі базіс $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ёсць лінейна незалежная сістэма, апошняя роўнасць магчымая толькі ў тым выпадку, калі ўсе лікавыя каэфіцыенты нулявыя, адкуль атрымліваем $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, $x_3=y_3$, г. зн. *роўныя вектары маюць роўныя каардынаты.*

Няхай зададзены ненулявыя вектары $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ раскладамі (3.9) і (3.10), прычым $\mathbf{x}\parallel\mathbf{y}$. Тады існуе $\lambda\in\mathbf{R}$, такі, што

$$\mathbf{y}=\lambda\mathbf{x}=(\lambda x_1)\mathbf{e}_1+(\lambda x_2)\mathbf{e}_2+(\lambda x_3)\mathbf{e}_3. \qquad (3.13)$$

Улічваючы формулы (3.10) і (3.13), атрымліваем роўнасці:

$$\lambda x_1=y_1,\ \lambda x_2=y_2,\ \lambda x_3=y_3, \qquad (3.14)$$

якія даюць нам

$$x_1/y_1=x_2/y_2=x_3/y_3, \qquad (3.15)$$

адкуль вынікае, што *каардынаты калініярных вектараў прапарцыйныя.*

У стасунках (3.15) лічым $y_1\neq 0$, $y_2\neq 0$, $y_3\neq 0$. Калі хаця б адна з каардынат вектара $\mathbf{y}$ нулявая, то судачыненні паміж каардынатамі калініярных вектараў $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ можна запісаць у выглядзе (3.14).

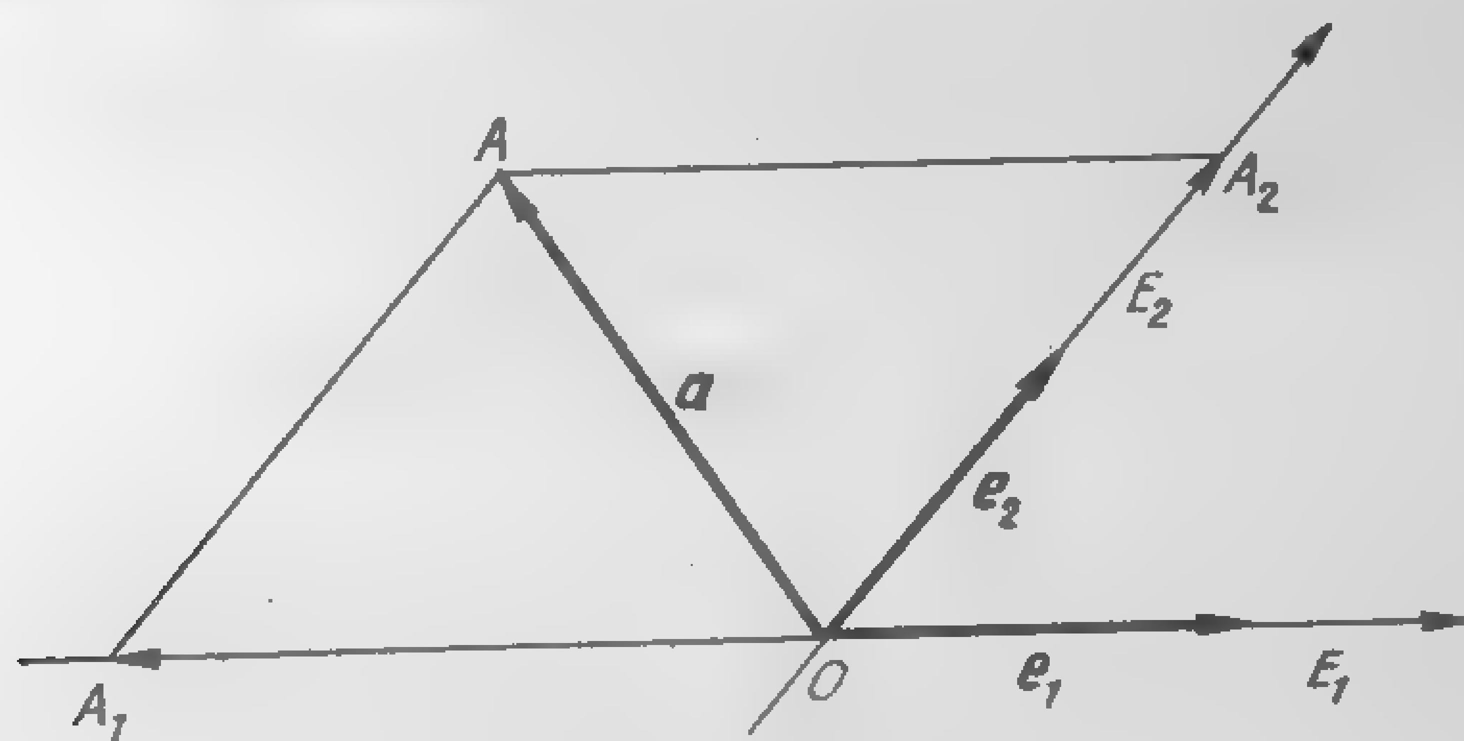
Адзначым, што прапарцыйнасць каардынат (3.15) (ці (3.14)) ёсць неабходная і дастатковая ўмова калініярнасці вектараў.

Мы разгледзелі выпадак, калі вектары з $\mathbf{R}^3$ раскладаюцца па пэўным базісе. Відавочна, што да аналагічнай высновы наконт дзеяння з каардынатамі можна прыйсці і тады, калі разглядаюцца вектары і базісы на плоскасці і на прамой.

3.3. СІСТЭМЫ КААРДЫНАТ

1°. Паняцце афіннай сістэмы каардынат. Увядзенне базіса на плоскасці і ў прасторы дае магчымасць (як мы адзначалі вышэй) перайсці ад дзеяння з вектарамі да дзеяння з іх каардынатамі. Паколькі базісаў бясконца многа, а базісныя вектары разумеем як свабодныя, узнікае неабходнасць зафіксаваць пэўны базіс і пэўны пункт плоскасці ці прасторы, у якім будуць замацаваныя базісныя вектары. Такім чынам, мы прыйдзем да сістэмы каардынат.

Разгледзім паняцце сістэмы каардынат на плоскасці. Выберам два некалініярныя вектары $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, якія і прымем за базісныя ($\mathbf{e}_1$ — першы вектар базісу, $\mathbf{e}_2$ — другі). Зафіксуем пэўны пункт O зададзенай плоскасці і назавем яго *пачаткам каардынат*. Ад пункта O адложым вектары $\overrightarrow{OE_1}=\mathbf{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2}=\mathbf{e}_2$ і правядзем прамыя, якім належаць адпаведна вектары $\overrightarrow{OE_1}$ і $\overrightarrow{OE_2}$. Выберам на атрыманых прамых дадатныя кірункі, якія будуць супадаць з кірункамі вектараў $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$. Атрымаем дзве *каардынатныя восі* (рыс. 3.12). У выніку такіх дзеянняў пабудавана *афінная* ці *агульная дэкартава сістэма каардынат* $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ *на плоскасці*.



Рыс. 3.12

Заўважым, што парадкаванне вектараў базіса $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ з'яўляецца істотным момантам сістэмы каардынат. Усюды надалей будзем разглядаць *правыя сістэмы каардынат* на плоскасці, г. зн. найменшы паварот першага базіснага вектара $\mathbf{e}_1$ да кірунку другога вектара $\mathbf{e}_2$ ажыццяўляецца супраць руху гадзіннікавай стрэлкі (для *левых сістэм* гэты паварот здзяйсняецца па руху гадзіннікавай стрэлкі).

Няхай $\mathbf{a}$ — некаторы вектар плоскасці. Пабудуем вектар $\overrightarrow{OA}$, такі, што $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$. Раскладзем вектар $\overrightarrow{OA}$ па базісе $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$, атрымаем

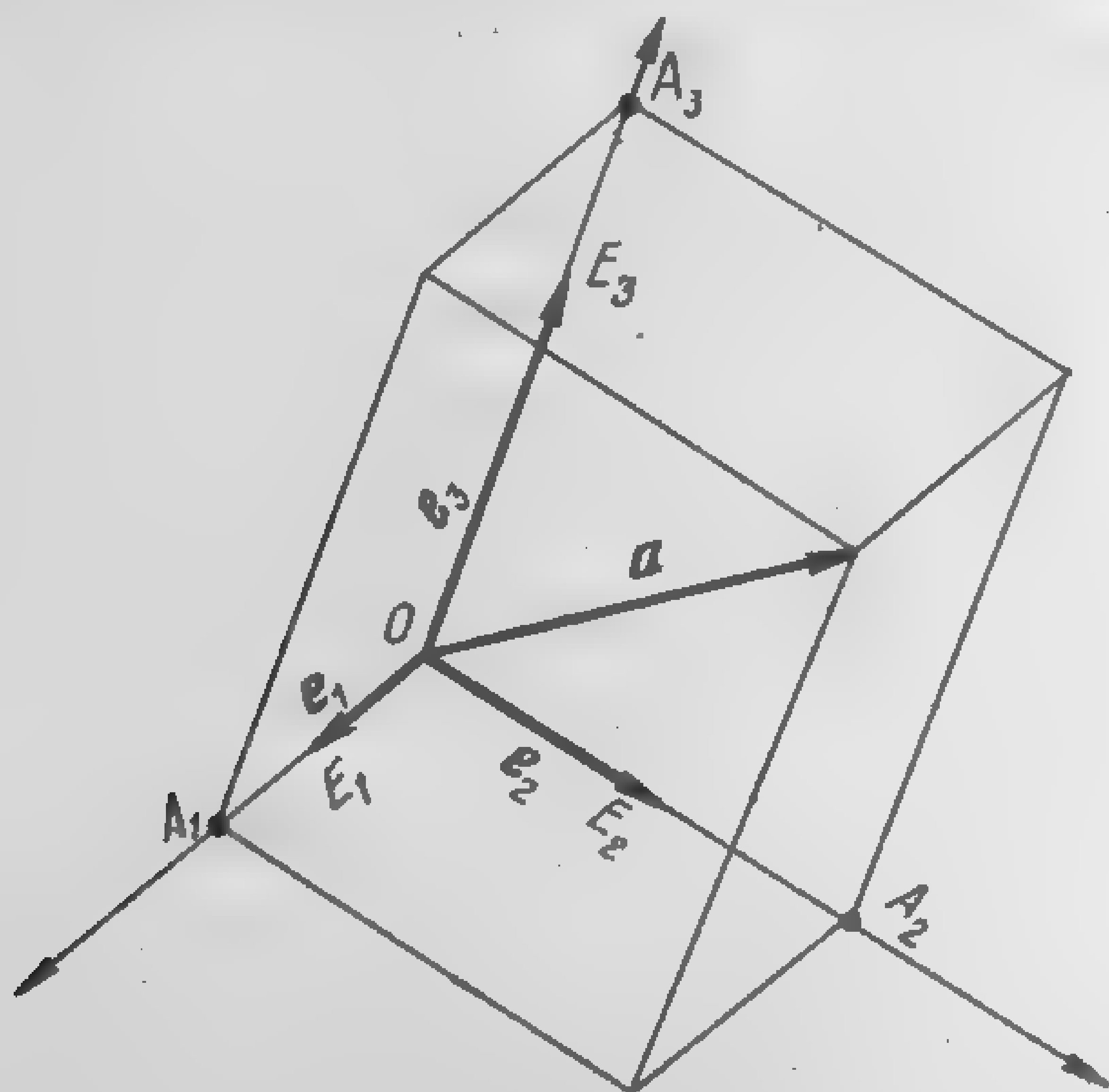
$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2, \qquad (3.16)$$

дзе $a_1\mathbf{e}_1=\overrightarrow{OA_1}$; $a_2\mathbf{e}_2=\overrightarrow{OA_2}$ (гл. рыс. 3.12). Лікі a_1 і a_2 называюцца *афіннымі* ці *агульнымі дэкартавымі каардынатамі вектара* $\mathbf{a}$ у сістэме $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$, прычым $|a_1|$ — гэта даўжыня адрэзка OA_1, якую вымералі з дапамогаю

маштабнага адрэзка OE_1, $|a_2|$ — даўжыня адрэзка OA_2 у дачыненні да даўжыні маштабнага адрэзка OE_2. Улічваючы расклад (3.16), можам запісаць: $\mathbf{a}=(a_1;\ a_2)$.

Пачатковы пункт O афіннай сістэмы каардынат дзеліць восі на дзве паўпрамыя, якія называюцца *паўвосямі*. Кірункі дадатных паўвосяў супадаюць адпаведна з кірункамі вектараў $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$. Адмоўныя паўвосі маюць кірункі, процілеглыя тым, якія маюць вектары $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$. У сувязі з гэтым адзначым, што ў раскладзе (3.16) знакі каардынат a_1, a_2 вызначаюцца тым, на якой паўвосі ляжаць накіраваныя адрэзкі $\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{OA_2}$ (гл. рыс. 3.12).

Аналагічна ўводзіцца *афінная сістэма каардынат* $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ *у прасторы* (рыс. 3.13): фіксуем упарадкаваную сістэму з трох некампланарных вектараў $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$



Рыс. 3.13

і пункт O *(пачатак каардынат)*; пераносім вектары $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ у пункт O і праводзім каардынатныя восі. Як і для сістэм каардынат на плоскасці, у прасторы можна разглядаць правыя і левыя сістэмы каардынат. У межах нашага падручніка будуць разглядацца толькі правыя сістэмы $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$: з канца трэцяга базіснага вектара $\mathbf{e}_3$ найменшы паварот вектара $\mathbf{e}_1$ да кірунку вектара $\mathbf{e}_2$ назіраецца як паварот супраць руху гадзіннікавай стрэлкі.

Няхай $\mathbf{a}$ — адвольны вектар прасторы. Пабудуем вектар $\overrightarrow{OA}$, такі, што $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ (перанясем $\mathbf{a}$ у пункт O).

Раскладзем яго па базісе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ і атрымаем выяўленне

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \tag{3.17}$$

прычым $|a_1| = |\overrightarrow{OA_1}|/|\mathbf{e}_1|$, $|a_2| = |\overrightarrow{OA_2}|/|\mathbf{e}_2|$, $|a_3| = |\overrightarrow{OA_3}|/|\mathbf{e}_3|$ (гл. рыс. 3.13). Знакі лікаў a_1, a_2, a_3 залежаць ад таго, які кірунак маюць вектары $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ у дачыненні да кірунку вектараў $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ адпаведна (на дадатнай ці адмоўнай паўвосі яны ляжаць). Лікі a_1, a_2, a_3 называюцца *афіннымі (агульнымі дэкартавымі) каардынатамі вектара* **a** *у прасторы*. Улічваючы роўнасць (3.17), можна запісаць $\mathbf{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Афінную сістэму каардынат на прамой атрымліваем, калі зафіксуем пэўны пачатак O і адложым ад яго некаторы вектар **e**.

Відавочна, што кожны вектар на прамой мае адзіную каардынату, якая вызначаецца з улікам яго даўжыні і кірунку ў дачыненні да даўжыні і кірунку базіснага вектара **e**.

У выніку ўсяго сказанага дадзім

Азначэнне 3.5. *Афіннай ці агульнай дэкартавай сістэмай каардынат у прасторы (на прамой, на плоскасці) называецца сукупнасць пункта і базіса гэтай прасторы (прамой, плоскасці).*

Улічваючы той факт, што расклад усякага вектара ў афіннай сістэме ёсць расклад вектара па базісе, лінейныя аперацыі з вектарамі ў каардынатнай форме здзяйсняюць па правілах, вызначаных у § 3.2. Захоўваюцца і такія ж стасункі паміж каардынатамі роўных і калініярных вектараў.

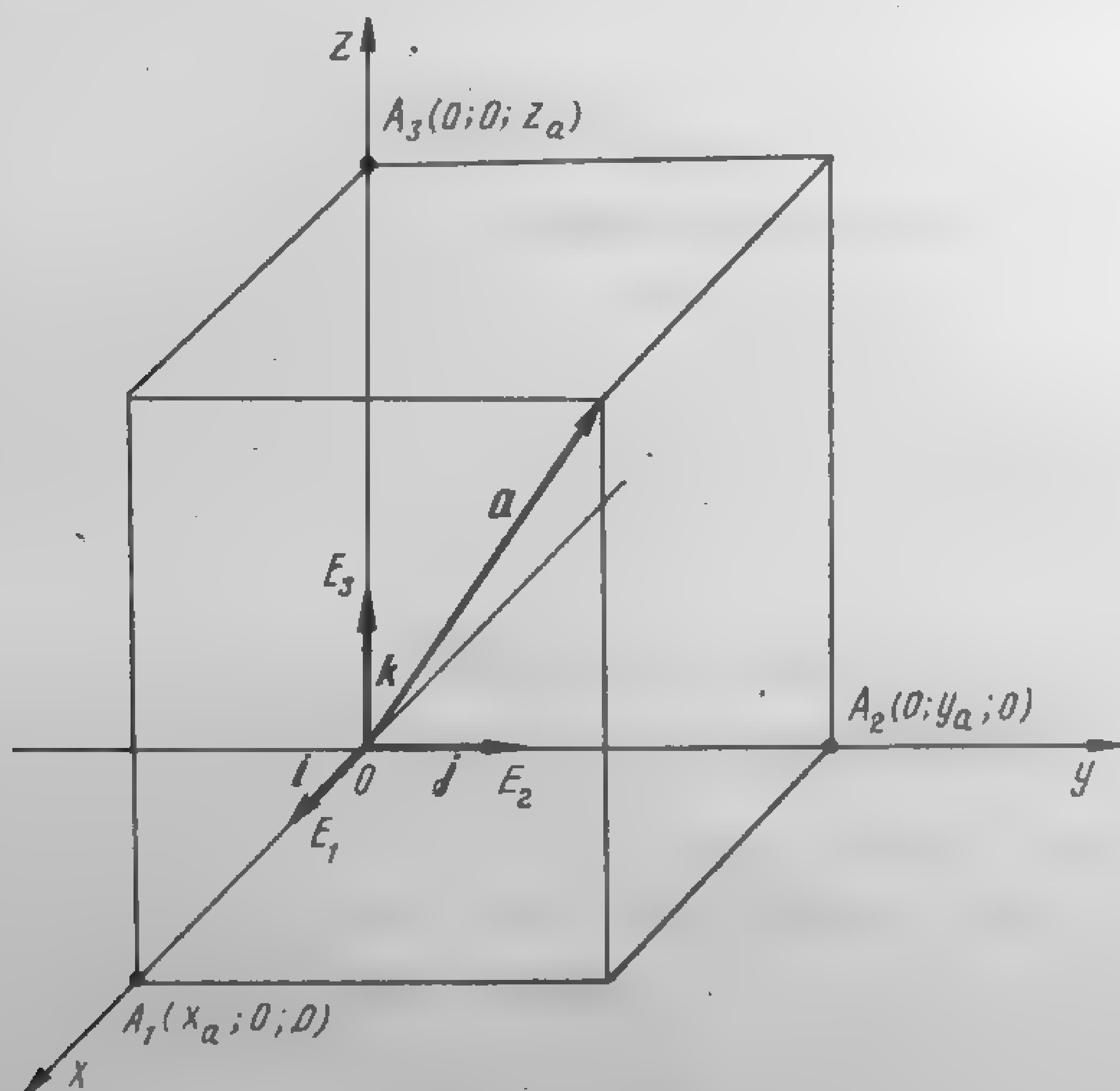
2°. Дэкартава прамавугольная сістэма каардынат. Афінныя сістэмы каардынат ужываюцца радзей, чым спецыяльны клас такіх сістэм — дэкартавы прамавугольныя сістэмы каардынат. Такія сістэмы шырока скарыстоўваюцца не толькі ў вышэйшай матэматыцы, але і ў элементарнай.

Дадзім апісанне дэкартавай прамавугольнай сістэмы каардынат з пазіцый вектарнай алгебры. Для пабудовы такой сістэмы бяруць *ортаўнармаваны базіс*, г. зн. базіс, вектары якога папарна артаганальныя і па даўжыні роўныя адзінцы.

Азначэнне 3.6. *Афінная сістэма каардынат, якая мае ортаўнармаваны базіс, называецца дэкартавай прамавугольнай сістэмай каардынат.*

Разгледзім дэкартаву прамавугольную сістэму каардынат у прасторы. Для яе пабудовы выберам пункт *O (пачатак сістэмы каардынат)* і правядзем праз яго тры ўзаемна перпендыкулярныя восі: *Ox (вось абцыс), Oy (вось ардынат), Oz (вось аплікат)*. На кожнай з дадзеных восяў ад пачатку каардынат адложым адрэзкі OE_1, OE_2, OE_3 адной і той жа даўжыні, прымем іх даўжыню за адзінку: $OE_1 = OE_2 = OE_3 = 1$ (рыс. 3.14). Атрыманыя адзінкавыя адрэзкі разгледзім як накіраваныя, прычым іх кірункі супадаюць адпаведна з кірункамі восі Ox, Oy, Oz. Абазначым $\mathbf{i} = \overrightarrow{OE_1}$, $\mathbf{j} = \overrightarrow{OE_2}$, $\mathbf{k} = \overrightarrow{OE_3}$. Відавочна, што вектары **i**, **j**, **k** лінейна незалежныя, бо яны некампланарныя. У якасці базіса дэкартавай прамавугольнай сістэмы каардынат у прасторы разгледзім вектары **i**, **j**, **k**, якія назавем *ортамі*. Вектар **i** будзем лічыць першым, **j** — другім, **k** — трэцім вектарам і дамовімся, што надалей тройка вектараў $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ мае правую арыентацыю.

Такім чынам, мы пабудавалі ў прасторы *дэкартаву прамавугольную сістэму каардынат,* якую абазначаюць $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ альбо $Oxyz$ (гл. рыс. 3.14). Яна з'яўляецца прыватным выпадкам афіннай сістэмы каардынат. Таму ўсё сказанае пра афінныя сістэмы застаецца справядлівым і для дэкартавай прамавугольнай сістэмы каардынат.



Рыс. 3.14

Плоскасці, якія праходзяць праз пары каардынатных восяў, называюцца *каардынатнымі плоскасцямі.* Усяго іх маецца тры: xOy, xOz, yOz. Плоскасць xOy падзяляе прастору на дзве паўпрасторы. Пункты адной паўпрасторы характарызуюцца ўмовай $z>0$, а другой — $z<0$. Для пунктаў самой плоскасці xOy справядліва роўнасць $z=0$. Аналагічна на дзве паўпрасторы дзеліць усю прастору плоскасць xOz, а таксама yOz.

Усе каардынатныя плоскасці разам падзяляюць прастору на восем частак — *актантаў.* Два звязаныя вектары належаць аднаму і таму ж актанту, калі і толькі калі ўсе тры іх каардынаты маюць аднолькавыя знакі.

Відавочна, што орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ у разгляданай сістэме каардынат $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ маюць каардынаты $\mathbf{i}=(1; 0; 0)$, $\mathbf{j}=$ $=(0; 1; 0)$, $\mathbf{k}=(0; 0; 1)$. Адвольны вектар $\mathbf{a}$ можна раскласці па базісных вектарах (гл. рыс. 3.14):

$$\mathbf{a}=x_a\mathbf{i}+y_a\mathbf{j}+z_a\mathbf{k}. \quad (3.18)$$

Пры гэтым каардынаты вектара $\mathbf{a}$ ёсць праекцыі гэтага вектара на восі: $P_{Ox}(\mathbf{a})=x_a$, $P_{Oy}(\mathbf{a})=y_a$, $P_{Oz}(\mathbf{a})=z_a$. Магчыма і наадварот: для зададзенай тройкі рэчаісных лікаў x_a, y_a, z_a можна пабудаваць адзіны вектар прасторы (для лікаў x_a, y_a, z_a спачатку будуюць адпаведныя геаметрычныя праекцыі, а затым сам вектар $\mathbf{a}$ як дыяганаль паралелепіпеда). Такім чынам, з дапамогаю дэкартавай сістэмы $Oxyz$ можна задаць узаемна адназначную адпаведнасць мноства вектараў з прасторы $\mathbf{R}^3$ і мноства ўпарадкаваных троек лікаў.

Назавем *радыусам-вектарам пункта A* вектар $\overrightarrow{OA}=$ $=\mathbf{r}_A$, пачатак якога супадае з пачаткам O сістэмы каардынат, а канец — з пунктам A. Значыць, кожнаму пункту прасторы можна паставіць у адпаведнасць яго радыус-вектар і наадварот. Гэта адпаведнасць з'яўляецца ўзаемна адназначнай.

Каардынаты вектара $\overrightarrow{OA}$ ёсць праекцыі гэтага вектара на восі. Велічыні такіх праекцый поўнасцю вызначаюцца тым, куды праектуецца пункт A (канец вектара).

Гэта азначае, што каардынаты вектара $\mathbf{r}_A=\overrightarrow{OA}$ з'яўляюцца адначасова каардынатамі пункта A. У сувязі з усім сказаным мы будзем называць тройку рэчаісных лікаў $(x_a; y_a; z_a)$ пунктам A, які мае гэтыя лікі сваімі каардынатамі, ці радыусам-вектарам $\mathbf{a}$, які мае гэтыя лікі сваімі праекцыямі на восі (каардынатамі). Запіс $\mathbf{R}^3$ будзе

адначасова абазначаць мноства вектараў прасторы, мноства пунктаў гэтай прасторы ці мноства ўпарадкаваных троек лікаў. У кожным канкрэтным выпадку будзе зразумела, пра якое мноства ідзе размова.

Аналагічна ўводзіцца *дэкартава прамавугольная сістэма каардынат* $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ *на плоскасці.* Другое яе абазначэнне Oxy адпавядае назве восяў Ox і Oy. Базіснымі вектарамі гэтай сістэмы з'яўляюцца орты $\mathbf{i}=(1;\ 0)$, $\mathbf{j}=(0;\ 1)$. Кожны вектар $\mathbf{a}=(x_a;\ y_a)$ плоскасці мае расклад $\mathbf{a}=x_a\mathbf{i}+y_a\mathbf{j}$, дзе x_a, y_a — праекцыі вектара $\mathbf{a}$ на вось абцыс Ox і вось ардынат Oy адпаведна.

З дапамогаю сістэмы $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ можна задаць адназначную адпаведнасць паміж мноствам вектараў плоскасці, мноствам пунктаў плоскасці і мноствам упарадкаваных пар лікаў. Кожнае з гэтых мностваў паводле пададзенага раней абазначаецца $\mathbf{R}^2$.

Заўвага 3.1. Узаемна адназначная адпаведнасць вектараў, упарадкаваных набораў з n рэчаісных лікаў ($n=2$, 3) і пунктаў плоскасці ці прасторы можа быць атрымана з дапамогаю ўсякай фіксаванай афіннай сістэмы каардынат.

3°. Пераход ад вектарных дачыненняў да каардынатных. Разгледзім выпадак прасторы $\mathbf{R}^3$. Паколькі паміж мноствам вектараў і мноствам упарадкаваных троек лікаў існуе ўзаемна адназначная адпаведнасць, можна разглядаць пераход ад вектарных дачыненняў да каардынатных, што з'яўляецца мэтазгодным з практычнага пункту гледжання.

На аснове тэарэмы пра квадрат дыяганалі прамавугольнага паралелепіпеда для вектара (3.18) атрымліваем *формулу даўжыні вектара:*

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}. \tag{3.19}$$

Згодна з формулай (3.11), *сума вектара* $\mathbf{a}=(x_a;\ y_a;\ z_a)$ *і вектара* $\mathbf{b}=(x_b;\ y_b;\ z_b)$ *у каардынатнай форме* мае выгляд

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(x_a+x_b;\ y_a+y_b;\ z_a+z_b). \tag{3.20}$$

Здабытак вектара $\mathbf{a}$ *і ліку* λ на падставе формулы (3.12) запішацца ў выглядзе

$$\lambda\mathbf{a}=(\lambda x_a;\ \lambda y_a;\ \lambda z_a). \tag{3.21}$$

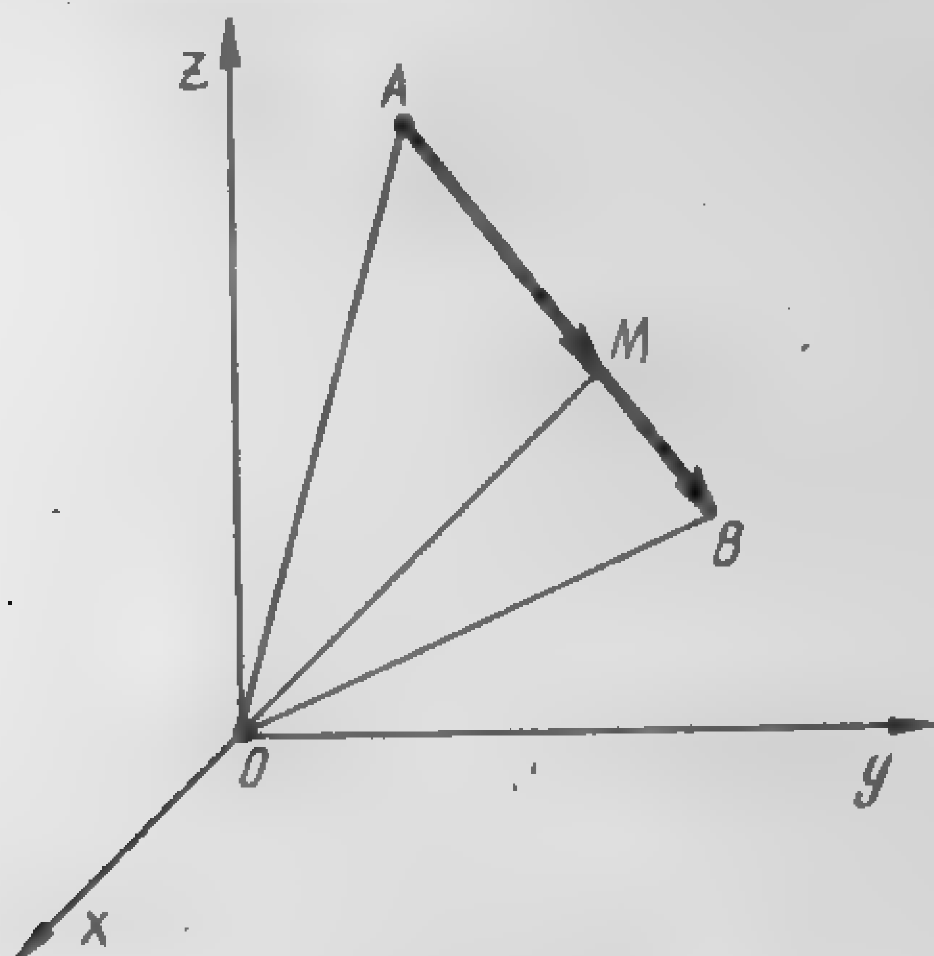
З формул (3.20) і (3.21) пры $\lambda=-1$ атрымліваем, што *каардынаты розніцы вектараў* $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ выражаюцца формулай

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=(x_a-x_b;\ y_a-y_b;\ z_a-z_b),$$

адкуль для $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ маем $x_a=x_b$, $y_a=y_b$, $z_a=z_b$.

Калі $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$, то каардынаты вектараў прапарцыйныя, што ўжо адзначалася для адвольнага базіса (гл. формулу (3.14)).

Высветлім, якія каардынаты мае вектар $\overrightarrow{AB}$, калі зададзены каардынаты яго пачатку $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ і канца $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$. Для гэтага разгледзім радыусы-вектары $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ пунктаў A і B (рыс. 3.15). З азначэння розніцы



Рыс. 3.15

вектараў атрымліваем $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ ці, у каардынатнай форме,

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A);$$

для атрымання каардынат вектара неабходна ад каардынат яго канца адняць адпаведныя каардынаты пачатку.

Згодна з формулай (3.19), даўжыня такога вектара выразіцца наступным чынам:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

Разгледзім наступную задачу. Дадзены два пункты $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ і $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$. Трэба знайсці каардынаты пункта $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$, які дзеліць адрэзак AB у зададзеным тасунку λ: $AM/MB=\lambda$.

Паколькі AM і MB — даўжыні аднолькава накіраваных адрэзкаў $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MB}$ (гл. рыс. 3.15), то $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$. Але

з азначэння розніцы вектараў маем $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$. На падставе гэтых дзвюх роўнасцяў атрымліваем

$$\overrightarrow{AM}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}). \qquad (3.22)$$

Далей скарыстаем той факт, што $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}$. Апошняя сума з улікам стасунка (3.22) набывае выгляд

$$\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{OM}.$$

Пераўтвараючы апошні выраз, прыходзім да роўнасці $(1+\lambda)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$, адкуль атрымліваем

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}).$$

На падставе азначэнняў (3.20) і (3.21) аперацый з вектарамі ў каардынатнай форме з апошняй роўнасці атрымліваем наступныя *формулы для каардынат пункта $M(x_M; y_M; z_M)$, які дзеліць адрэзак AB у тасунку λ:*

$$x_M=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\ y_M=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda},\ z_M=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}. \qquad (3.23)$$

Відавочна, што яны справядлівыя, калі $\lambda\neq-1$.

Як прыватны выпадак з судачыненняў (3.23) вынікае, што каардынаты сярэдзіны адрэзку ($\lambda=1$) знаходзяць па формулах:

$$x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B),\ y_M=\frac{1}{2}(y_A+y_B),\ z_M=\frac{1}{2}(z_A+z_B).$$

Кіроўнымі косінусамі вектара называюцца косінусы вуглоў α, β, γ, якія ўтварае дадзены вектар з каардынатнымі восямі. Для вектара $\mathbf{a}=(x_a;\ y_a;\ z_a)$ паводле азначэння праекцыі на восі (формула (3.2)) маем:

$$x_a=|\mathbf{a}|\cos\alpha,\ y_a=|\mathbf{a}|\cos\beta,\ z_a=|\mathbf{a}|\cos\gamma. \qquad (3.24)$$

З роўнасцяў (3.24) і (3.19) вынікаюць *формулы для кіроўных косінусаў вектара* **a**:

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=x_a/\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2},\\ \cos\beta&=y_a/\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2},\\ \cos\gamma&=z_a/\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}.\end{aligned} \qquad (3.25)$$

Калі абедзве часткі роўнасцяў (3.25) падвысіць у квадрат і скласці, атрымаем

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

г. зн. *сума квадратаў кіроўных косінусаў усякага вектара роўная адзінцы.*

З формул (3.24) для адзінкавага вектара **e** маем

$$\mathbf{e} = (\cos \alpha;\ \cos \beta;\ \cos \gamma). \qquad (3.26)$$

Заўвага 3.2. Для вектара на плоскасці справядлівыя ўсе пададзеныя вышэй судачыненні ў каардынатнай форме з тым толькі адрозненнем, што ва ўсіх формулах адсутнічае трэцяя каардыната. Даказваюцца яны аналагічна.

4°. Пераўтварэнне дэкартавых каардынат на плоскасці. Няхай на плоскасці зададзены дзве дэкартавы прамавугольныя сістэмы каардынат $\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$, $\{O_1;\ \mathbf{i}_1,\ \mathbf{j}_1\}$, у якіх $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{i}_1| = |\mathbf{j}_1| = 1$. Першую сістэму будзем лічыць старой, зададзенай першапачаткова, а другую — новай, да якой здзяйсняецца пераход. Будзем лічыць таксама, што адвольны пункт M плоскасці ў старой сістэме мае каардынаты $(x;\ y)$, а ў новай — $(x_1;\ y_1)$.

Разгледзім тры віды пераўтварэнняў сістэмы $\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ у сістэму $\{O_1;\ \mathbf{i}_1,\ \mathbf{j}_1\}$.

1. Калі базіс новай сістэмы звязаны з базісам старой у стасунку $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}$ (пункты O і O_1 розныя), то кажуць, што новая сістэма каардынат атрымана са старой з дапамогаю паралельнага пераносу. Знойдзем формулы пераўтварэння каардынат пункта пры пераходзе ад адной сістэмы да другой з дапамогаю паралельнага пераносу. З геаметрычных меркаванняў маем (рыс. 3.16)

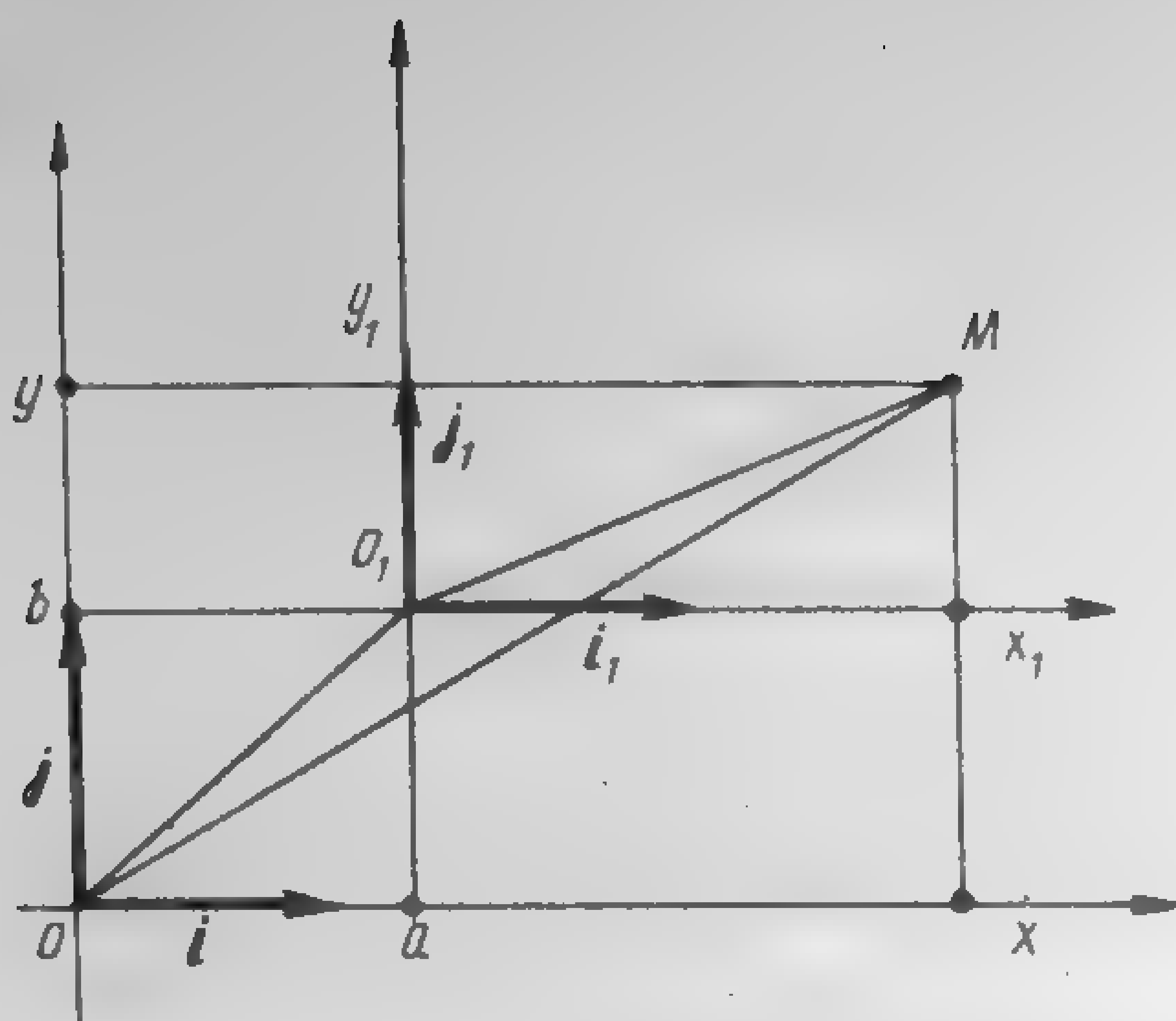
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}.$$

Калі пункт O_1 у сістэме $\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ мае каардынаты $(a;\ b)$, то апошняя роўнасць у каардынатнай форме набывае выгляд

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + a, \\ y &= y_1 + b. \end{aligned}\right\} \qquad (3.27)$$

Роўнасці (3.27) называюцца *формуламі пераўтварэння каардынат пры паралельным пераносе каардынатных восяў.*

2. Няхай новая сістэма $\{O_1;\ \mathbf{i}_1,\ \mathbf{j}_1\}$ атрымана са старой $\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ у выніку павароту апошняй у дачыненні да па-



Рыс. 3.16

чатку каардынат O на вугал φ (пункты O і O_1 супадаюць). Няцяжка ўбачыць (рыс. 3.17), што: $(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{i}_1}) = \varphi$, $(\widehat{\mathbf{i}_1, \mathbf{j}}) = \pi/2 - \varphi$, $(\widehat{\mathbf{j}, \mathbf{j}_1}) = \varphi$, $(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{j}_1}) = \pi/2 + \varphi$. На падставе азначэння сумы вектараў, а таксама формул (3.2) і (3.3) атрымліваем

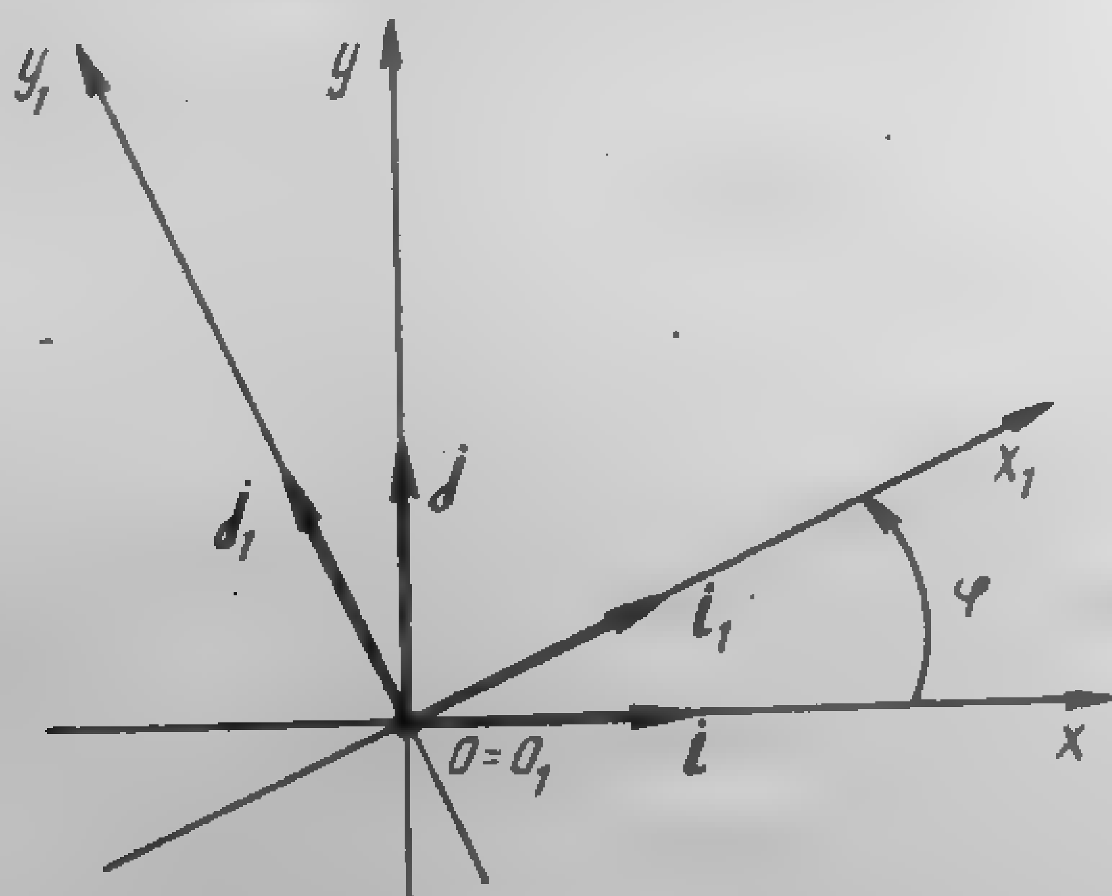
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= \cos\varphi\,\mathbf{i} + \cos(\pi/2 - \varphi)\mathbf{j}, \\ \mathbf{j}_1 &= \cos(\pi/2 + \varphi)\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j} \end{aligned}\right\}$$

ці, тое сама,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}, \\ \mathbf{j}_1 &= -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.28)$$

Згодна з азначэннем дэкартавых каардынат,

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x_1\mathbf{i}_1 + y_1\mathbf{j}_1.$$



Рыс. 3.17

Падставім у апошнюю роўнасць замест вектараў $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$ іх выяўленні з сістэмы (3.28). Атрымаем

$$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}=x_1(\cos\varphi\mathbf{i}+\sin\varphi\mathbf{j})+y_1(-\sin\varphi\mathbf{i}+\cos\varphi\mathbf{j}),$$

адкуль для каардынат роўных вектараў маем

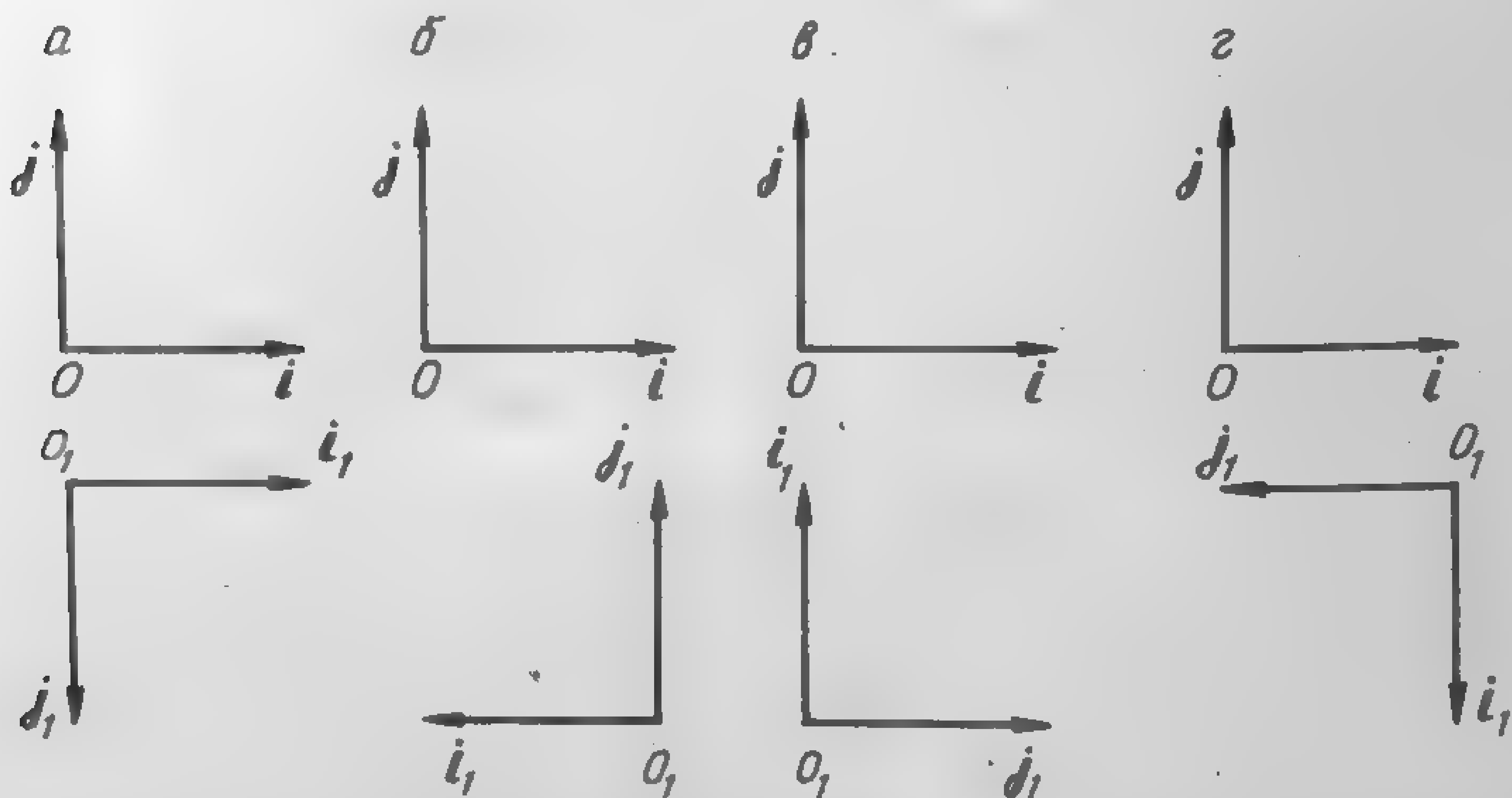
$$\left.\begin{aligned} x&=x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi,\\ y&=x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi.\end{aligned}\right\} \qquad (3.29)$$

Роўнасці (3.29) называюцца *формуламі пераўтварэння каардынат пры павароце каардынатных восяў на вугал* φ *у дачыненні да пачатку каардынат.*

3. Калі новая сістэма каардынат стасуецца са старой у адным з чатырох варыянтаў:

а) $\begin{cases}\mathbf{i}_1=\mathbf{i},\\ \mathbf{j}_1=-\mathbf{j};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\mathbf{i}_1=-\mathbf{i},\\ \mathbf{j}_1=\mathbf{j};\end{cases}$ в) $\begin{cases}\mathbf{i}_1=\mathbf{j},\\ \mathbf{j}_1=\mathbf{i};\end{cases}$ г) $\begin{cases}\mathbf{i}_1=-\mathbf{j},\\ \mathbf{j}_1=-\mathbf{i};\end{cases}$

то кажуць, што сістэма $\{O_1;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ атрымана шляхам змянення арыентацыі (пераарыентацыі) каардынатных восяў сістэмы $\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ (рыс. 3.18). Можна лёгка пераканацца, што для кожнага з гэтых чатырох выпадкаў



Рыс. 3.18

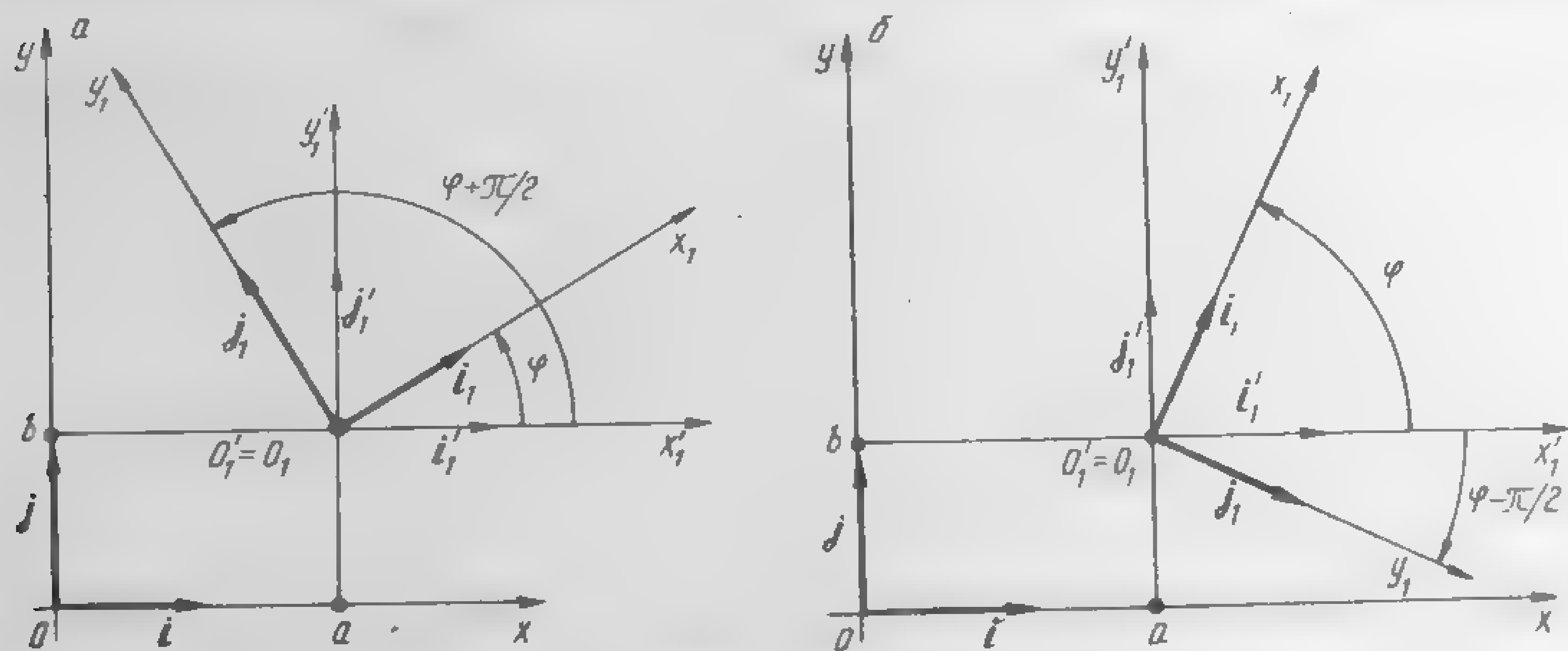
справядлівыя адпаведна наступныя *формулы пераўтварэння каардынат пры пераарыентацыі восяў:*

$$\text{а) }\begin{cases}x=x_1,\\ y=-y_1;\end{cases}\quad \text{б) }\begin{cases}x=-x_1,\\ y=y_1;\end{cases}\quad \text{в) }\begin{cases}x=y_1,\\ y=x_1;\end{cases}\quad \text{г) }\begin{cases}x=-y_1,\\ y=-x_1.\end{cases} \qquad (3.30)$$

Заўважым, што ў кожным выпадку а — г са стасункаў (3.30) новая сістэма каардынат не можа быць атрымана са старой з дапамогаю павароту ці пераносу старой сістэмы, паколькі ў гэтым разе мяняецца арыентацыя сістэмы каардынат з правай на левую.

Адзначым таксама, што паралельны перанос, паварот і пераарыентацыя восяў (і толькі гэтыя пераўтварэнні) не мяняюць даўжыню базісных вектараў сістэмы каардынат ні тады, калі яны прымяняюцца паасобку, ні тады, калі паслядоўна.

Разгледзім падрабязна выпадак паслядоўнага скарыстання некалькіх пераўтварэнняў. Няхай новая сістэма атрымліваецца са старой у выніку паралельнага пераносу каардынатных восяў, павароту іх на вугал φ (рыс. 3.19, *а*) ці дадаткова яшчэ і пераарыентацыі восяў (рыс. 3.19, *б*). Гэта азначае, што спачатку мы здзяйсняем



Рыс. 3.19

пераход ад сістэмы $\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ да сістэмы $\{O_1';\ \mathbf{i}_1',\ \mathbf{j}_1'\}$, а затым — да $\{O_1;\ \mathbf{i}_1,\ \mathbf{j}_1\}$ (гл. рыс. 3.19). Няхай каардынаты пункта M у сістэме $\{O_1';\ \mathbf{i}_1',\ \mathbf{j}_1'\}$ будуць $(x_1';\ y_1')$. Тады

$$\overrightarrow{OM}=x_1\mathbf{i}_1+y_1\mathbf{j}_1=x_1'\mathbf{i}_1'+y_1'\mathbf{j}_1'. \tag{3.31}$$

Разам з тым (гл. рыс. 3.19)

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1&=\cos\varphi\,\mathbf{i}_1'+\sin\varphi\,\mathbf{j}_1',\\ \mathbf{j}_1&=\cos(\varphi\pm\pi/2)\mathbf{i}_1'+\sin(\varphi\pm\pi/2)\mathbf{j}_1' \end{aligned} \tag{3.32}$$

ці на падставе формул прывядзення

$$\mathbf{j}_1=\mp\sin\varphi\,\mathbf{i}_1'\pm\cos\varphi\,\mathbf{j}_1', \tag{3.33}$$

дзе верхні варыянт знакаў у роўнасці (3.33) адпавядае

выпадку, адлюстраванаму на рыс. 3.19, *а*, ніжні — на рыс. 3.19, *б*.

З улікам формул (3.32) і (3.33) роўнасць (3.31) набывае наступны выгляд:

$$x_1(\cos\varphi\mathbf{i}_1'+\sin\varphi\mathbf{j}_1')+y_1(\mp\sin\varphi\mathbf{i}_1'\pm\cos\varphi\mathbf{j}_1')= \\ =x_1'\mathbf{i}_1'+y_1'\mathbf{j}_1',$$

адкуль з прычыны роўных вектараў атрымліваем

$$\left.\begin{aligned} x_1'&=x_1\cos\varphi\mp y_1\sin\varphi,\\ y_1'&=x_1\sin\varphi\pm y_1\cos\varphi.\end{aligned}\right\} \qquad (3.34)$$

Паколькі $(a;\ b)$ ёсць каардынаты новага пачатку O_1 у старой сістэме каардынат, то, згодна з формуламі (3.27), маем

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1'+a,\\ y&=y_1'+b.\end{aligned}\right\} \qquad (3.35)$$

Скарыстоўваючы стасункі (3.34) і (3.35), прыходзім да наступных *формул пераўтварэння каардынат:*

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1\cos\varphi\mp y_1\sin\varphi+a,\\ y&=x_1\sin\varphi\pm y_1\cos\varphi+b,\end{aligned}\right\} \qquad (3.36)$$

з якіх можна выразіць таксама новыя каардынаты праз старыя:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\quad(x-a)\cos\varphi+(y-b)\sin\varphi,\\ y_1&=\mp(x-a)\sin\varphi\pm(y-b)\cos\varphi.\end{aligned}\right\} \qquad (3.37)$$

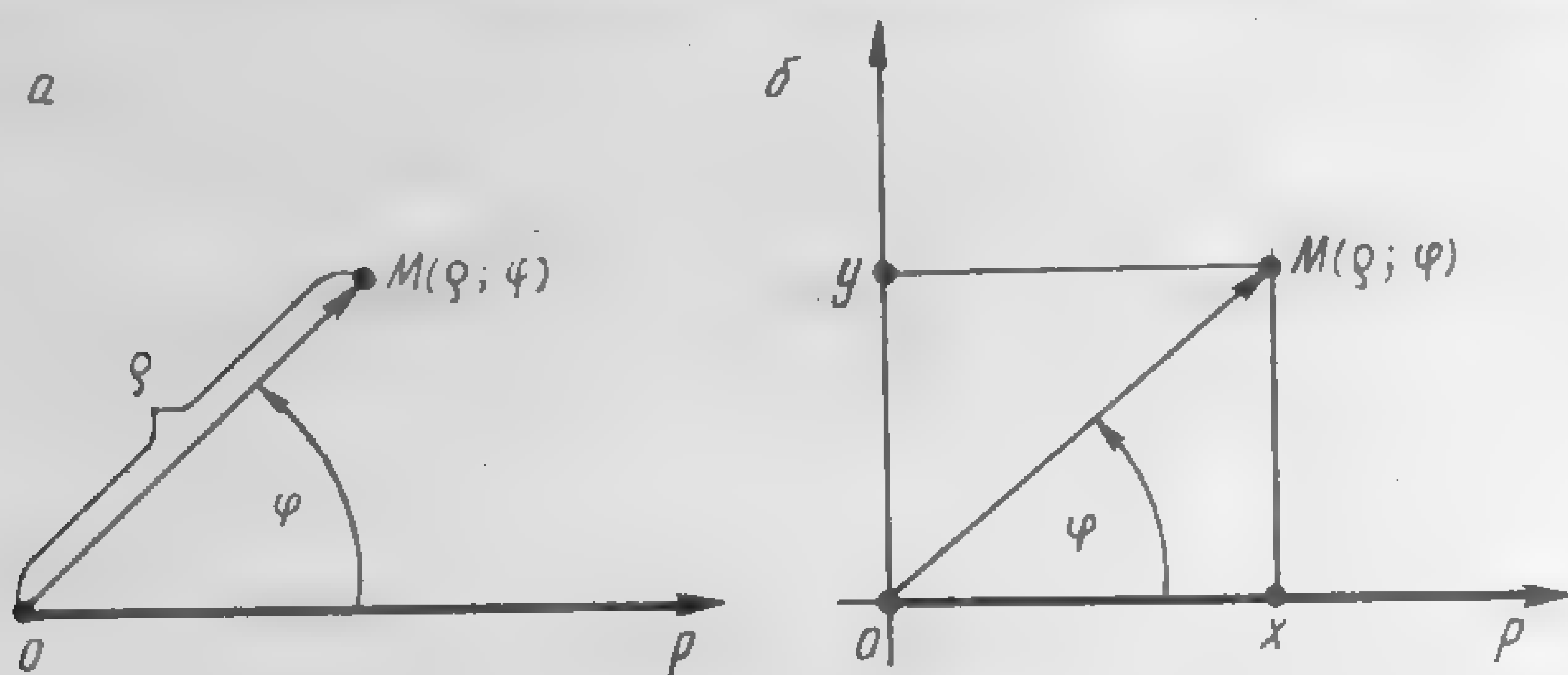
Верхні варыянт падвойных знакаў у формулах (3.36), (3.37) адпавядае выпадку, калі здзяйсняецца паралельны перанос і паварот каардынатных восяў, а ніжні — калі дадаткова адбываецца іх пераарыентацыя.

Разглядаючы агульную сітуацыю, заўважым, што з лагічнага пункту гледжання магчымы толькі два варыянты ўзаемнага становішча дзвюх сістэм каардынат — тыя, якія адлюстраваны на рыс. 3.19. У сувязі з гэтым формулы (3.27), (3.29), (3.30) вынікаюць з агульных формул (3.36) як прыватныя выпадкі.

З нагоды ўсяго сказанага прыходзім да высновы, што праўдзіцца сцверджанне: *усякая дэкартава прамавугольная сістэма каардынат на плоскасці можа быць*

атрымана з зададзенай (без змянення даўжыні базісных вектараў) у выніку скарыстання аднаго ці паслядоўна некалькіх пераўтварэнняў — паралельнага пераносу, павароту і пераарыентацыі.

5°. Палярная, цыліндрычная і сферычная сістэмы каардынат. Акрамя дэкартавай сістэмы каардынат на плоскасці шырока скарыстоўваецца *палярная сістэма каардынат.* З мэтай яе азначэння зафіксуем на плоскасці прамень Op, які назавем *палярнай воссю* (рыс. 3.20, *а*).



Рыс. 3.20

Пачатак O промня называецца *полюсам.* Выберам на Op адзінку маштаба для вымярэння даўжынь адрэзкаў. Кірунак павароту промня супраць руху гадзіннікавай стрэлкі будзем лічыць дадатным, а па руху гадзіннікавай стрэлкі — адмоўным. Будзем разглядаць паварот у дадатным кірунку.

Няхай M — адвольны пункт плоскасці, які адрозніваецца ад полюса O. Становішча гэтага пункта вызначаецца двума лікамі, якія называюцца *палярнымі каардынатамі:* $\rho=|\overrightarrow{OM}|$ — *палярны радыус,* $\varphi=(\widehat{\overrightarrow{OM}, Op})$ — *палярны вугал,* прычым вугал φ адлічваем ад Op у дадатным кірунку. Відавочна, што $\rho>0$, і будзем лічыць, што $\varphi\in[0, 2\pi)$ (паколькі $\varphi=\varphi+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$). Пункт M з палярнымі каардынатамі ρ і φ будзем абазначаць $M(\rho; \varphi)$, дзе $0\leqslant\rho<+\infty$; $\varphi\in[0, 2\pi)$. Пункт O мае $\rho=0$, а палярны вугал для яго нявызначаны. Па дамоўленасці будзем лічыць, што для O мае месца $\varphi=0$. Гэтым самым мы задалі ўзаемна адназначную адпаведнасць паміж пунктамі плоскасці і іх палярнымі каардынатамі.

Заўвага 3.3. Можна лічыць, што $\varphi\in(-\pi, \pi]$, разглядаючы пры азначэнні палярнай сістэмы дадатны і адмоўны павароты радыуса-вектара.

Высветлім узаемадачыненне паміж палярнымі і дэкартавымі каардынатамі аднаго і таго ж пункта M. Для гэтага палярную вось Op накіруем аднолькава з воссю Ox і сумясцім полюс O з пачаткам дэкартавай сістэмы каардынат (рыс. 3.20, *б*). З геаметрычных меркаванняў атрымліваем

$$\left.\begin{aligned} &x=\rho\cos\varphi,\\ &y=\rho\sin\varphi,\ \rho\in[0,\ +\infty),\ \varphi\in[0,\ 2\pi)\end{aligned}\right\}. \qquad (3.38)$$

Пададзеныя формулы (3.38) выражаюць *прамавугольныя дэкартавы каардынаты праз палярныя.* На падставе тэарэмы Піфагора і азначэння тангенса можам наадварот выразіць палярныя каардынаты праз дэкартавы:

$$\left.\begin{aligned} &\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\ &\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.\end{aligned}\right\} \qquad (3.39)$$

Заўважым, што апошняя формула ў сістэме (3.39) вызначае два вуглы φ і $\varphi+\pi$ (у межах ад 0 да 2π). Калі з умовы задачы зразумела, у якой чвэрці ляжыць пункт $(x;\ y)$, то выбіраем той з палярных вуглоў, які адпавядае задачы. У іншым выпадку для вызначэння φ карыстаюцца стасункамі:

$$\cos\varphi=x/\sqrt{x^2+y^2},\ \sin\varphi=y/\sqrt{x^2+y^2}.$$

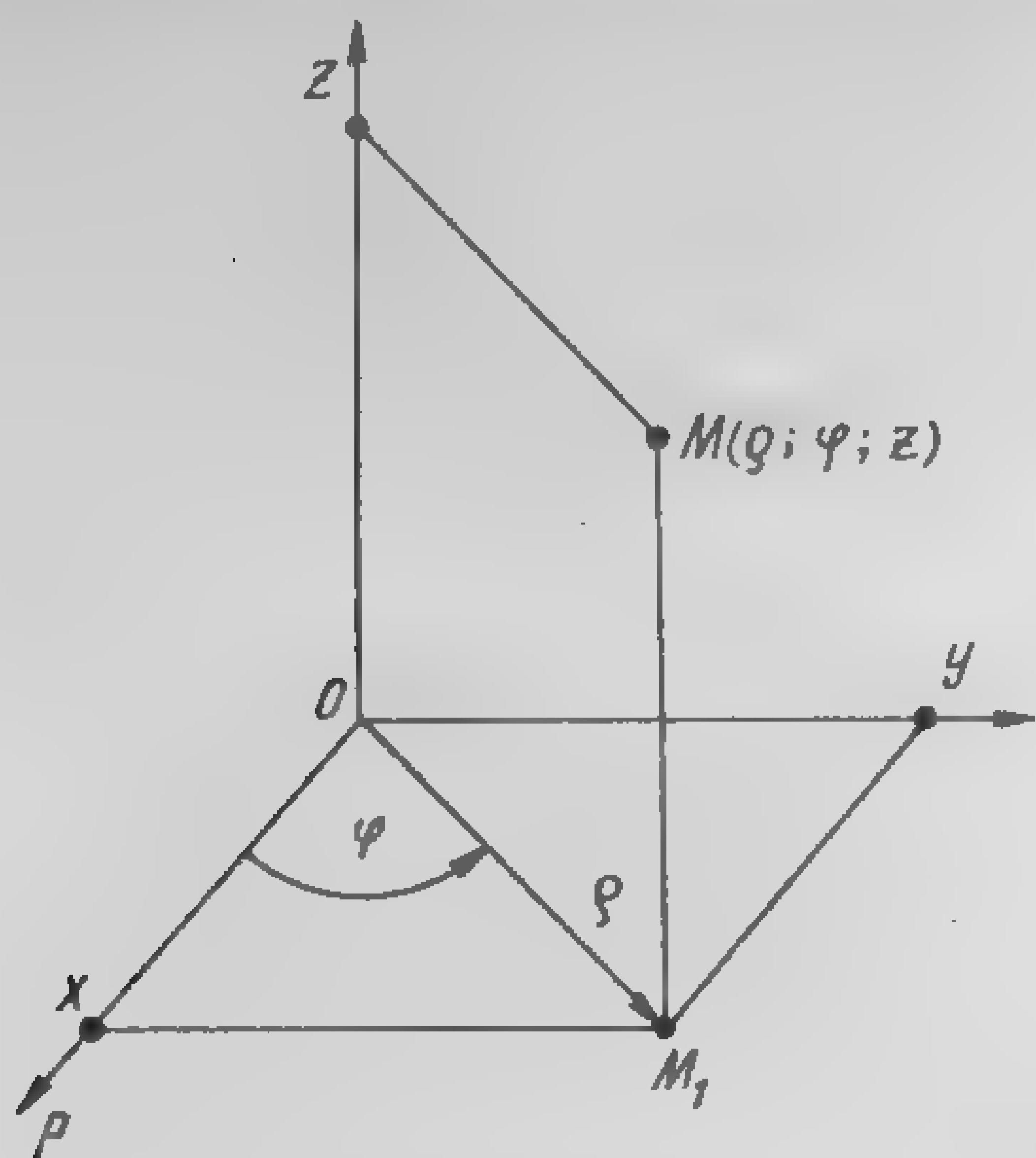
Акрамя дэкартавай сістэмы каардынат, у прасторы шырока скарыстоўваюць цыліндрычную і сферычную сістэмы каардынат.

У цыліндрычнай сістэме каардынат становішча адвольнага пункта M адназначна задаецца тройкай лікаў $(\rho;\ \varphi;\ z)$, дзе z — апліката пункта M; $z\in(-\infty,\ +\infty)$; $(\rho;\ \varphi)$ — палярныя каардынаты пункта M_1, які з'яўляецца праекцыяй пункта M на плоскасць xOy (рыс. 3.21).

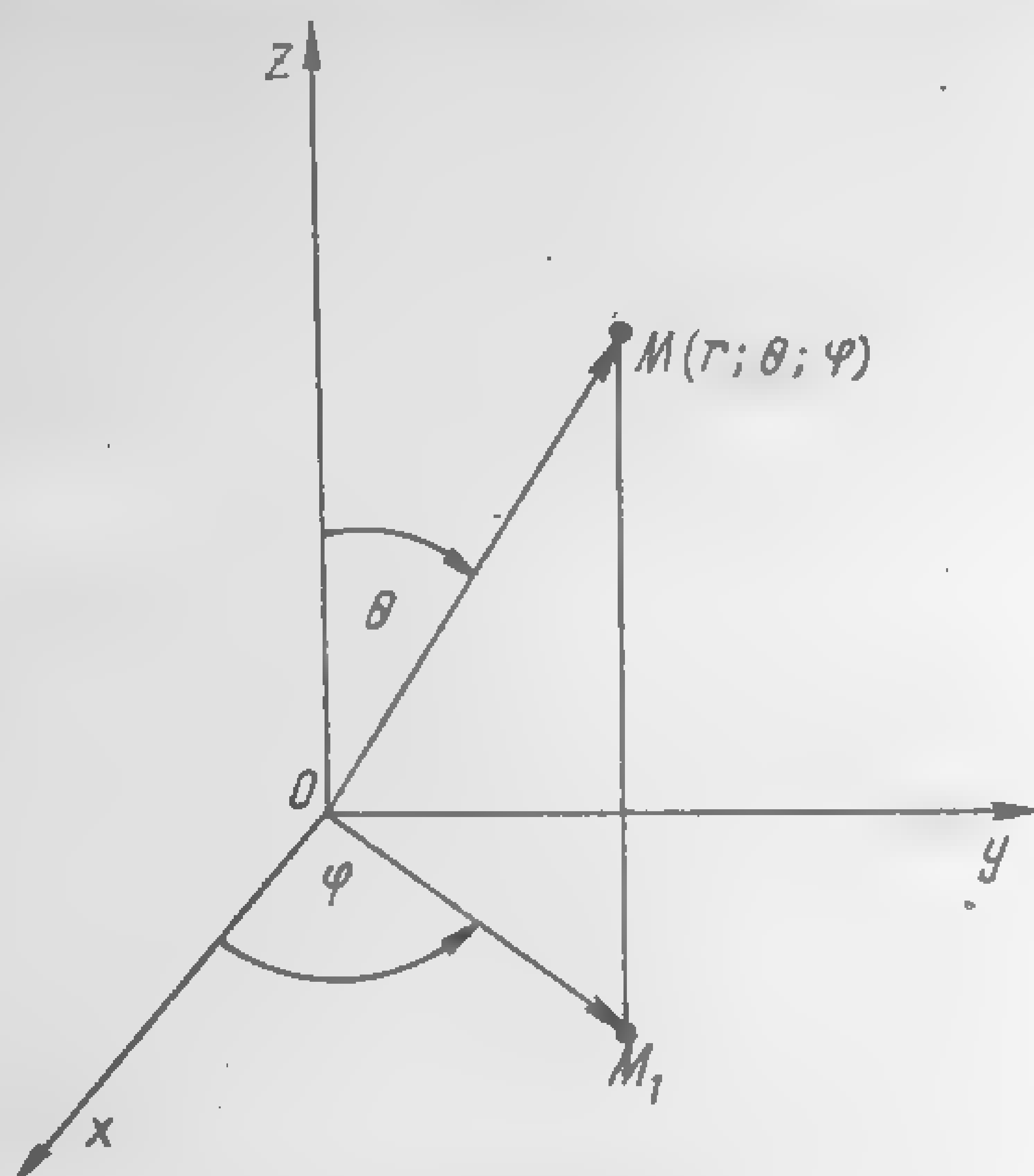
Будзем лічыць, што палярная вось на плоскасці xOy супадае з дадатным кірункам восі Ox пры сумяшчэнні іх пачаткаў. Тады маюць месца судачыненні

$$\left.\begin{aligned} &x=\rho\cos\varphi,\\ &y=\rho\sin\varphi,\\ &z=z,\ \rho\in[0,\ +\infty),\ \varphi\in[0,2\pi),\ z\in(-\infty,\ +\infty),\end{aligned}\right\} \qquad (3.40)$$

у справядлівасці якіх можна пераканацца з геаметрычных меркаванняў (гл. рыс. 3.21). Формулы (3.40) выражаюць *прамавугольныя дэкартавы каардынаты пункта* $M(x; y; z)$ *праз цыліндрычныя каардынаты гэтага пункта.*



Рыс. 3.21



Рыс. 3.22

Азначым *сферычную сістэму каардынат.* Няхай θ — найменшы вугал паміж воссю Oz і вектарам $\overrightarrow{OM}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \leqslant \pi)$, $r = |\overrightarrow{OM}|$, φ — вугал паміж воссю Ox і вектарам $\overrightarrow{OM_1}$ (M_1 — праекцыя пункта M на плоскасць xOy), які мы адлічваем ад дадатнага кірунку восі Ox супраць руху гадзіннікавай стрэлкі (рыс. 3.22). Лікі $(r; \theta; \varphi)$, якія адпавядаюць пункту M, называюцца *сферычнымі каардынатамі пункта* M.

Атрымаем *формулы перахода ад сферычных каардынат да прамавугольных дэкартавых.* Паколькі $\angle MOM_1 = \pi/2 - \theta$, то (гл. рыс. 3.22)

$$OM_1 = r\cos(\pi/2 - \theta) = r\sin\theta.$$

У сваю чаргу $x = OM_1 \cos\varphi$. З гэтых дзвюх роўнасцяў атрымліваем $x = \sin\theta\cos\varphi$. Аналагічныя формулы можна атрымаць для y і z. Такім чынам, справядлівыя стасункі:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta,\ r \in [0, +\infty),\ \varphi \in [0, 2\pi),\ \theta \in [0, \pi]. \end{array}\right\} \qquad (3.41)$$

Заўвага 3.4. Палярная, цыліндрычная і сферычная сістэмы не з'яўляюцца афіннымі сістэмамі каардынат.

1°. Скалярны здабытак і яго ўласцівасці. У § 3.1 былі разгледжаны лінейныя аперацыі з вектарамі, у выніку якіх зноў атрымліваецца вектар. Разгледзім новае дзеянне з вектарамі, вынікам якога з'яўляецца скаляр.

Азначэнне 3.7. *Скалярным здабыткам двух вектараў* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *называецца лік, які роўны здабытку даўжынь гэтых вектараў і косінуса вугла паміж імі.*

Будзем абазначаць скалярны здабытак вектараў $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ праз $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. З азначэння атрымліваем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \qquad (3.42)$$

Калі хаця б адзін з двух вектараў $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ёсць нулявы, то скалярны здабытак відавочна роўны нулю.

Улічваючы азначэнне праекцыі вектара на вось (формула (3.2)), заўважым, што $|\mathbf{a}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = P_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$ (лічым, што кірунак восі задае вектар $\mathbf{b}$, які ёй належыць) і $|\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = P_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ (вось зададзена вектарам $\mathbf{a}$). Скарыстоўваючы дзве апошнія роўнасці, з формулы (3.42) маем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\,P_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = |\mathbf{b}|\,P_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}). \qquad (3.43)$$

Для скалярнага здабытку вектараў справядлівыя наступныя ўласцівасці:

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$ — *камутатыўнасць;*

2) $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\alpha \in \mathbf{R}$,— *асацыятыўнасць;*

3) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$ — *дыстрыбутыўнасць;*

4) $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$.

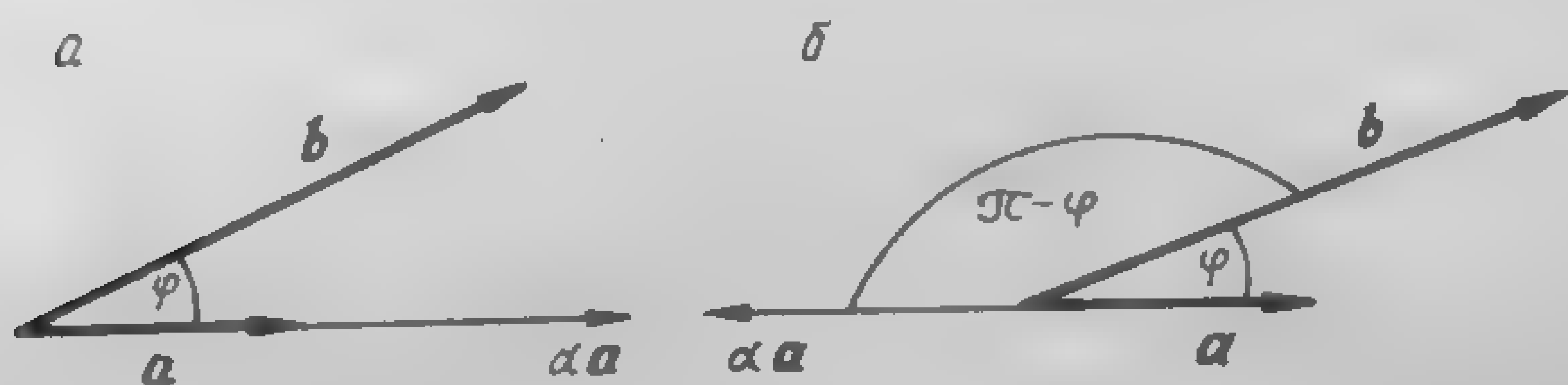
□ Камутатыўнасць скалярнага здабытку непасрэдна вынікае з азначэння гэтай аперацыі.

Абазначым $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ і для доказу роўнасці 2 разгледзім тры выпадкі. Калі $\alpha > 0$ (рыс. 3.23, *а*), то:

$$(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\alpha\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi = \alpha|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Калі $\alpha < 0$ (рыс. 3.23, *б*), то:

$$(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\alpha\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\pi - \varphi) = -\alpha|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|(-\cos\varphi) =$$
$$= \alpha|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$



Рыс. 3.23

Пры $\alpha=0$ роўнасць 2 відавочная.

Для доказу дыстрыбутыўнасці скалярнага здабытку выкарыстаем формулу (3.43), уласцівасці праекцыі і камутатыўнасць скалярнага здабытку. Атрымаем:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{c})=|\mathbf{c}|P_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=|\mathbf{c}|(P_{\mathbf{c}}(\mathbf{a})+P_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}))=$$
$$=|\mathbf{c}|P_{\mathbf{c}}(\mathbf{a})+|\mathbf{c}|P_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})=(\mathbf{a},\ \mathbf{c})+(\mathbf{b},\ \mathbf{c}),$$

што і даказвае ўласцівасць 3.

Паколькі $(\mathbf{a},\ \mathbf{a})=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}|\cos 0$, то справядлівасць формулы 4 даказана. ■

З а ў в а г а 3.5. Падчас карыстаюцца абазначэннем $(\mathbf{a},\ \mathbf{a})=\mathbf{a}^2$. Тады ўласцівасць 4 можна разглядаць як уласцівасць скалярнага квадрата: $\mathbf{a}^2=|\mathbf{a}|^2$.

З дапамогаю паняцця скалярнага здабытку можна сфармуляваць неабходную і дастатковую ўмовы артаганальнасці двух вектараў.

Тэарэма 3.8. *Два ненулявыя вектары з'яўляюцца артаганальнымі, калі і толькі калі іх скалярны здабытак роўны нулю.*

□ Н е а б х о д н а с ц ь. Няхай $(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})=\pi/2$ і $\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{b}\neq 0$. Тады $\cos(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})=0$ і $(\mathbf{a},\ \mathbf{b})=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cdot 0=0$.

Д а с т а т к о в а с ц ь. Няхай $(\mathbf{a},\ \mathbf{b})=0$ і $\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{b}\neq 0$. Значыць, $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})=0$, дзе $|\mathbf{a}|\neq 0$; $|\mathbf{b}|\neq 0$. Гэта магчыма толькі ў тым выпадку, калі $\cos(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})=0$ ці $(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})=\pi/2$. ■

З роўнасці (3.42) атрымліваем *формулу для вылічэння косінуса вугла паміж ненулявымі вектарамі*

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})=\frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}. \qquad (3.44)$$

Са стасункаў (3.43) можна атрымаць таксама *формулу для вылічэння праекцыі аднаго вектара на другі з выкарыстаннем скалярнага здабытку:*

$$P_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})=(\mathbf{a},\ \mathbf{b})/|\mathbf{a}|,\ P_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})=(\mathbf{a},\ \mathbf{b})/|\mathbf{b}|. \qquad (3.45)$$

Паняцце скалярнага здабытку мае шырокія практычныя дастасаванні. Напрыклад, з гледзішча фізікі скалярны здабытак вектара сілы $\mathbf{f}$ і вектара яе перамяшчэння $\mathbf{s}$ лікава роўны рабоце гэтай сілы: $A=(\mathbf{f},\ \mathbf{s})$.

2°. Скалярны здабытак у каардынатнай форме. Дапусцім, што разглядаюцца вектары з прасторы $\mathbf{R}^3$. Наступная тэарэма адказвае на пытанне аб выяўленні скалярнага здабытку ў каардынатнай форме пры ўмове, што вектары зададзены ў сістэме $\{0;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$.

Тэарэма 3.9. Скалярны здабытак двух вектараў $\mathbf{a}=(x_a;\ y_a;\ z_a)$ *і* $\mathbf{b}=(x_b;\ y_b;\ z_b)$ *роўны суме здабыткаў адпаведных каардынат:*

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b})=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b. \tag{3.46}$$

□ Паколькі адзінкавыя вектары сістэмы каардынат $\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$ перпендыкулярныя, атрымліваем:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{i},\ \mathbf{i})=(\mathbf{j},\ \mathbf{j})=(\mathbf{k},\ \mathbf{k})=1,\\ &(\mathbf{i},\ \mathbf{j})=(\mathbf{i},\ \mathbf{k})=(\mathbf{j},\ \mathbf{k})=0.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Разгледзім скалярны здабытак вектараў **a** і **b**, запісаўшы іх у форме раскладу па базісе $\{\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$. Для далейшых пераўтварэнняў скарыстаем уласцівасці скалярнага здабытку і роўнасці (3.47):

$$\begin{aligned}(\mathbf{a},\ \mathbf{b})&=(x_a\mathbf{i}+y_a\mathbf{j}+z_a\mathbf{k},\ x_b\mathbf{i}+y_b\mathbf{j}+z_b\mathbf{k})=\\ &=x_a x_b(\mathbf{i},\ \mathbf{i})+x_a y_b(\mathbf{i},\ \mathbf{j})+x_a z_b(\mathbf{i},\ \mathbf{k})+y_a x_b(\mathbf{j},\ \mathbf{i})+\\ &+y_a y_b(\mathbf{j},\ \mathbf{j})+y_a z_b(\mathbf{j},\ \mathbf{k})+z_a x_b(\mathbf{k},\ \mathbf{i})+z_a y_b(\mathbf{k},\ \mathbf{j})+\\ &+z_a z_b(\mathbf{k},\ \mathbf{k})=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Улічваючы тэарэму 3.8, прыходзім да высновы, што *неабходная і дастатковая ўмова артаганальнасці двух ненулявых вектараў* $\mathbf{a}=(x_a;\ y_a;\ z_a)$ *і* $\mathbf{b}=(x_b;\ y_b;\ z_b)$ *у каардынатнай форме* мае выгляд

$$x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b=0.$$

З формулы (3.46) для скалярнага квадрата атрымліваем:

$$\mathbf{a}^2=|\mathbf{a}|^2=(\mathbf{a},\ \mathbf{a})=x_a^2+y_a^2+z_a^2,$$

што дае для модуля вектара **a** наступнае выяўленне праз яго каардынаты:

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{(\mathbf{a},\ \mathbf{a})}=\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}. \tag{3.48}$$

Формула (3.48) — гэта тая ж формула (3.19) для даўжыні вектара, якую мы атрымалі іншым спосабам.

Скарыстоўваючы формулы (3.44), (3.46) і (3.48), вызначым у каардынатах косінус вугла паміж ненулявымі вектарамі:

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})=\frac{x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\ \sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}. \tag{3.49}$$

З формул (3.45), (3.46) і (3.48) атрымліваем для праекцыі вектара **b** на вектар **a** наступную формулу:

$$P_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})=(x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b)/\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}; \quad (3.50)$$

адпаведна для праекцыі **a** на **b** маем

$$P_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})=(x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b)/\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}.$$

Няхай вектар $\mathbf{a}=(x_a;\ y_a;\ z_a)$ праектуецца на вось L, якая ўтварае з каардынатнымі восямі Ox, Oy, Oz адпаведна вуглы α, β, γ. Атрымаем формулу такой праекцыі. Калі **e** — адзінкавы вектар восі L, то $(\mathbf{a},\ \mathbf{e})=|\mathbf{e}|P_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})=$ $=P_L(\mathbf{a})$. Улічваючы каардынаты адзінкавага вектара **e** (формула (3.26)) і азначэнне скалярнага здабытку ў каардынатнай форме (3.46), з апошняй роўнасці атрымліваем

$$P_L(\mathbf{a})=x_a\cos\alpha+y_a\cos\beta+z_a\cos\gamma.$$

На даканчанне адзначым, што аналагічныя судачыненні ў каардынатнай форме справядлівыя і для вектараў на плоскасці, толькі для іх ва ўсіх формулах адсутнічае трэцяя каардыната z вектара.

3°. Вектарны здабытак і яго ўласцівасці. Сфармулюем

Азначэнне 3.8. *Вектарным здабыткам двух вектараў* **a** *і* **b** *называецца такі вектар* $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$, *які падпарадкаваны наступным умовам:*

1) $|[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]|=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})$; (3.51)

2) *вектар* $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *перпендыкулярны кожнаму з вектараў* **a** *і* **b**;

3) *тройка вектараў* **a**, **b**, $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$ *мае правую арыентацыю.*

Аналізуючы ўмову (3.51), можна прыйсці да высновы, што модуль вектарнага здабытку двух вектараў лікава роўны плошчы паралелаграма, які пабудаваны на дадзеных двух вектарах (рыс. 3.24):

$$|[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]|=S. \quad (3.52)$$

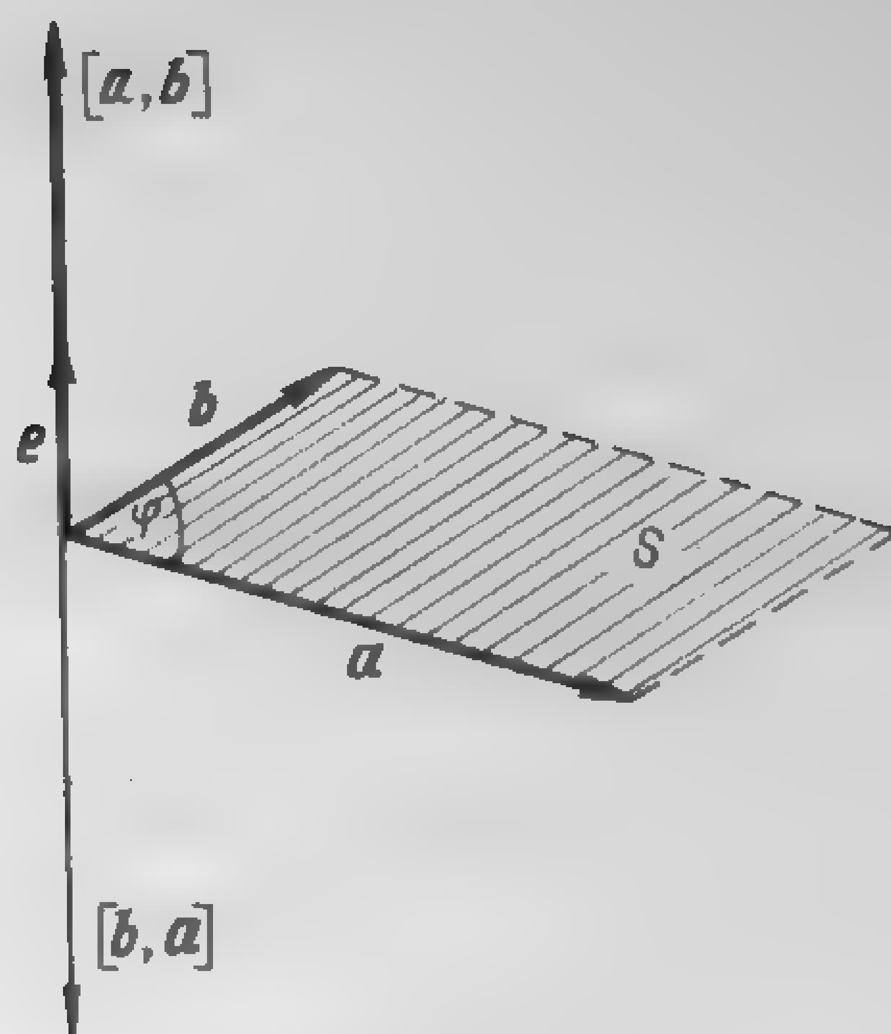
Паколькі мы можам унармаваць усякі ненулявы вектар, то атрымаем адзінкавы вектар **e** для $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$ дзяленнем на $|[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]|$. Тады

$$|[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]|\mathbf{e}=[\mathbf{a},\ \mathbf{b}].$$

З улікам апошняй роўнасці формула (3.52) можа быць запісана ў выглядзе

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]=S\mathbf{e},$$

дзе **e** — адзінкавы вектар кірунку $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$.



Рыс. 3.24

Заўважым, што калі хаця б адзін з вектараў **a**, **b** ёсць **0**, то $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=\mathbf{0}$.

Для вектарнага здабытку двух вектараў справядлівыя наступныя ўласцівасці:

1) *антыкамутатыўнасць:* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=-[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$;

2) *асацыятыўнасць:*

$$[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]=\alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \ \alpha\in\mathbf{R}, \tag{3.53}$$

$$[\mathbf{a}, \beta\mathbf{b}]=\beta[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \ \beta\in\mathbf{R}; \tag{3.54}$$

3) *дыстрыбутыўнасць:*

$$[\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}]=[\mathbf{a}, \mathbf{c}]+[\mathbf{b}, \mathbf{c}], \tag{3.55}$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}]=[\mathbf{a}, \mathbf{b}]+[\mathbf{a}, \mathbf{c}]. \tag{3.56}$$

☐ Для таго каб упэўніцца ў праўдзівасці ўласцівасці 1, заўважым, што $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|=|[\mathbf{b}, \mathbf{a}]|$. Разам з тым, тройка вектараў **b**, **a**, $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ мае правую арыентацыю (як патрабуецца ў азначэнні 3.8) толькі ў тым выпадку, калі вектар $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ накіраваны процілегла вектару $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (гл. рыс. 3.24).

Да роўнасці (3.53) з уласцівасці 2 прыходзім пасля наступных разважанняў. Вектары $[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ і $\alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ маюць аднолькавую даўжыню, таму што пры $\alpha>0$ выконваецца:

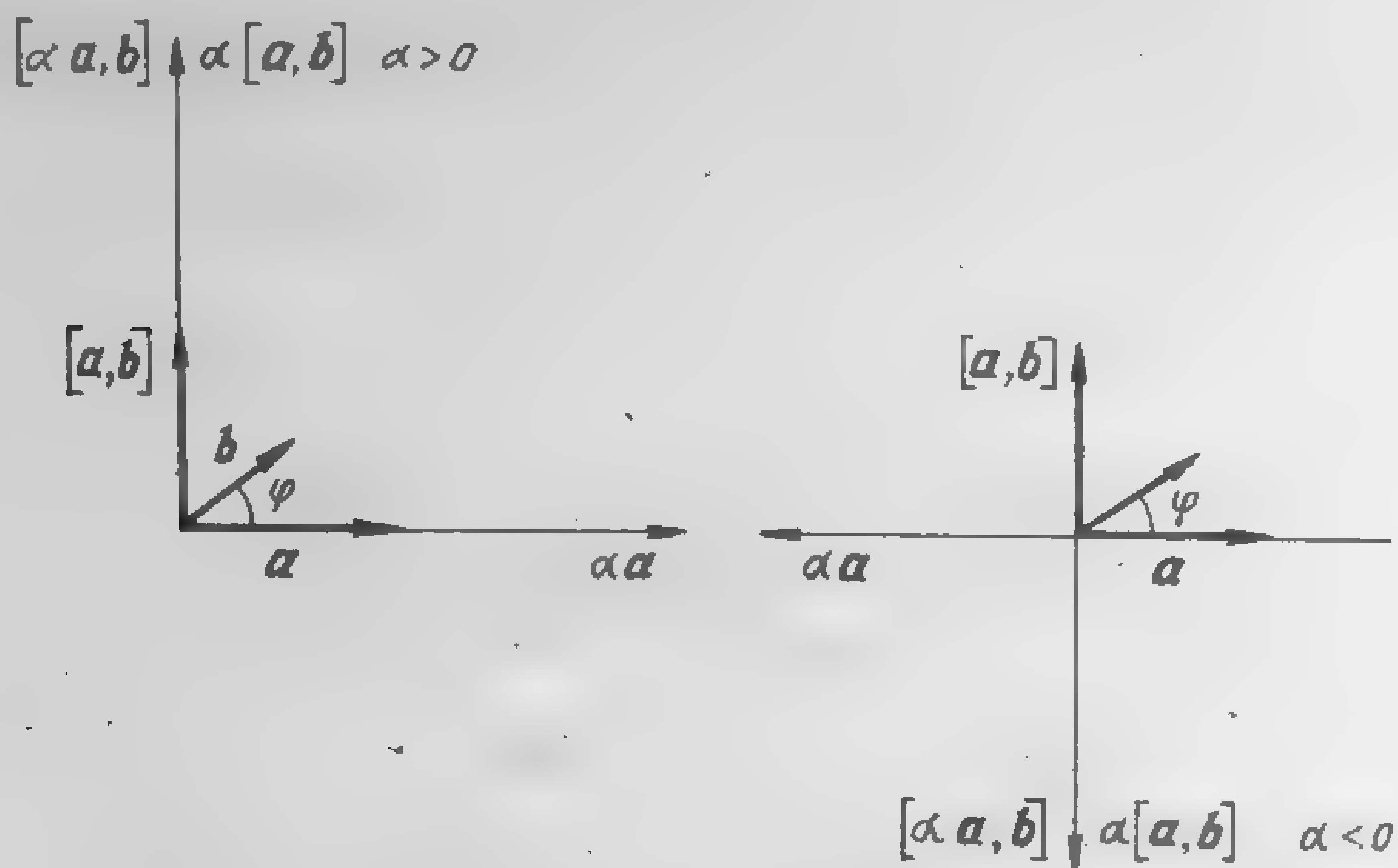
$$|[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]|=|\alpha\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi=\alpha|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi=\alpha|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|;$$

пры $a<0$ маем:

$$|[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]|=|\alpha\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin(\pi-\varphi)=-\alpha|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi=$$
$$=-\alpha|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|,$$

дзе $\varphi=(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$. Акрамя таго, гэтыя вектары аднолькава

накіраваныя. Сапраўды, пры $\alpha>0$ абодва маюць той жа кірунак, што і вектар $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, ▪ пры $\alpha<0$ — процілеглы (рыс. 3.25). Калі $\alpha=0$, то формула (3.53) відавочная.



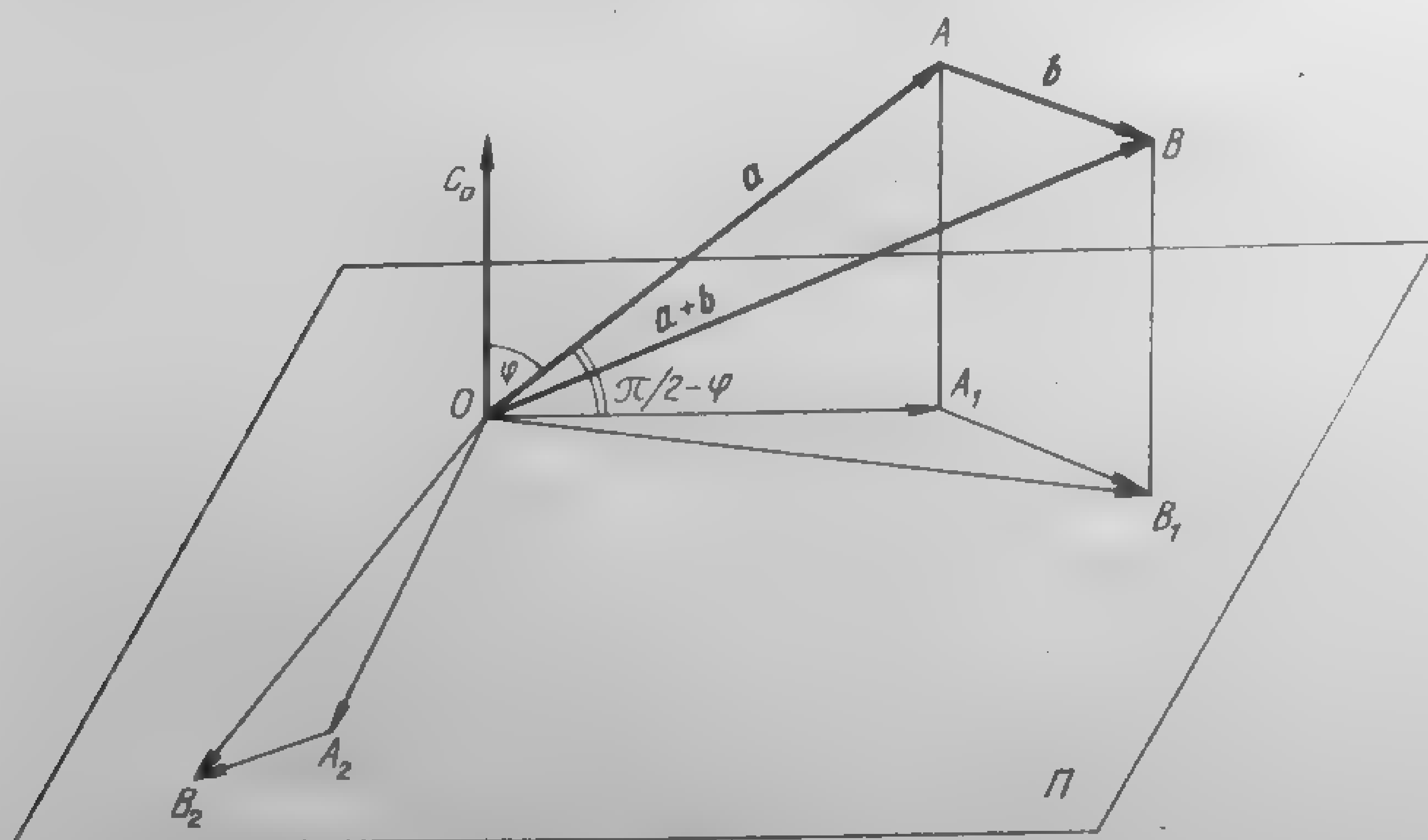
Рыс. 3.25

Роўнасць (3.54) атрымаем, калі скарыстаем першую ўласцівасць і формулу (3.53):

$$[\mathbf{a},\ \beta\mathbf{b}]=-[\beta\mathbf{b},\ \mathbf{a}]=-\beta[\mathbf{b},\ \mathbf{a}]=\beta[\mathbf{a},\ \mathbf{b}].$$

Дакажам спачатку, што формула (3.55) мае месца, калі ў якасці $\mathbf{c}$ у ёй разглядаецца адзінкавы вектар $\mathbf{c}_0=\mathbf{c}/|\mathbf{c}|$. Для гэтага выпадку здзейснім адпаведную пабудову (рыс. 3.26).

Замацуем у пункце O вектары $\mathbf{c}_0$ і $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$.



Рыс. 3.26

Адложым ад канца вектара **a** вектар $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$. Атрымаем вектар $\overrightarrow{OB}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Правядзем праз пункт O плоскасць П, якая перпендыкулярная вектару $\mathbf{c}_0$. Спраектуем на гэтую плоскасць пункты A, B і атрымаем адпаведна пункты A_1, B_1. Для вектара **a** геаметрычнай праекцыяй на плоскасць П з'яўляецца вектар $\overrightarrow{OA_1}$, для **b** — вектар $\overrightarrow{A_1B_1}$, для $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ — вектар $\overrightarrow{OB_1}$.

Павернем у плоскасці П кожны з вектараў $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$ на вугал $\pi/2$ вакол пункту O па руху гадзіннікавай стрэлкі, калі глядзець з канца вектара $\mathbf{c}_0$. Трохвугольнік OA_1B_1 зойме становішча трохвугольніка OA_2B_2. Вектар $\overrightarrow{OA_2}$, які атрыманы ў выніку павароту вектара $\overrightarrow{OA_1}$, ёсць вектарны здабытак вектараў **a** і $\mathbf{c}_0$. Сапраўды:

1) улічваючы азначэнне алгебраічнай праекцыі, атрымліваем:

$$|\overrightarrow{OA_2}|=|\overrightarrow{OA_1}|=|\mathbf{a}|\cos(\pi/2-\varphi)=|\mathbf{a}|\sin\varphi=$$
$$=|\mathbf{a}|\cdot 1\cdot \sin\varphi=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{c}_0|\sin\varphi,\quad \varphi=(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}_0});$$

2) вектар $\overrightarrow{OA_2}$ перпендыкулярны вектарам $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}_0$ па пабудове;

3) вектары $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}_0$, $\overrightarrow{OA_2}$ утвараюць правую тройку вектараў. Паколькі азначэнне 3.8 выконваецца, маем $\overrightarrow{OA_2}=[\mathbf{a},\mathbf{c}_0]$.

Калі вектар **b** перанесці ў пункт O, то, дзякуючы аналагічным развaжанням, атрымаем $\overrightarrow{A_2B_2}=[\mathbf{b},\mathbf{c}_0]$. З той жа прычыны $\overrightarrow{OB_2}=[\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}_0]$.

Улічваючы апошнія тры роўнасці і тое, што $\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}$, атрымліваем

$$[\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}_0]=[\mathbf{a},\mathbf{c}_0]+[\mathbf{b},\mathbf{c}_0]. \qquad (3.57)$$

Паколькі $\mathbf{c}=|\mathbf{c}|\mathbf{c}_0$, то пасля множання стасунку (3.57) на лік $|\mathbf{c}|$, згодна з роўнасцю (3.54), пераконваемся ў праўдзівасці формулы (3.55).

Формула (3.56) вынікае з першай уласцівасці і формулы (3.55):

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b}+\mathbf{c}]=-[\mathbf{b}+\mathbf{c},\ \mathbf{a}]=-[\mathbf{b},\ \mathbf{a}]-[\mathbf{c},\ \mathbf{a}]=$$
$$=[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]+[\mathbf{a},\ \mathbf{c}].\ \blacksquare$$

З дапамогаю паняцця вектарнага здабытку можна сфармуляваць неабходную і дастатковую ўмовы калініярнасці вектараў.

Тэарэма 3.10. *Два ненулявыя вектары ёсць калініярныя, калі і толькі калі іх вектарны здабытак роўны нулявому вектару.*

☐ Неабходнасць. Няхай $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$ і $\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{b}\neq 0$. Тады $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=0$ ці $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=\pi$, што дае $\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=0$. Згодна з роўнасцю (3.51), атрымліваем $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]=\mathbf{0}$.

Дастатковасць. Няхай $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]=\mathbf{0}$ і $\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{b}\neq 0$. З улікам роўнасці (3.51) гэта магчыма ў выпадку, калі $\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=0$. На падставе азначэння вугла паміж вектарамі атрымліваем $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=0$ ці $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=\pi$. Абодва гэтыя выпадкі адпавядаюць калініярнасці вектараў $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. ■

У якасці выніку з тэарэмы 3.10 атрымліваем $[\mathbf{a},\ \mathbf{a}]=\mathbf{0}$.

Вышэй было сказана, што геаметрычны сэнс модуля вектарнага здабытку двух вектараў палягае ў тым, што гэта ёсць плошча паралелаграма, які пабудаваны на дадзеных вектарах. Вектарны здабытак мае свае дастасаванні і ў механіцы. Калі сіла зададзена вектарам $\mathbf{f}$, які замацаваны ў канцы M вектара $\mathbf{a}=\overrightarrow{OM}$, то вектар $[\mathbf{a},\ \mathbf{f}]$ ёсць момант сілы $\mathbf{f}$ у дачыненні да пункту O.

4°. Змяшаны здабытак вектараў і яго ўласцівасці. Сфармулюем

Азначэнне 3.9. *Змяшаным здабыткам трох вектараў* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *называецца лік, які атрымліваецца ў выніку скалярнага множання вектара* $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$ *на вектар* $\mathbf{c}$.

Змяшаны здабытак вектараў $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ абазначым $(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})$:

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})\overset{\text{def}}{=}([\mathbf{a},\ \mathbf{b}],\ \mathbf{c}).$$

Заўважым, што калі хаця б адзін з трох вектараў ёсць $\mathbf{0}$, то іх змяшаны здабытак роўны 0.

Для змяшанага здабытку вектараў характэрныя наступныя ўласцівасці:

1) *калі* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *ёсць некампланарныя вектары, то*

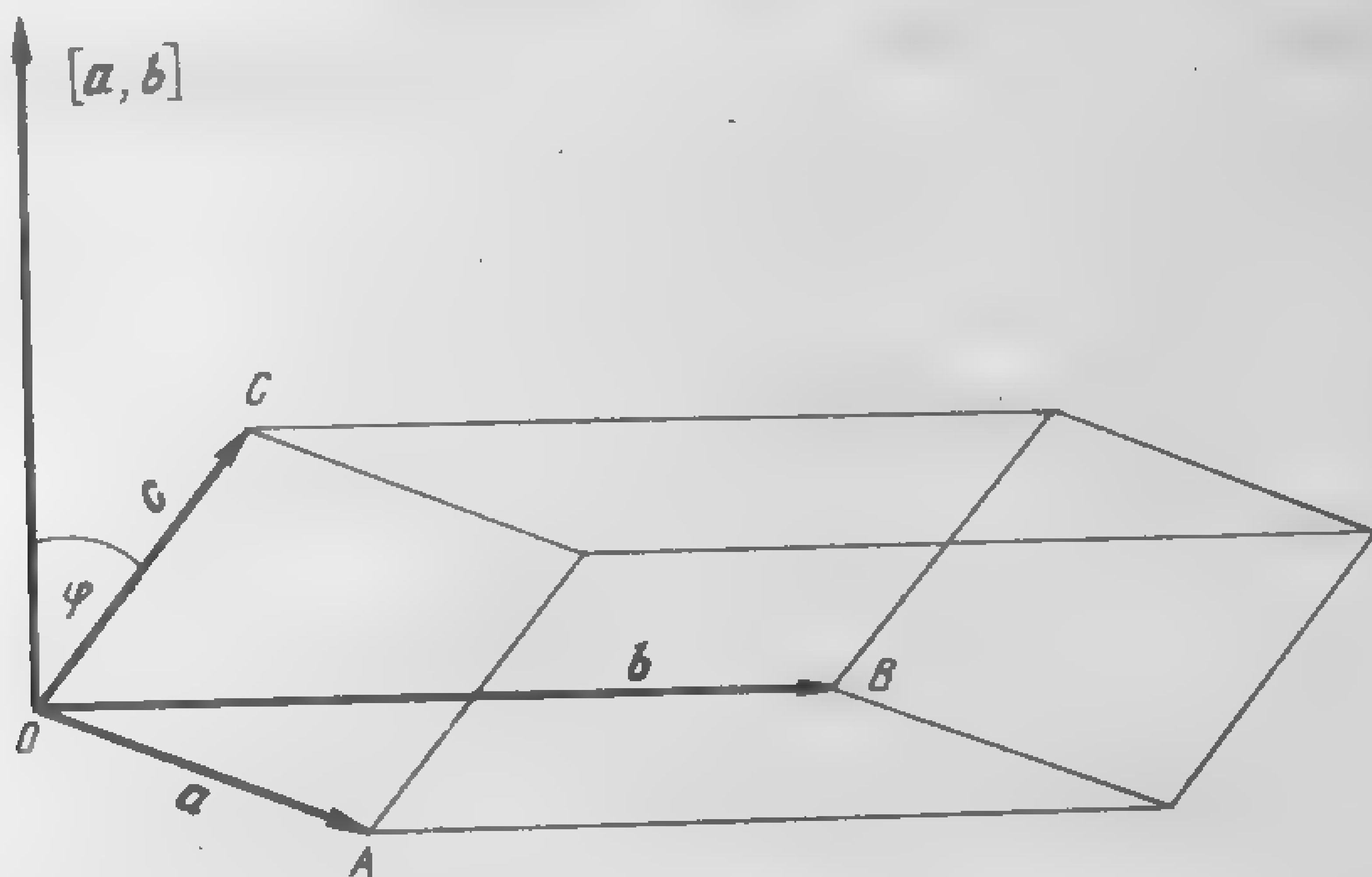
$$|(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})|=V, \tag{3.58}$$

дзе V — аб'ём паралелепіпеда, што пабудаваны на вектарах **a**, **b**, **c**;

2) $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$;

3) $(\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

□ Няхай $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ і вектары **a**, **b**, **c** утвараюць правую тройку. Пабудуем паралелепіпед, у якога кантамі з'яўляюцца вектары **a**, **b**, **c** (рыс. 3.27).



Рыс. 3.27

Згодна з азначэннем 3.9,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|\,|\mathbf{c}|\cos\varphi,$$

дзе φ — вугал паміж вектарамі [**a**, **b**] і **c**. Але (гл. формулу (3.52)) $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = S$, дзе S — плошча паралелаграма, пабудаванага на вектарах **a**, **b**; $|\mathbf{c}|\cos\varphi = \pm H$, дзе H — вышыня паралелепіпеда. Калі вектары **a**, **b**, **c** утвараюць правую тройку (вугал φ востры), то $|\mathbf{c}|\cos\varphi = H$, а калі левую* (вугал φ тупы),— то $|\mathbf{c}|\cos\varphi = -H$. Гэта азначае, што

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \pm SH = \pm V, \qquad (3.59)$$

адкуль вынікае формула (3.58).

Для доказу другой уласцівасці заўважым, што вектары **a**, **b**, **c** і **b**, **c**, **a** маюць аднолькавую арыентацыю (абедзве тройкі адначасова правыя ці левыя). Гэта азначае, што для іх у формуле (3.59) велічыня V бярэцца з адным і тым жа знакам. Значыць, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a})$ ці $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = ([\mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{a})$. З прычыны камутатыўнасці ска-

---

* Вектары **a**, **b**, **c** утвараюць левую тройку, калі з канца трэцяга вектара **c** найменшы паварот вектара **a** да кірунку вектара **b** адбываецца па руху гадзіннікавай стрэлкі.

лярнага здабытку з апошняй роўнасці атрымліваем патрэбнае.

Праўдзівасць трэцяй уласцівасці вынікае з праўдзівасці другой і камутатыўнасці скалярнага здабытку. Сапраўды,

$$(\alpha\mathbf{a}_1+\beta\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})=([\alpha\mathbf{a}_1+\beta\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b}],\ \mathbf{c})=$$
$$=(\alpha\mathbf{a}_1+\beta\mathbf{a}_2,\ [\mathbf{b},\ \mathbf{c}])=\alpha(\mathbf{a}_1,\ [\mathbf{b},\ \mathbf{c}])+$$
$$+\beta(\mathbf{a}_2,\ [\mathbf{b},\ \mathbf{c}])=\alpha(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})+\beta(\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}).\ \blacksquare$$

Заўвага 3.6. Калі ў змяшаным здабытку вектараў **a**, **b**, **c** памяняць месцамі два вектары, то здабытак зменіць знак (мяняецца арыентацыя тройкі вектараў). Увогуле, для змяшанага здабытку трох вектараў маюць месца наступныя судачыненні:

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})=(\mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{a})=(\mathbf{c},\ \mathbf{a},\ \mathbf{b})=-(\mathbf{b},\ \mathbf{a},\ \mathbf{c})=$$
$$=-(\mathbf{c},\ \mathbf{b},\ \mathbf{a})=-(\mathbf{a},\ \mathbf{c},\ \mathbf{b}).$$

Пададзены ланцуг роўнасцяў атрымліваецца як вынік з формулы (3.58) і ўласцівасці 2.

З дапамогаю паняцця змяшанага здабытку могуць быць сфармуляваны *неабходная і дастатковая ўмовы кампланарнасці трох вектараў.*

Тэарэма 3.11. *Тры ненулявыя вектары ёсць кампланарныя, калі і толькі калі іх змяшаны здабытак роўны нулю.*

□ Неабходнасць. Калі маем тры ненулявыя кампланарныя вектары **a**, **b**, **c**, то $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]\perp\mathbf{c}$. Але для артаганальных вектараў выконваецца $([\mathbf{a},\ \mathbf{b}],\ \mathbf{c})=0$ (тэарэма 3.8). Згодна з азначэннем 3.9, атрымліваем $(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})=0$.

Дастатковасць. Доказ ажыццявім ад процілеглага. Няхай $(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})=0$ і вектары **a**, **b**, **c** не ёсць кампланарныя. Тады на іх, як на кантах, можна пабудаваць паралелепіпед і, улічваючы геаметрычны сэнс змяшанага здабытку (формула (3.58)), атрымліваем $|(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})|=V\neq\neq 0$. Супярэчнасць, якую мы выявілі, даказвае тэарэму. ■

5°. Падвойны вектарны здабытак. Азначым яшчэ адно дзеянне з вектарамі.

Азначэнне 3.10. *Падвойным вектарным здабыткам трох вектараў* **a**, **b**, **c** *называецца вектар выгляду* $\mathbf{d}=[[\mathbf{a},\ \mathbf{b}],\ \mathbf{c}]$.

Адзначым, што падвойны вектарны здабытак ёсць вектар, які кампланарны з вектарамі **a** і **b**. Сапраўды, гэты вектар (паводле азначэння вектарнага здабытку) перпендыкулярны вектару $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$, які ў сваю чаргу перпендыкулярны вектарам **a**, **b** (рыс. 3.28).

Паняцце падвойнага вектарнага здабытку даволі часта скарыстоўваецца ў механіцы. Пакажам, што яго можна вылічаць з дапамогаю больш простага выразу.

Тэарэма 3.12. *Для ўсякіх ненулявых вектараў* **a**, **b**, **c** *праўдзіцца роўнасць*

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] = (\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a}. \quad (3.60)$$

□ На падставе кампланарнасці вектараў **a**, **b**, **c** прыходзім да высновы, што

$$\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}. \quad (3.61)$$

Для вызначэння скалярных множнікаў у роўнасці (3.61) разгледзім два дапаможныя вектары $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{b}_1$: першы з іх мае тую ж даўжыню, што вектар **a**, і атрыманы паваротам вектара **a** на $\pi/2$ у бок вектара **b**; другі — роўны па модулі вектару **b** і атрыманы з яго паваротам на $\pi/2$ у бок вектара **a**. Зыходзячы з вызначаных такім чынам вектараў, заўважым, што (рыс. 3.29)

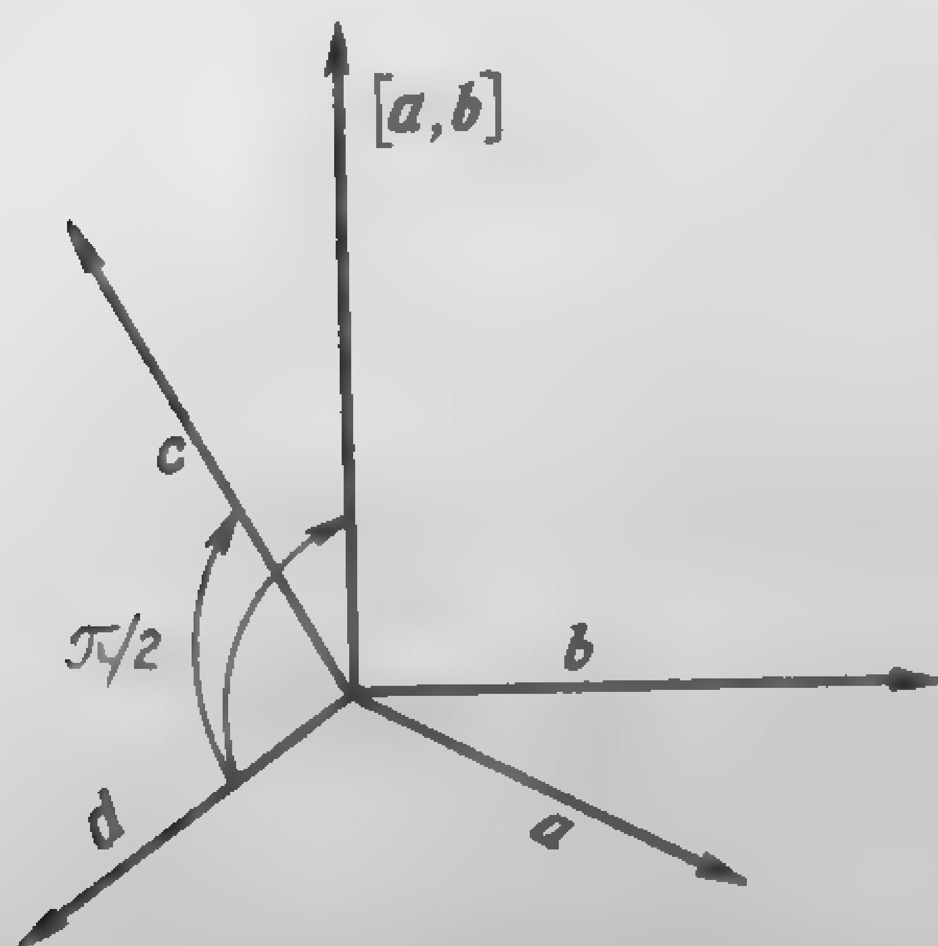
$$(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}_1}) = (\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}_1}) = \pi/2 - \varphi,$$

дзе φ — вугал паміж вектарамі **a** і **b**. На падставе апошняй роўнасці маем $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$. Але паводле азначэння 3.9, згодна з формулай (3.51), справядлівая роўнасць $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, а таму

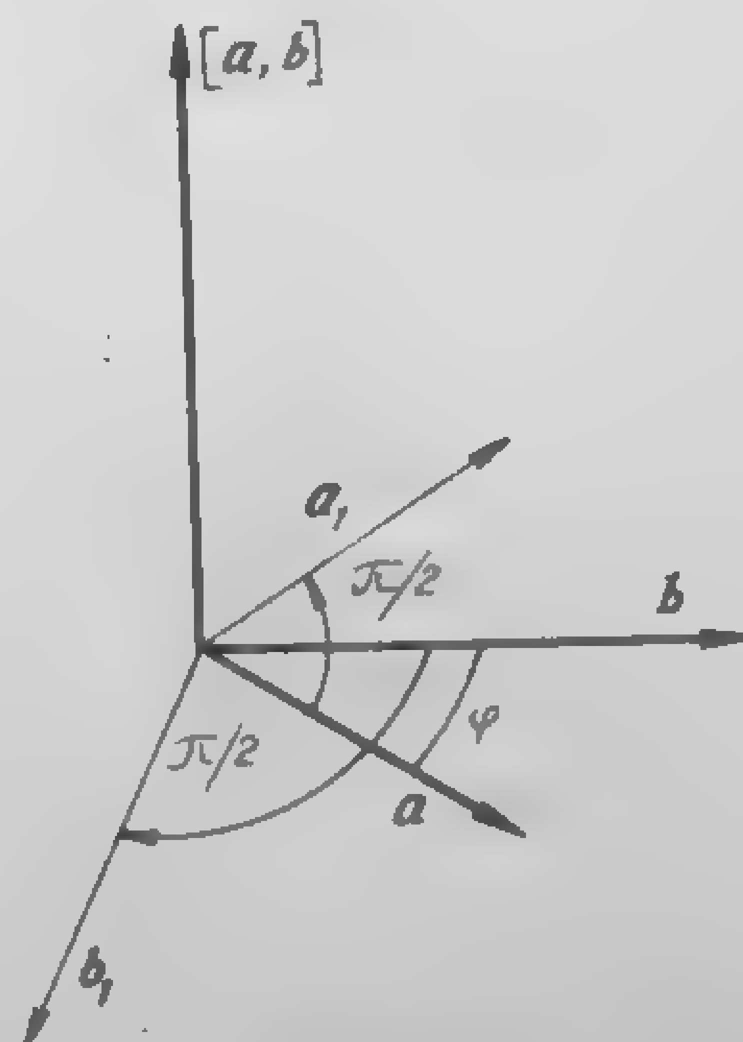
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|.$$

Акрамя гэтага, у выніку перпендыкулярнасці вектараў атрымліваем

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}) = 0.$$



Рыс. 3.28



Рыс. 3.29

Памножым скалярна вектар $\mathbf{d}$ спачатку на $\mathbf{a}_1$, а затым на $\mathbf{b}_1$. Скарыстаўшы правую частку роўнасці (3.61), знаходзім (з улікам дзвюх апошніх роўнасцяў):

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{d}) = \lambda(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) = \mu|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|,$$
$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{d}) = \lambda(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}) = \lambda|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|. \quad (3.62)$$

Згодна з нашым абазначэннем,

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}_1, [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]),$$
$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{d}) = (\mathbf{b}_1, [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]).$$

Далей скарыстаем уласцівасць 2 змяшанага здабытку і атрымаем:

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{d}) = ([\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]], \mathbf{c}),$$
$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{d}) = ([\mathbf{b}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]], \mathbf{c}). \quad (3.63)$$

На падставе правіла пабудовы вектарнага здабытку з дапамогай рыс. 3.29 няцяжка ўпэўніцца ў праўдзівасці роўнасцяў:

$$[\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \quad |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|\mathbf{a},$$
$$[\mathbf{b}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = -|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|\mathbf{b}.$$

З іх улікам стасункі (3.63) набываюць выгляд:

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{d}) = \quad |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|(\mathbf{a}, \mathbf{c}),$$
$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{d}) = -|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (3.64)$$

Параўноўваючы правыя часткі роўнасцяў (3.64) і (3.62), знаходзім значэнні шуканых лікаў: $\lambda = -(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, $\mu = (\mathbf{a}, \mathbf{c})$, якія пры падстанове ў роўнасць (3.61) даюць (3.60). ■

6°. Вектарны і змяшаны здабыткі ў каардынатнай форме. Няхай у дэкартавай прамавугольнай сістэме каардынат $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ зададзены два вектары $\mathbf{a} = x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k}$, для якіх разгледзім вектарны здабытак

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k},\ x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k}].$$

З улікам уласцівасцяў (3.53) — (3.56) можам запісаць яго ў выглядзе

$$\begin{aligned}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = x_a x_b[\mathbf{i}, \mathbf{i}] + x_a y_b[\mathbf{i}, \mathbf{j}] + x_a z_b[\mathbf{i}, \mathbf{k}] + \\ + y_a x_b[\mathbf{j}, \mathbf{i}] + y_a y_b[\mathbf{j}, \mathbf{j}] + y_a z_b[\mathbf{j}, \mathbf{k}] + \\ + z_a x_b[\mathbf{k}, \mathbf{i}] + z_a y_b[\mathbf{k}, \mathbf{j}] + z_a z_b[\mathbf{k}, \mathbf{k}].\end{aligned} \quad (3.65)$$

У роўнасці (3.65) маем $[\mathbf{i}, \mathbf{i}]=[\mathbf{j}, \mathbf{j}]=[\mathbf{k}, \mathbf{k}]=\mathbf{0}$ (паколькі разглядаюцца здабыткі калініярных вектараў), $[\mathbf{i}, \mathbf{j}]=\mathbf{k}$, $[\mathbf{j}, \mathbf{k}]=\mathbf{i}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{i}]=\mathbf{j}$ (на падставе азначэння вектарнага здабытку), а таксама $[\mathbf{j}, \mathbf{i}]=-\mathbf{k}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{j}]=-\mathbf{i}$, $[\mathbf{i}, \mathbf{k}]=-\mathbf{j}$ (згодна з антыкамутатыўнасцю вектарнага здабытку). Улічваючы гэтыя стасункі, з роўнасці (3.65) прыходзім да роўнасці

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=x_a y_b \mathbf{k}-x_a z_b \mathbf{j}-y_a x_b \mathbf{k}+ \\ +y_a z_b \mathbf{i}+z_a x_b \mathbf{j}-z_a y_b \mathbf{i},$$

якую можна запісаць у выглядзе

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=(y_a z_b-z_a y_b)\mathbf{i}-(x_a z_b-z_a x_b)\mathbf{j}+ \\ +(x_a y_b-y_a x_b)\mathbf{k}.$$

З мэтай кампактнага запісу апошняй формулы скарыстаем азначэнне вызначніка другога парадку:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}\mathbf{k}. \quad (3.66)$$

З гэтай роўнасці, згодна з азначэннем вызначніка трэцяга парадку, атрымліваем формулу для вылічэння здабытку ў каардынатнай форме:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}. \quad (3.67)$$

Заўважым, што ў першым радку вызначніка (3.67) замест лікаў стаяць вектары $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, аднак мы раскладаем яго па першым радку такім жа чынам, як і для лікаў.

Грунтуючыся на формуле (3.67) і тэарэме 3.10, атрымліваем сцверджанне: *два ненулявыя вектары* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *ёсць калініярныя, калі і толькі калі для іх каардынат выконваецца роўнасць*

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}=\mathbf{0}.$$

Згодна з азначэннем змяшанага здабытку, а таксама з формуламі (3.46) і (3.66) для вылічэння скалярнага і вектарнага здабыткаў у каардынатнай форме, маем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} x_c - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} y_c + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} z_c.$$

Калі на правую частку атрыманай роўнасці паглядзець як на расклад вызначніка па трэцім радку, то яна набудзе больш кампактны выгляд:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}. \qquad (3.68)$$

Роўнасць (3.68) з'яўляецца формулай для вылічэння змяшанага здабытку ў каардынатнай форме.

Апошняя формула (разам з тэарэмай 3.11) дае магчымасць пераканацца, што справядлівае сцверджанне: *тры ненулявыя вектары* **a**, **b**, **c** *ёсць кампланарныя, калі і толькі калі для іх каардынат выконваецца роўнасць*

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = 0.$$

Заўважым, што па знаку вызначніка (3.68) мы можам адразу сказаць, якую арыентацыю мае тройка вектараў **a**, **b**, **c**. Калі вызначнік ёсць дадатны лік, то вектары **a**, **b**, **c** утвараюць правую тройку, калі адмоўны — левую (гл. формулу (3.59)).

З а ў в а г а 3.7. Для вылічэння падвойнага вектарнага здабытку ў каардынатнай форме трэба скарыстаць азначэнне 3.11 і формулу (3.66): знайсці спачатку каардынаты вектара [**a**, **b**], а затым — каардынаты вектара [[**a**, **b**], **c**]. Але мэта будзе дасягнута хутчэй, калі мы скарыстаем формулу (3.60), у якой лікавыя каэфіцыенты знаходзяць як скалярныя здабыткі (**a**, **c**), (**b**, **c**) у каардынатнай форме.

4. АНАЛІТЫЧНАЯ ГЕАМЕТРЫЯ

Аналітычная геаметрыя ёсць раздзел матэматыкі, які вывучае ўласцівасці геаметрычных аб'ектаў з дапамогай алгебраічных раўнанняў. Метад, якім аналітычная геаметрыя ажыццяўляе гэту задачу, ёсць метад каардынат. У папярэднім раздзеле мы далі азначэнне дэкартавай прамавугольнай, палярнай і іншых сістэм каардынат. У гэтым раздзеле выкарыстаем іх для вызначэння раўнанняў прамой, плоскасці, ліній другога парадку на плоскасці, паверхняў другога парадку ў прасторы і разгледзім некаторыя іх геаметрычныя ўласцівасці. Натуральна, што класіфікацыя ліній і паверхняў будзе разглядацца на падставе асаблівасцяў іх раўнанняў.

Адзначым, што мы будзем мець справу з алгебраічнымі лініямі і паверхнямі. Лінія на плоскасці называецца *алгебраічнай*, калі яна ў некаторай дэкартавай сістэме каардынат Oxy вызначаецца раўнаннем $F(x, y)=0$, левая частка якога ёсць мнагасклад ад дзвюх зменных x, y. *Парадкам алгебраічнай лініі* называецца найменшая ступень магчымых алгебраічных раўнанняў лініі.

Паверхня называецца *алгебраічнай*, калі левая частка яе раўнання $F(x, y, z)=0$ у некаторай дэкартавай прамавугольнай сістэме каардынат $Oxyz$ ёсць мнагасклад. Ступень мнагасклада $F(x, y, z)$ дае *парадак алгебраічнай паверхні*. У далейшым слова «алгебраічная» ужывацца не будзе.

4.1. ПРАМАЯ НА ПЛОСКАСЦІ*

1°. Раўнанні прамой. Няхай на плоскасці зададзена некаторая прамая L. З геаметрычных меркаванняў вынікае, што прамая L у сістэме Oxy будзе цалкам вызначаная ў тых выпадках, калі зададзены: 1) пункт $M_0 \in L$ і ненулявы вектар $\mathbf{n}$, перпендыкулярны L; 2) пункт $M_0 \in L$ і ненулявы вектар $\mathbf{a}$, паралельны L; 3) два розныя пункты

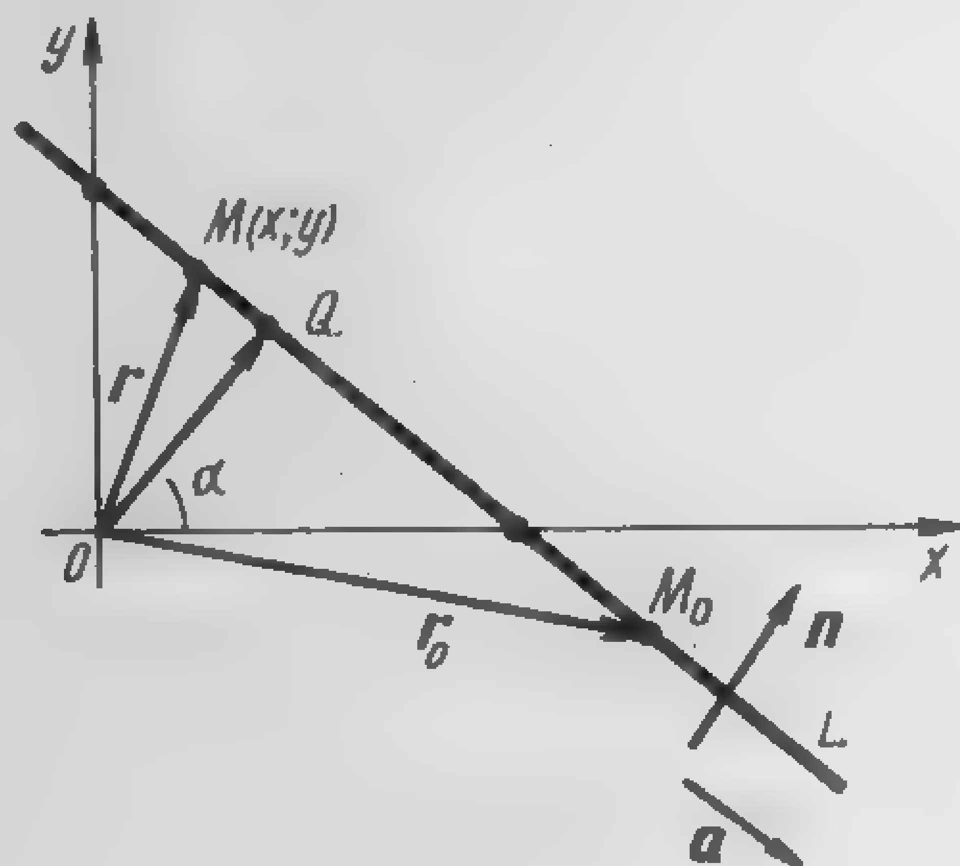
* На працягу параграфа будзем лічыць, што на плоскасці зададзена дэкартава прамавугольная сістэма каардынат Oxy.

M_0, $M_1 \in L$; 4) адлегласць ад пачатку каардынат да L і вугал паміж дадатным кірункам восі Ox і перпендыкулярам, апушчаным з пункта O на L.

У кожным з пералічаных выпадкаў мы маем намер адшукаць раўнанне прамой L.

1. Няхай $M_0(x_0; y_0)$ ёсць зададзены пункт прамой L, $\mathbf{n}=(A; B)$ — перпендыкулярны ёй вектар. Кожны вектар, перпендыкулярны прамой, называецца *нармальным вектарам прамой*.

Абазначым праз M адвольны пункт плоскасці xOy, а праз $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0$—радыусы-вектары пунктаў M, M_0 адпаведна (рыс. 4.1).



Рыс. 4.1

Калі $M \in L$, то $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\overrightarrow{M_0M}$ і нармальны вектар $\mathbf{n}$ з'яўляюцца перпендыкулярнымі, а таму на падставе ўласцівасці скалярнага здабытку вектараў маем роўнасць

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{n})=0. \qquad (4.1)$$

Паколькі скалярны здабытак вектараў роўны суме здабыткаў іх адпаведных каардынат, то формула (4.1) набывае выгляд

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (4.2)$$

У выпадку, калі пункт M не належыць прамой, будзе парушацца роўнасць (4.1), і таму каардынаты $(x;\ y)$ пункта M не задавальняюць раўнанне (4.2). Такім чынам, прыходзім да таго, што раўнанне (4.2) ёсць раўнанне прамой L у першым выпадку.

Раскрываючы дужкі ў раўнанні (4.2) і абазначаючы праз C велічыню $-Ax_0-By_0$, атрымаем раўнанне прамой L у выглядзе

$$Ax + By + C = 0. \qquad (4.3)$$

Яно называецца *агульным раўнаннем прамой.*

У выпадку $B \neq 0$ з раўнання (4.3) можна знайсці y. Абазначым для скарачэння $k = -A/B$ і $b = -C/B$, атрымаем *яўнае раўнанне прамой*

$$y = kx + b, \qquad (4.4)$$

якое разглядалася ў курсе геаметрыі сярэдняй школы. Лік k ёсць тангенс вугла нахілу прамой да восі Ox, b — велічыня адрэзка, які адсякае прамая L на восі Oy (пры $b = 0$, што адпавядае $C = 0$ у раўнанні (4.3), прамая L праходзіць праз пачатак сістэмы Oxy).

Калі $B = 0$, то раўнанне (4.3) набывае выгляд

$$Ax + C = 0 \quad \text{або} \quad x = -C/A.$$

Апошняе раўнанне паказвае, што прамая L паралельная восі Oy і адсякае на восі Ox адрэзак велічыні $-C/A$.

2. Няхай зададзены пункт $M_0(x_0;\ y_0) \in L$ і ненулявы вектар $\mathbf{a} = (l;\ m)$, $\mathbf{a} \parallel L$ (гл. рыс. 4.1). Адзначым, што кожны ненулявы вектар, паралельны прамой, называецца *кіроўным вектарам прамой.*

Калі пункт M плоскасці xOy належыць L, то вектары $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ і $\mathbf{a}$ з'яўляюцца калініярнымі, а значыць, для пэўнага значэння t у залежнасці ад M атрымаем роўнасць

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}.$$

Калі ж M не належыць L, то вектары $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ і $\mathbf{a}$ не будуць калініярнымі і апошняя роўнасць не можа выконвацца ні пры якім t.

З гэтых меркаванняў вынікае, што стасунак

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} \qquad (4.5)$$

можна разглядаць як *вектарнае раўнанне прамой* L.

Каардынатная форма раўнання (4.5) раўназначная наступным двум роўнасцям:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad -\infty < t < +\infty, \qquad (4.6)$$

якія называюцца *параметрычнымі раўнаннямі прамой* L.

Далей, з калініярнасці вектараў $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ і $\mathbf{a}$ вынікае прапарцыйнасць адпаведных каардынат, а таму

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \qquad (4.7)$$

Атрымалі *кананічнае раўнанне прамой* L.

3. Абазначым каардынаты дадзеных пунктаў M_0, M_1

прамой L адпаведна праз $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$. Тады кіроўны вектар $\mathbf{a}=\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0; y_1-y_0)$. У гэтым выпадку, на падставе раўнання (4.7), атрымаем *раўнанне прамой, якая праходзіць праз два розныя пункты:*

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}. \tag{4.8}$$

Будзем лічыць, што $O(0; 0)\notin L$. Абазначым праз a, b велічыні адрэзкаў, што адсякае прамая L на восях Ox, Oy. Зразумела, што пункты $M_0(a; 0)$, $M_1(0; b)\in L$, а значыць, на падставе раўнання (4.8), будзем мець

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b} \quad \text{або} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Апошняе раўнанне называецца *раўнаннем у адрэзках прамой* L.

4. Няхай α ёсць велічыня вугла паміж перпендыкулярам OQ, апушчаным з пункта O на L, і дадатным кірункам восі Ox, $p=|\overrightarrow{OQ}|$—адлегласць ад пункта O да прамой L, $Q\in L$ (гл. рыс. 4.1).

Разгледзім выпадак $p>0$. Вызначым адзінкавы нармальны вектар прамой $\mathbf{n}^0=\frac{\overrightarrow{OQ}}{p}$. Згодна з формулай (3.26), $\mathbf{n}^0=(\cos\alpha; \cos(\pi/2-\alpha))=(\cos\alpha; \sin\alpha)$, а пункт Q мае каардынаты $(p\cos\alpha; p\sin\alpha)$. Таму на падставе раўнання (4.2) прамой для дадзенага пункта і нармальнага вектара маем

$$\cos\alpha(x-p\cos\alpha)+\sin\alpha(y-p\sin\alpha)=0.$$

Раскрываючы дужкі, атрымаем раўнанне

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \tag{4.9}$$

якое называецца *нармальным раўнаннем прамой* L.

Калі $p=0$ (гэта адпавядае $Q(0; 0)$), то пад $\mathbf{n}^0$ разумеем адзін з двух магчымых адзінкавых вектараў, перпендыкулярных L. У выніку атрымаем *нармальнае раўнанне*

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=0.$$

Зразумела, што нармальнае раўнанне (4.9) ёсць прыватны выпадак агульнага раўнання (4.3). Пакажам, што і агульнае раўнанне можна пераўтварыць у нармальнае.

Сапраўды, калі раўнанні (4.3) і (4.9) падаюць адну і тую ж прамую L, то нармальныя вектары прамой

$\mathbf{n}=(A;\ B)$ і $\mathbf{n}^0=(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ з'яўляюцца калініярнымі. Значыць, існуе такі лік μ, што

$$\mu A=\cos\alpha,\quad \mu B=\sin\alpha,\quad \mu C=-p.$$

З першых дзвюх роўнасцяў маем $\mu^2(A^2+B^2)=1$, што дае нам

$$\mu=\pm\left(1/\sqrt{A^2+B^2}\right).$$

Трэцяя роўнасць паказвае, што знак μ трэба выбіраць процілеглым знаку C.

Цяпер, калі памножыць агульнае раўнанне на множнік μ, то атрымаем нармальнае раўнанне прамой L.

Множнік μ называецца *нармоўным множнікам* агульнага раўнання.

2°. Асноўныя задачы для прамых. Разгледзім некалькі агульных задач.

1. *Даследуем узаемнае размяшчэнне прамых.* Для дзвюх прамых магчымы наступныя ўзаемныя размяшчэнні: перасячэнне ў адным пункце, паралельнасць прамых, супадзенне. Аналітычнае апісанне кожнай з гэтых сітуацый дае

Тэарэма 4.1. *Прамыя L_1, L_2, якія вызначаюцца адпаведна агульным раўнаннем*

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2&=0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

перасякаюцца, калі і толькі калі

$$A_1/A_2\neq B_1/B_2;$$

паралельныя, калі і толькі калі

$$A_1/A_2=B_1/B_2\neq C_1/C_2;$$

супадаюць, калі і толькі калі

$$A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2.$$

□ Доказ тэарэмы непасрэдна звязаны з існаваннем развязка сістэмы (4.10) лінейных алгебраічных раўнанняў (гл. § 2.6).

Няхай

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix},\quad \Delta_x=\begin{vmatrix} -C_1 & B_1\\ -C_2 & B_2\end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} A_1 & -C_1\\ A_2 & -C_2\end{vmatrix}.$$

Сістэма (4.10) мае адзіны развязак $x_0=\Delta_x/\Delta$, $y_0=\Delta_y/\Delta$, які вызначае каардынаты пункта перасячэння прамых L_1 і L_2, у тым і толькі тым выпадку, калі $\Delta\neq 0$. Падлічыўшы Δ, атрымаем доказ першай умовы тэарэмы. Сістэма (4.10) з'яўляецца несупольнай, і прамыя, якія ёй адпавядаюць, паралельныя ў тым і толькі тым выпадку, калі $\Delta=0$, $\Delta_x\neq 0$, $\Delta_y\neq 0$. Гэтыя стасункі даказваюць другую ўмову тэарэмы. Нарэшце, сістэма (4.10) мае бясконцае мноства развязкаў, а з геаметрычнага пункту гледжання — супадзенне прамых, у тым і толькі тым выпадку, калі $\Delta=0$, $\Delta_x=\Delta_y=0$. Апошнія роўнасці даказваюць трэцюю ўмову тэарэмы. ■

Няхай $M_0(x_0; y_0)$ ёсць пункт перасячэння прамых L_1, L_2, якія падаюцца раўнаннямі (4.10). Знойдзем умову, калі трэцяя прамая L_3 праходзіць праз M_0.

Тэарэма 4.2. *Прамая L_3 у тым і толькі тым выпадку праходзіць праз пункт M_0, калі яна вызначаецца раўнаннем*

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad (4.11)$$

з пэўнымі рэчаіснымі каэфіцыентамі α, β.

□ Дастатковасць. Калі L_3 падаецца раўнаннем (4.11), то пры $x=x_0$, $y=y_0$ выконваюцца абедзве роўнасці (4.10) і адпаведна стасунак (4.11) набывае выгляд $\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$. Гэта азначае, што $M_0\in L_3$.

Неабходнасць. Няхай прамыя L_1, L_2, L_3 перасякаюцца ў адным пункце M_0. Дакажам, што раўнанне прамой L_3 ёсць лінейная камбінацыя раўнанняў прамых L_1, L_2, зададзеных раўнаннямі (4.10).

На прамой L_3 возьмем пункт $M_1(x_1; y_1)$, які не супадае з M_0. Паколькі M_1 не можа належаць L_1, L_2 разам, то адзін з лікаў

$$\alpha_1=A_2x_1+B_2y_1+C_2, \quad \beta_1=-(A_1x_1+B_1y_1+C_1)$$

няроўны нулю. Таму раўнанне

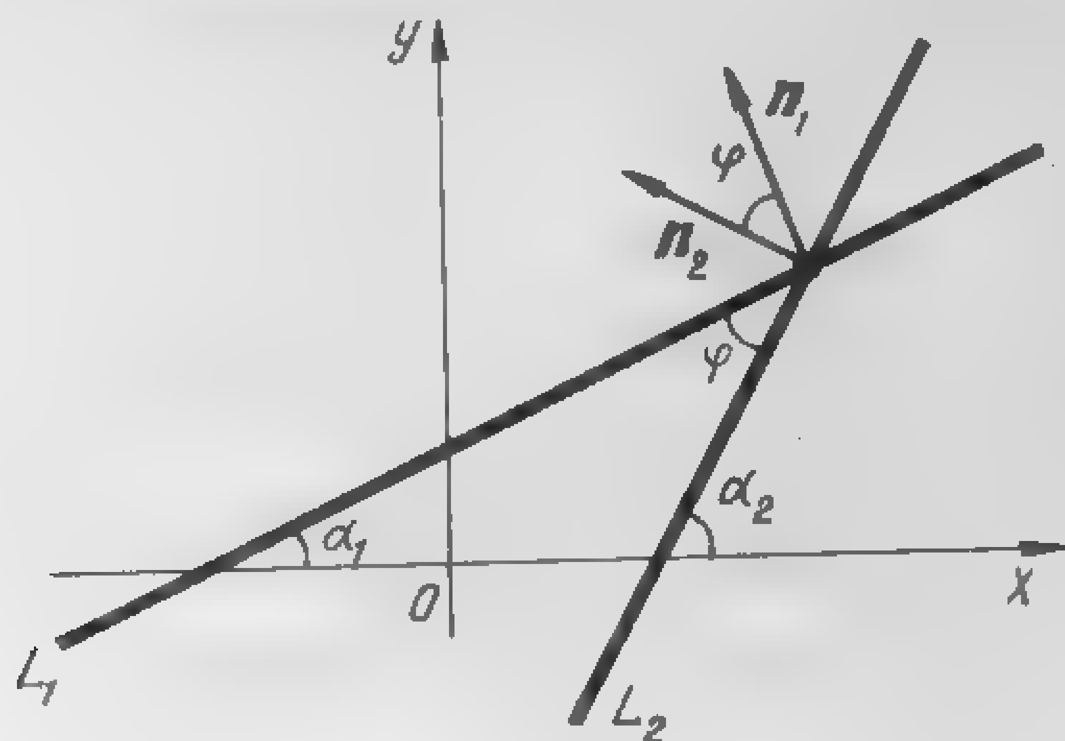
$$\alpha_1(A_1x+B_1y+C_1)+\beta_1(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

ёсць агульнае раўнанне некаторай прамой. Пакажам, што яна супадае з L_3. Сапраўды, непасрэднай праверкай можна пераканацца, што каардынаты пунктаў M_0, M_1 праўдзяць апошняе раўнанне. Паколькі два розныя пункты M_0, $M_1\in L_3$ цалкам вызначаюць раўнанне, то гэта і ёсць раўнанне прамой L_3. ■

Калі змяняць велічыні α і β, то можна з раўнання (4.11) атрымаць раўнанне кожнай прамой, якая прахо-

дзіць праз пункт M_0. З гэтай прычыны (4.11) называецца *раўнаннем пучка прамых,* якія праходзяць праз пункт M_0. Адзначым, што пры $\alpha=0$ з роўнасці (4.11) атрымаем раўнанне прамой L_2, а пры $\beta=0$ — раўнанне прамой L_1.

2. *Знойдзем вугал паміж дзвюма прамымі L_1, L_2, якія падаюцца агульнымі раўнаннямі (4.10).* Вектары $\mathbf{n}_1(A_1; B_1)$, $\mathbf{n}_2(A_2; B_2)$ ёсць нармальныя вектары адпаведна прамых L_1, L_2 (рыс. 4.2).



Рыс. 4.2

Вуглы з узаемна перпендыкулярнымі старанамі альбо роўныя, альбо ў суме складаюць π. Таму, згодна з азначэннем скалярнага здабытку вектараў, маем:

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (4.12)$$

Формула (4.12) дае нам магчымасць вызначыць велічыню аднаго з вуглоў паміж L_1 і L_2. Косінус сумежнага вугла $\pi-\varphi$ можна знайсці, калі адно з раўнанняў (4.10) памножыць на -1. *Умова перпендыкулярнасці прамых* L_1, L_2 вынікае з роўнасці $\cos\varphi=0$ і будзе мець выгляд

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

Калі прамыя L_1 і L_2 падаюцца кананічнымі раўнаннямі:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1},\quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$$

адпаведна, то вектары $\mathbf{a}_1(l_1;\ m_1)$ і $\mathbf{a}_2(l_2;\ m_2)$ ёсць кіроўныя вектары прамых. Таму

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2}}.$$

Умова перпендыкулярнасці прамых у гэтым выпадку мае выгляд

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0,$$

а *ўмова паралельнасці* вынікае з умовы калініярнасці вектараў $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$:

$$l_1/l_2 = m_1/m_2.$$

Няхай прамыя L_1 і L_2 падаюцца яўнымі раўнаннямі адпаведна:

$$y = k_1 x + b_1, \quad y = k_2 x + b_2.$$

З рыс. 4.2 відаць, што вугал паміж прамымі $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, адсюль

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

Пакажам, што назоўнік дробу правай часткі апошняй роўнасці роўны нулю тады і толькі тады, калі $L_1 \perp L_2$. Сапраўды, яўныя раўнанні прамых — гэта прыватны выпадак агульных раўнанняў (4.10) пры $A_1 = -k_1$, $B_1 = 1$, $A_2 = -k_2$, $B_2 = 1$. *Умова перпендыкулярнасці прамых* для такіх раўнанняў мае выгляд

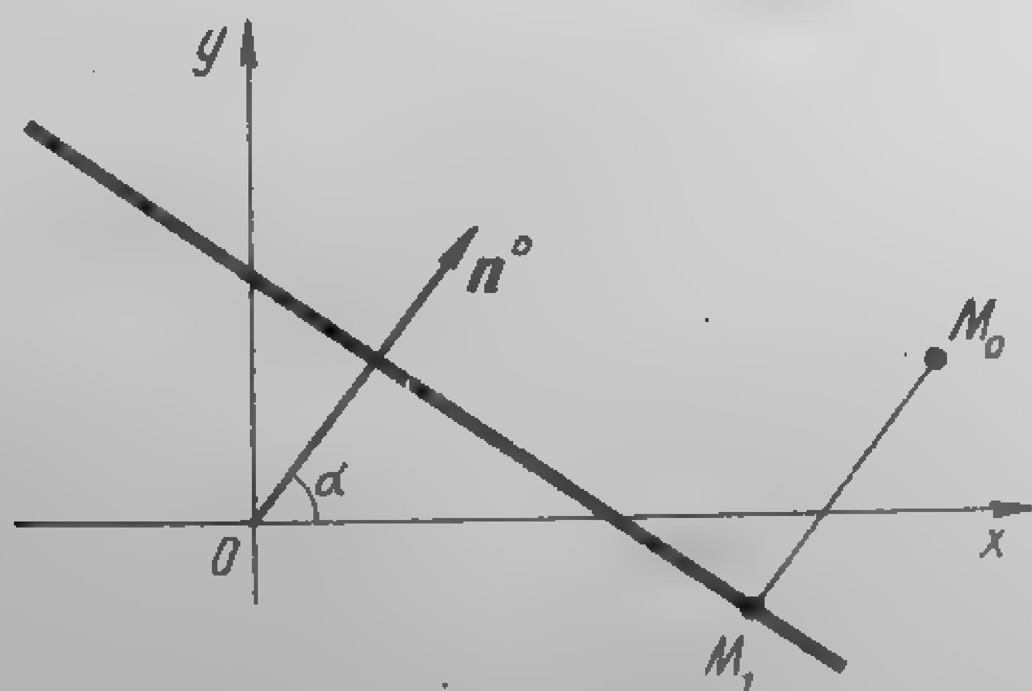
$$1 + k_1 k_2 = 0 \quad \text{ці} \quad k_2 = -1/k_1.$$

Відавочна, што L_1 і L_2 паралельныя, калі $k_1 = k_2$.

3. *Вызначым адлегласць ад пункта да прамой і яго адхіленне.*

Адлегласцю d ад пункта M_0 да прамой L называецца, як вядома, даўжыня перпендыкуляра, апушчанага з M_0 на прамую L.

Няхай M_1 — пункт перасячэння перпендыкуляра і прамой. Тады $d = |\overrightarrow{M_0 M_1}|$ (рыс. 4.3).



Рыс. 4.3

Адхіленнем δ *пункта* M_0 *ад прамой* L называецца велічыня, роўная d, калі M_0 і пачатак каардынат O знаходзяцца па розныя бакі ад L, і роўная $-d$, калі M_0 і O знаходзяцца па адзін бок ад L.

Тэарэма 4.3. *Калі прамая* L *падаецца нармальным раўнаннем*

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0,$$

то адхіленне δ *пункта* $M_0(x_0; y_0)$ *ад прамой* L *вызначаецца формулай*

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p.$$

□ Вектар $\mathbf{n}_0 = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ ёсць нармальны адзінкавы вектар прамой L (гл. рыс. 4.3). Значыць, вектары $\mathbf{n}^0$ і $\overrightarrow{M_0M_1}$ з'яўляюцца калініярнымі, і таму існуе пэўны лік λ, такі, што $\overrightarrow{M_0M_1} = (\lambda \cos\alpha; \lambda \sin\alpha)$. Відавочна, што $\lambda > 0$, калі M_0 і O знаходзяцца па адзін бок ад прамой L, і $\lambda < 0$ у процілеглым выпадку.

Вектар $\overrightarrow{M_0M_1}$ ёсць кіроўны вектар перпендыкуляра M_0M_1, а таму параметрычныя раўнанні прамой M_0M_1 маюць выгляд:

$$x = x_0 + t\lambda \cos\alpha, \quad y = y_0 + t\lambda \sin\alpha, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Каардынаты $(x_1; y_1)$ пункта M_1 вызначаюцца гэтымі раўнаннямі пры $t = 1$. Паколькі $M_1 \in L$, то пры $x = x_1$, $y = y_1$ нармальнае раўнанне прамой L дае роўнасць

$$(x_0 + \lambda \cos\alpha)\cos\alpha + (y_0 + \lambda \sin\alpha)\sin\alpha - p = 0.$$

Развязваючы яе ў дачыненні да λ, атрымаем

$$\lambda = -(x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p).$$

Згодна з азначэннем велічыняў δ і λ, паміж імі існуе залежнасць $\delta = -\lambda$, а таму

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p. \quad ■$$

Вынік. *Адлегласць* d *пункта* $M_0(x_0; y_0)$ *да прамой* L *вызначаецца формулай*

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|.$$

Калі прамая L падаецца агульным раўнаннем

$$Ax + By + C = 0,$$

то пасля памнажэння яго на нармоўны множнік атрымаем нармальнае раўнанне

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0,$$

дзе знак перад коранем выбіраецца процілеглым знаку C. Адсюль на падставе тэарэмы 4.3 і выніку з яе будзем мець:

$$\delta=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

4. *Вызначым раўнанне прамой, якая праходзіць праз пункт перасячэння дзвюх дадзеных прамых і ўтварае з імі пэўныя вуглы.*

Няхай прамыя L_1, L_2 падаюцца нармальнымі раўнаннямі:

$$x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0,$$
$$x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0$$

і перасякаюцца ў адзіным пункце M_0.

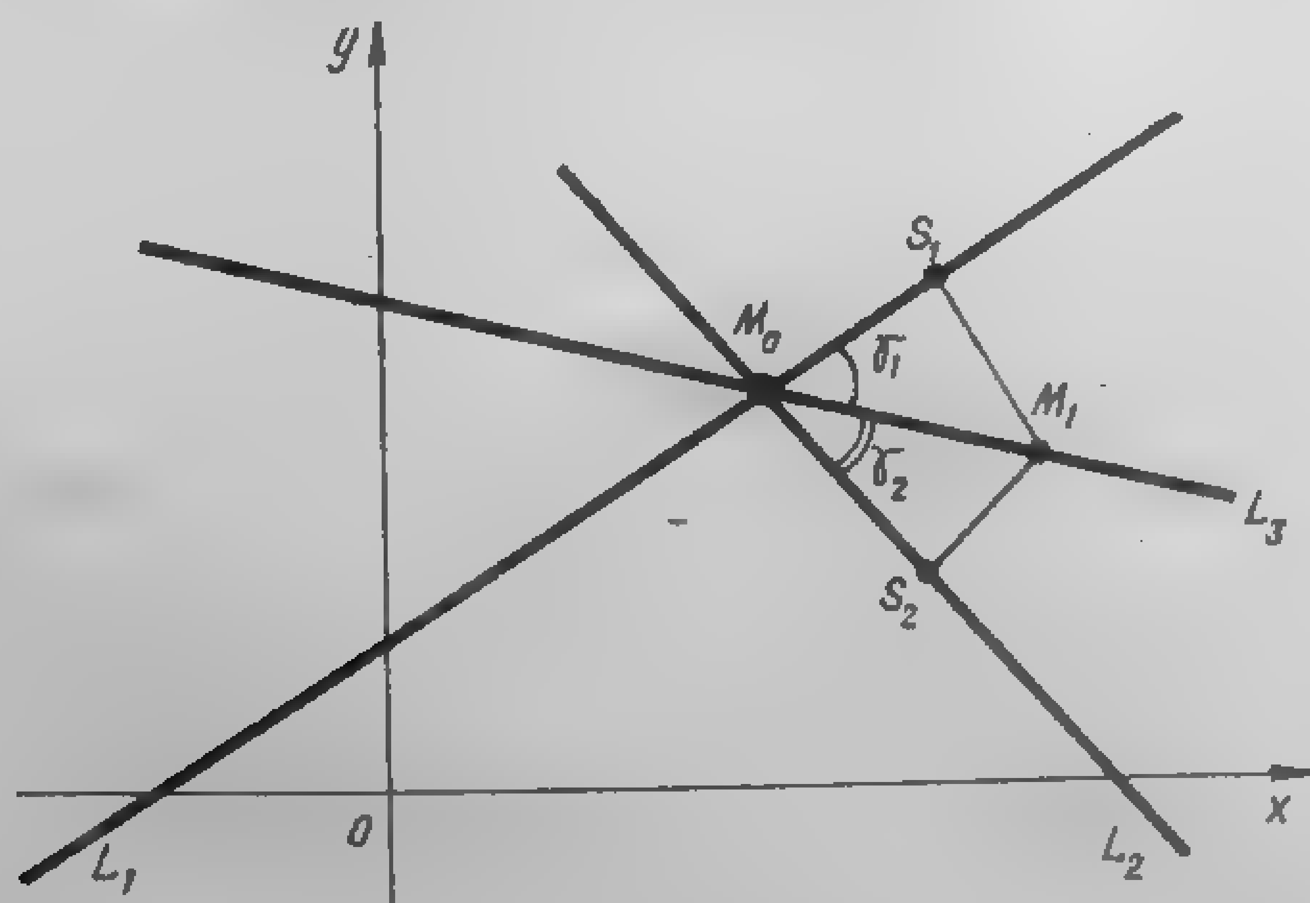
Згодна з тэарэмаю 4.2, усякая прамая L_3, якая праходзіць праз M_0, мае раўнанне

$$\beta_1(x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1)+\beta_2(x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2)=0,$$

дзе β_1, β_2 ёсць рэчаісныя лікі, хаця б адзін з якіх няроўны нулю.

Няхай зададзены велічыні γ_1, γ_2 вуглоў паміж прамой L_3 і адпаведнымі прамымі L_1, L_2 (рыс. 4.4).

Знойдзем залежнасць паміж лікамі β_1, β_2, якая вызначае раўнанне прамой L_3. На прамой L_3 зафіксуем пункт



Рыс. 4.4

$M_1(x_1; y_1)$, які не супадае з M_0. Тады, згодна з тэарэмаю 4.3, маем

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = -\frac{x_1 \cos\alpha_2 + y_1 \sin\alpha_2 - p_2}{x_1 \cos\alpha_1 + y_1 \sin\alpha_1 - p_1} = \pm\frac{|\overrightarrow{M_1S_2}|}{|\overrightarrow{M_1S_1}|},$$

дзе S_1, S_2 ёсць асновы перпендыкуляраў, якія апушчаны з M_1 на прамыя L_1, L_2, а знак перад дробам правай часткі роўнасці выбіраецца ў адпаведнасці з азначэннем адхілення пункта M_1 ад прамой L_1, L_2.

Улічваючы, што $|\overrightarrow{M_1S_1}| = |\overrightarrow{M_0M_1}| \sin\gamma_1$, $|\overrightarrow{M_1S_2}| = |\overrightarrow{M_0M_1}| \sin\gamma_2$, атрымаем залежнасць паміж β_1 і β_2:

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \pm\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} \quad \text{або} \quad \beta_1 \sin\gamma_1 = \pm\beta_2 \sin\gamma_2.$$

У прыватнасці, пры $\gamma_1 = \gamma_2$ прамая L_3 ёсць бісектрыса вугла паміж прамымі L_1, L_2. Яе раўнанне мае выгляд

$$(\cos\alpha_1 \pm \cos\alpha_2)x + (\sin\alpha_1 \pm \sin\alpha_2)y - (p_1 \pm p_2) = 0,$$

дзе знак у дужках выбіраецца ў залежнасці ад таго, бісектрысай якога з двух вуглоў з'яўляецца прамая L_3. Напрыклад, сітуацыі, якая адлюстравана на рысунку 4.4, адпавядае знак «плюс».

4.2. ПЛОСКАСЦЬ І ПРАМАЯ Ў ПРАСТОРЫ*

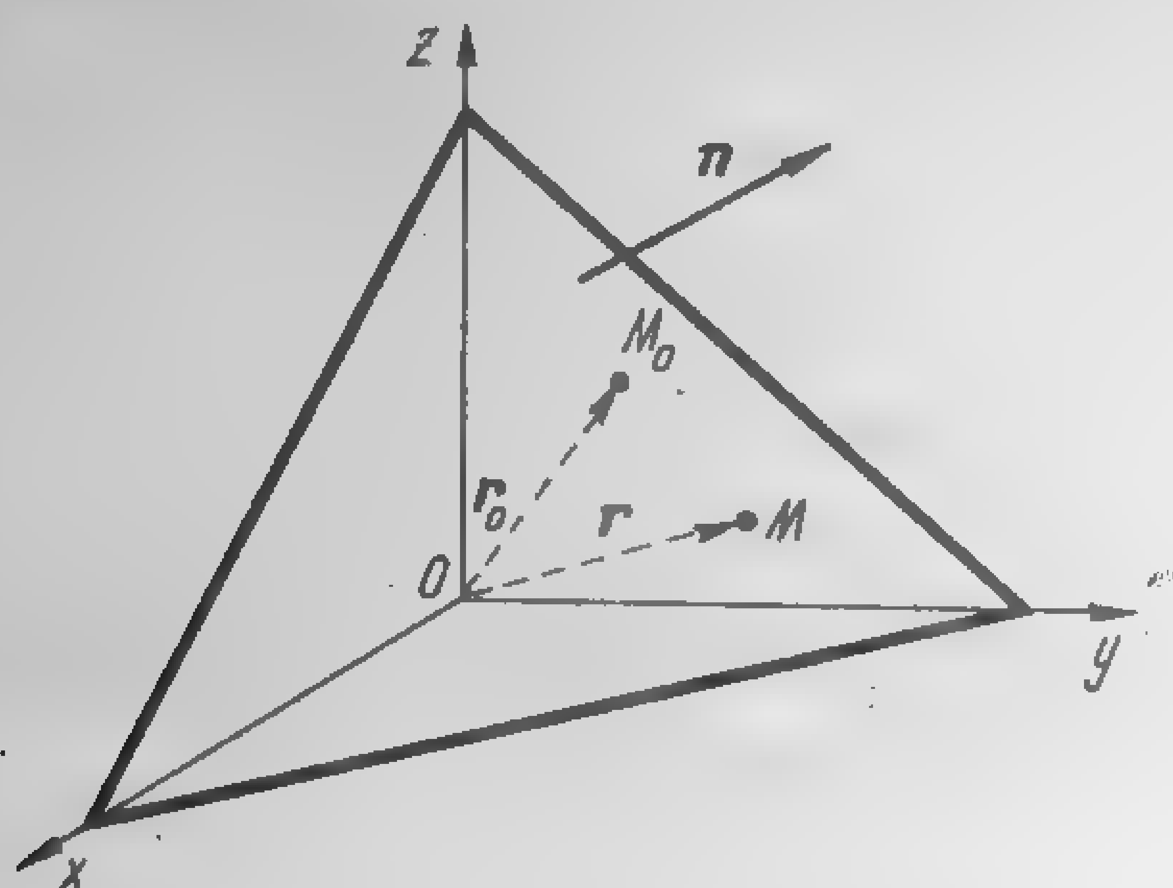
1°. Раўнанні плоскасці. Становішча плоскасці П у прасторы цалкам вызначаецца, калі мы вызначым пэўны пункт $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Pi$ і ненулявы вектар $\mathbf{n}$, які перпендыкулярны плоскасці. Вектар $\mathbf{n}$ магчыма вызначыць рознымі спосабамі: непасрэдна яго каардынатамі; з дапамогай вектарнага здабытку двух некалініярных вектараў, паралельных плоскасці П; на падставе вызначэння дадатковых пунктаў $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2) \in \Pi$. У сваю чаргу замест пункта M_0 і вектара $\mathbf{n}$ магчыма задаць адлегласць ад пачатку сістэмы каардынат да плоскасці, а таксама велічыні вуглоў паміж дадатнымі кірункамі восяў Ox, Oy, Oz і перпендыкулярам з пункта O на плоскасць П. Адпаведна пералічаным выпадкам атрымаем розныя тыпы раўнанняў плоскасці.

1. Няхай $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}$ ёсць радыусы-вектары пункта $M_0 \in \Pi$ і адвольнага пункта $M(x; y; z)$ прасторы, $\mathbf{n} = (A; B;$

---

* У гэтым параграфе будзем лічыць, што у прасторы зафіксавана дэкартава прамавугольная сістэма каардынат $Oxyz$.

$C)\perp\Pi$ (рыс. 4.5). Для таго каб пункт M належаў плоскасці, неабходна і дастаткова, каб вектары $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ і $\mathbf{n}$ былі перпендыкулярнымі.



Рыс. 4.5

Умова перпендыкулярнасці праз скалярны здабытак мае выгляд

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{n})=0.$$

Пераходзячы да каардынатаў, будзем мець

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (4.13)$$

Гэта раўнанне плоскасці, што перпендыкулярная вектару $\mathbf{n}=(A;\ B;\ C)$ і якой належыць пункт $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Раскрываючы дужкі ў раўнанні (4.13) і абазначаючы праз D велічыню $-Ax_0-By_0-Cz_0$, атрымаем раўнанне Π у выглядзе

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (4.14)$$

Яно называецца *агульным раўнаннем плоскасці*.

Адзначым, што кожны ненулявы вектар $\mathbf{n}$, перпендыкулярны плоскасці, называецца *нармальным вектарам плоскасці*.

Агульнае раўнанне плоскасці называецца *поўным*, калі ўсе велічыні A, B, C, D няроўныя нулю, у іншых выпадках раўнанне (4.14) называецца *няпоўным агульным раўнаннем*. Пералічым няпоўныя раўнанні:

1) раўнанне $By+Cz+D=0$ вызначае плоскасць, паралельную восі Ox, паколькі нармальны вектар $\mathbf{n}=(0;\ B;\ C)$ перпендыкулярны Ox;

2) раўнанне $Ax+Cz+D=0$ вызначае плоскасць, паралельную восі Oy;

3) раўнанне $Ax+By+D=0$ вызначае плоскасць, паралельную восі Oz;

4) раўнанне $Ax+By+Cz=0$ вызначае плоскасць, якая праходзіць праз пачатак каардынат;

5) калі два каэфіцыенты з трох A, B, C ёсць нулі, то раўнанне (4.14) вызначае плоскасці, паралельныя каардынатным плоскасцям xOy, xOz, yOz;

6) калі ў дадатак і $D=0$, то раўнанне (4.14) вызначае плоскасці, якія супадаюць з каардынатнымі плоскасцямі.

2. Няхай цяпер нам вядомы два некалініярныя вектары $\mathbf{a}_1=(l_1;\ m_1;\ s_1)$ і $\mathbf{a}_2=(l_2;\ m_2;\ s_2)$, якія паралельныя плоскасці П. Нармальны вектар $\mathbf{n}$ плоскасці ў гэтым выпадку можна вызначыць праз вектарны здабытак вектараў $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ па формуле

$$\mathbf{n}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & s_1 \\ l_2 & m_2 & s_2 \end{vmatrix}=(m_1s_2-m_2s_1)\mathbf{i}+(s_1l_2-s_2l_1)\mathbf{j}+$$
$$+(l_1m_2-l_2m_1)\mathbf{k}.$$

Падстаўляючы каардынаты нармальнага вектара $A=$ $=m_1s_2-m_2s_1$, $B=s_1l_2-s_2l_1$, $C=l_1m_2-l_2m_1$ у раўнанне (4.13), атрымаем раўнанне плоскасці П.

Па дадзеных вектарах $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ раўнанне плоскасці П можна вызначыць і з другіх меркаванняў. Сапраўды, адвольны пункт $M(x;\ y;\ z)$ прасторы належыць П у тым і толькі тым выпадку, калі вектары $\overrightarrow{M_0M}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ з'яўляюцца кампланарнымі. Усякія тры кампланарныя вектары прасторы ёсць лінейна залежныя. Значыць, з улікам некалініярнасці $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ існуюць такія рэчаісныя лікі t_1, t_2, што

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=t_1\mathbf{a}_1+t_2\mathbf{a}_2.$$

У выніку гэтай роўнасці атрымаем *вектарнае раўнанне плоскасці* П:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t_1\mathbf{a}_1+t_2\mathbf{a}_2. \tag{4.15}$$

Вектары $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ называюцца *кіроўнымі вектарамі плоскасці.*

Калі запісаць раўнанне (4.15) у каардынатнай форме, то атрымаем *параметрычныя раўнанні плоскасці* П:

$$x=x_0+l_1t_1+l_2t_2,\ y=y_0+m_1t_1+m_2t_2,\ z=z_0+s_1t_1+s_2t_2,$$
$$-\infty<t_1,\ t_2<+\infty.$$

Умову кампланарнасці вектараў $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ можна запісаць праз роўнасць нулю змяшанага здабытку вектараў. Паколькі змяшаны здабытак роўны вызначніку матрыцы каардынат вектараў $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, то раўнанне плоскасці П мае выгляд

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & s_1 \\ l_2 & m_2 & s_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (4.16)$$

Раскладваючы вызначнік па першым радку, атрымаем раўнанне плоскасці П у выглядзе (4.13).

3. Няхай, акрамя пункта M_0, на плоскасці П вызначаны яшчэ два пункты $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$, прычым пункты M_0, M_1, M_2 не належаць адной прамой. У гэтым выпадку вектары $\mathbf{a}_1=\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0; y_1-y_0; z_1-z_0)$, $\mathbf{a}_2=\overrightarrow{M_0M_2}=(x_2-x_0; y_2-y_0; z_2-z_0)$ з'яўляюцца некалініярнымі і паралельнымі плоскасці П. На падставе раўнання (4.16) атрымаем *раўнанне плоскасці па трох зададзеных пунктах*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0. \qquad (4.17)$$

Калі плоскасць П адсякае на восях сістэмы каардынат Ox, Oy, Oz ненулявыя адрэзкі a, b, c, то пункты $M_0(a; 0; 0)$, $M_1(0; b; 0)$, $M_2(0; 0; c)$ належаць П, і таму, згодна з (4.17), раўнанне плоскасці мае выгляд

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0.$$

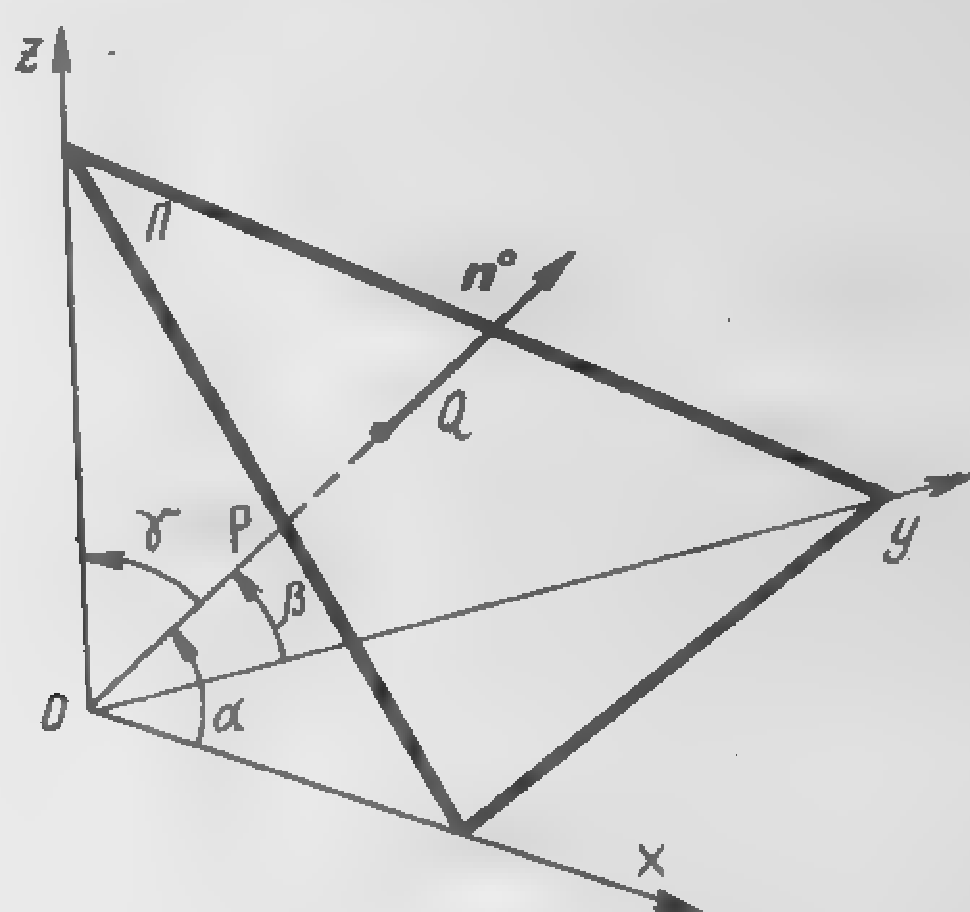
Падлічыўшы вызначнік, атрымаем *раўнанне плоскасці ў адрэзках*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

4. Будзем лічыць, што плоскасць П не праходзіць праз пачатак сістэмы каардынат — пункт O. Абазначым праз Q аснову перпендыкуляра, які апушчаны з пункта

O на плоскасць. Няхай нам зададзены адлегласць p ад пункта O да плоскасці П і велічыні вуглоў α, β, γ паміж вектарам $\overrightarrow{OQ}$ і дадатнымі кірункамі восяў Ox, Oy, Oz (рыс. 4.6). Паколькі $p>0$, то вектар $\mathbf{n}^0=(1/p)\overrightarrow{OQ}$ ёсць адзінкавы нармальны вектар плоскасці П, а таму $\mathbf{n}^0=(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$, $Q(p\cos\alpha;\ p\cos\beta;\ p\cos\gamma)$. Падстаўляючы каардынаты нармальнага вектара $\mathbf{n}^0$ і пункта $Q\in\Pi$ у раўнанне (4.13), будзем мець

$$\cos\alpha(x-p\cos\alpha)+\cos\beta(y-p\cos\beta)+$$
$$+\cos\gamma(z-p\cos\gamma)=0.$$



Рыс. 4.6

Раскрываючы дужкі, на падставе тоеснасці $\cos^2\alpha+$ $+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ атрымаем *нармальнае раўнанне плоскасці* П:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \qquad (4.18)$$

Калі плоскасць П праходзіць праз пункт O, то $p=0$ і $\mathbf{n}^0$ ёсць адзін з двух магчымых адзінкавых вектараў, перпендыкулярных П.

Як і для агульнага раўнання прамой на плоскасці, аналагічнымі развагаменнямі можна паказаць, што калі памножыць агульнае раўнанне (4.14) плоскасці на нармоўны множнік $\mu=\pm\left(1/\sqrt{A^2+B^2+C^2}\right)$, то атрымаем *нармальнае раўнанне плоскасці* ў выглядзе

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0,$$

дзе знак у назоўніку бярэцца процілеглым знаку D.

2°. Раўнанні прамой. У прасторы становішча прамой L можна вызначыць, калі задаць нейкі пункт $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і ненулявы вектар $\mathbf{a}=(l; m; s)$, паралельны L (кіроўны вектар). У сваю чаргу кіроўны вектар $\mathbf{a}$ можна вызначыць дадатковым пунктам $M_1(x_1; y_1; z_1)$, які з'яўляецца канцавым пунктам вектара $\mathbf{a}$, замацаванага ў пункце M_0. Нарэшце, прамую L можна разглядаць як перасячэнне дзвюх дадзеных непаралельных плоскасцяў. Адпаведна пералічаным зыходным дадзеным разгледзім раўнанні прамой L.

1. Няхай $M(x; y; z)$ ёсць адвольны пункт прасторы; $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}$ — радыусы-вектары пунктаў M_0, M. Тады неабходнай і дастатковай умовай таго, што M належыць прамой L, з'яўляецца калініярнасць вектараў $\overrightarrow{M_0M}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ і $\mathbf{a}$. Калі запісаць умову калініярнасці ў выглядзе $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=t\mathbf{a}$, то атрымаем *вектарнае раўнанне прамой:*

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{a}.$$

Каардынатная форма вектарнага раўнання дае *параметрычныя раўнанні прамой у прасторы:*

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+st,\ -\infty<t<+\infty.$$

Умову калініярнасці вектараў $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ і $\mathbf{a}$ можна запісаць у выглядзе прапарцыйнасці каардынат, што і дае *кананічныя раўнанні прамой* L:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{s}. \tag{4.19}$$

2. Зыходзячы з дадзеных пунктаў M_0, $M_1\in L$, вызначым кіроўны вектар $\mathbf{a}=\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0;\ y_1-y_0;\ z_1-z_0)$. Цяпер, згодна з раўнаннем (4.19), маем *раўнанні прамой па двух зададзеных пунктах:*

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

3. Няхай непаралельныя плоскасці Π_1, Π_2, перасячэнне якіх вызначае прамую L, падаюцца агульнымі раўнаннямі:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Каардынаты кожнага пункта прамой L з'яўляюцца развязкам раўнанняў (4.20). Наадварот, кожны развязак

$(x; y; z)$ сістэмы (4.20) уяўляе сабой каардынаты некатарага пункта прамой L. Такім чынам, сістэма (4.20) ёсць раўнанне прамой L у прасторы.

Раўнанне (4.20) можна пераўтварыць у іншыя тыпы раўнанняў прамой L, у прыватнасці ў кананічныя раўнанні. Пакажам гэта.

Паколькі плоскасці Π_1 і Π_2 непаралельныя, то нармальныя вектары $\mathbf{n}_1=(A_1; B_1; C_1)$, $\mathbf{n}_2=(A_2; B_2; C_2)$ гэтых плоскасцяў некалініярныя і кожны з іх перпендыкулярны прамой L. Адсюль вынікае, што ў якасці кіроўнага вектара $\mathbf{a}$ прамой можна ўзяць вектарны здабытак вектараў $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$. Каардынаты вектарнага здабытку вызначаюцца па формуле:

$$\mathbf{a}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right).$$

Каб атрымаць раўнанні (4.19), застаецца вызначыць пункт $M_0(x_0; y_0; z_0)\in L$ як некаторы развязак сістэмы (4.20).

3°. Асноўныя задачы для плоскасцяў і прамых. Разгледзім наступныя задачы.

1. *Даследуем узаемнае размяшчэнне плоскасцяў.* Няхай Π_1 і Π_2 — дзве плоскасці, якія вызначаюцца раўнаннямі:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0. \end{aligned} \qquad (4.21)$$

Дзве плоскасці могуць перасякацца па прамой, быць паралельнымі або супадаць. Знойдзем абмежаванні на раўнанні (4.21) у кожным з пералічаных выпадкаў.

Плоскасці Π_1 *і* Π_2 *перасякаюцца па прамой, калі і толькі калі нармальныя вектары* $\mathbf{n}_1=(A_1; B_1; C_1)$, $\mathbf{n}_2=(A_2; B_2; C_2)$ *не з'яўляюцца калініярнымі.* Значыць, каардынаты вектараў $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ не прапарцыйныя і таму не мае месца хоць адна з роўнасцяў

$$A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2.$$

Выпадку паралельнасці Π_1 *і* Π_2 *адпавядае ўмова*

$$A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2\neq D_1/D_2,$$

а выпадку супадзення — умова

$$A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2=D_1/D_2.$$

Будзем разглядаць узаемнае размяшчэнне трох і больш плоскасцяў у прасторы. Няхай прамая L ёсць лінія перасячэння плоскасцяў Π_1 і Π_2, якія падаюцца раўнаннямі (4.21). Тады мае месца

Тэарэма 4.4. *Плоскасць* Π_3 *праходзіць праз прамую* L, *калі і толькі калі яна вызначаецца раўнаннем*

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+ \\ +\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \qquad (4.22)$$

дзе α, β *ёсць пэўныя рэчаісныя лікі.*

□ Неабходнасць. На плоскасці Π_3 зафіксуем пункт $M^*(x^*, y^*, z^*)\notin L$. Тады адзін з лікаў

$$\alpha^*=A_2x^*+B_2y^*+C_2z^*+D_2, \\ \beta^*=-(A_1x^*+B_1y^*+C_1z^*+D_1)$$

адрозніваецца ад нуля.

Раўнанне

$$\alpha^*(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta^*(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

ёсць агульнае раўнанне некаторай плоскасці. Пакажам, што яна супадае з Π_3. Сапраўды, калі мы возьмем два розныя пункты M_0, $M_1\in L$, то іх каардынаты праўдзяць апошняе раўнанне. Каардынаты пункта M^* таксама задавальняюць раўнанне на падставе вызначэння α^*, β^*. Паколькі тры розныя пункты M_0, M_1, M^* плоскасці Π_3 цалкам яе вызначаюць, то апошняе раўнанне падае плоскасць Π_3.

Дастатковасць. Калі плоскасць Π_3 падаецца раўнаннем (4.22), то для каардынат кожнага пункта прамой L раўнанне плоскасці Π_3 набывае выгляд $\alpha\cdot0+ +\beta\cdot0=0$. Гэта азначае, што $L\in\Pi_3$. ■

Змяняючы велічыні α, β у роўнасці (4.22), можна атрымаць раўнанне ўсякай плоскасці, якой належыць прамая L. Напрыклад, пры $\alpha=0$ атрымаем раўнанне плоскасці Π_2, а пры $\beta=0$ — плоскасці Π_1. З гэтай прычыны раўнанне (4.22) называецца *раўнаннем пучка плоскасцяў з воссю* L.

Вязанкай плоскасцяў з цэнтрам $M_0(x_0; y_0; z_0)$назы-

ваецца мноства ўсіх плоскасцяў, якім належыць пункт M_0. На падставе раўнання (4.13) атрымаем *раўнанне вязанкі плоскасцяў з цэнтрам* M_0:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

дзе A, B, C ёсць адвольныя рэчаісныя лікі, адзін з якіх няроўны нулю.

2. *Вызначым вугал паміж плоскасцямі.* Няхай плоскасці Π_1 і Π_2 задаюцца раўнаннямі (4.21). Двухграневы вугал паміж плоскасцямі будзе роўны вуглу паміж нармальнымі вектарамі $\mathfrak{n}_1=(A_1;\ B_1;\ C_1)$, $\mathfrak{n}_2=(A_2;\ B_2;\ C_2)$. Таму на падставе формулы (3.49) маем:

$$\cos\alpha=\frac{(\mathfrak{n}_1,\ \mathfrak{n}_2)}{|\mathfrak{n}_1||\mathfrak{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \quad (4.23)$$

Формула (4.23) вызначае велічыню аднаго з вуглоў паміж плоскасцямі Π_1 і Π_2. Косінус сумежнага вугла $\pi-\alpha$ можна таксама атрымаць па формуле (4.23), калі адно з раўнанняў (4.21) памножыць на -1.

Умова перпендыкулярнасці плоскасцяў вынікае з формулы (4.23) пры $\cos\alpha=0$:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

3. *Вызначым адлегласць ад пункта да плоскасці і яго адхіленне.* Нагадаем, што *адлегласцю d ад пункта M_0 да плоскасці* Π называецца даўжыня перпендыкуляра, які апушчаны з M_0 на Π. Калі M_1 ёсць пункт перасячэння перпендыкуляра і плоскасці, то $d=|\overrightarrow{M_0M_1}|$.

Адхіленнем Δ пункта M_0 ад плоскасці Π называецца велічыня, роўная d, калі M_0 і пачатак сістэмы каардынат O знаходзяцца па розныя бакі ад Π, і велічыня, роўная $-d$, калі M_0 і O знаходзяцца па адзін бок ад Π.

Няхай $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ёсць каардынаты пункта M_0. Аналагічна доказу тэарэмы 4.3 даказваецца

Тэарэма 4.5. *Калі плоскасць* Π *падаецца нармальным раўнаннем*

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

то адхіленне Δ пункта M_0 ад Π *вызначаецца формулай*

$$\Delta=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p.$$

Калі Π *падаецца агульным раўнаннем, то*

$$\Delta=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad (4.24)$$

дзе знак перад коранем у назоўніку (4.24) бярэцца процілеглым знаку D.

На падставе тэарэмы 4.5 і азначэння адхілення атрымліваем *формулу адлегласці:*

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|,$$

або

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Заўвага 4.1. Калі пункт O належыць плоскасці П, то $\Delta=d$ для пунктаў прасторы, куды накіраваны вектар $\mathbf{n}^0=(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$; для астатніх пунктаў прасторы $\Delta=-d$.

4. *Даследуем узаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці.* Няхай плоскасць П падаецца агульным раўнаннем (4.14), а прамая L — кананічнымі раўнаннямі (4.19). Нагадаем, што вугал паміж L і П ёсць вугал φ паміж кіроўным вектарам L і яго геаметрычнай праекцыяй на П. Зразумела, што $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

Абазначым праз ψ вугал паміж нармальным вектарам $\mathbf{n}=(A;\ B;\ C)$ плоскасці і кіроўным вектарам $\mathbf{a}=(l;\ m;\ s)$ прамой. Паколькі φ разам з вуглом ψ складае $\pi/2$, то:

$$\sin\varphi=\cos\psi=\frac{|(\mathbf{n},\ \mathbf{a})|}{|\mathbf{n}|\,|\mathbf{a}|}=\frac{|Al+Bm+Cs|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+s^2}}.$$

Гэтая формула дае магчымасць апісаць аналітычна ўзаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці:

1) калі $L\parallel$П, то $\varphi=0$, і таму мае месца роўнасць

$$Al+Bm+Cs=0;$$

2) калі L належыць плоскасці П і $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ёсць некаторы пункт L, то $M_0\in$П, а таму, акрамя роўнасці з п. 1, мае месца

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0;$$

3) калі прамая L перасякае П у адзіным пункце M^*, то $\varphi\neq0$. Значыць,

$$Al+Bm+Cs\neq0.$$

Каб адшукаць каардынаты $(x^*;\ y^*;\ z^*)$ пункта перасячэння M^*, скарыстаем параметрычныя раўнанні прамой:

$$x=x_0+lt,\ \ y=y_0+mt,\ \ z=z_0+st,\ \ -\infty<t<+\infty.$$

Няхай параметр $t=t^*$ адпавядае M^*. Каардынаты M^* праўдзяць раўнанне плоскасці, а таму

$$A(x_0+lt^*)+B(y_0+mt^*)+C(z_0+st^*)+D=0,$$

адкуль

$$t^*=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cs}.$$

Цяпер на падставе параметрычных раўнанняў няцяжка вызначыць $(x^*;\ y^*;\ z^*)$.

5. *Даследуем узаемнае размяшчэнне прамых.* Няхай прамыя L_1 і L_2 у прасторы зададзены кананічнымі раўнаннямі:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{s_1},\quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{s_2}.$$

З геаметрычных меркаванняў прамыя L_1 і L_2 могуць знаходзіцца паміж сабой у наступных дачыненнях: быць паралельнымі, супадаць, перасякацца ў адзіным пункце, крыжавацца. Знойдзем умовы, якія задавальняюць параметры раўнанняў прамых у кожным з пералічаных выпадкаў.

Будзем разглядаць кіроўныя вектары $\mathbf{a}_1=(l_1;\ m_1;\ s_1)$, $\mathbf{a}_2=(l_2;\ m_2;\ s_2)$ прамых L_1 і L_2.

Відавочна, што прамыя L_1, L_2 ёсць паралельныя, калі і толькі калі вектары $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ — калініярныя, г. зн.

$$l_1/l_2=m_1/m_2=s_1/s_2. \tag{4.25}$$

Акрамя таго, калі прамыя супадаюць, то вектар $\overrightarrow{M_1M_2}$, які злучае пункты $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)\in L_1$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)\in L_2$, калініярны вектарам $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, а таму

$$\frac{x_2-x_1}{l_1}=\frac{y_2-y_1}{m_1}=\frac{z_2-z_1}{s_1}. \tag{4.26}$$

Такім чынам, атрымліваем, што *неабходнай і дастатковай умовай паралельнасці прамых L_1 і L_2 з'яўляецца ўмова (4.25), а неабходнай і дастатковай умовай супадзення прамых L_1 і L_2 з'яўляецца адначасовае выкананне ўмоваў (4.25), (4.26).*

Няхай цяпер умова (4.25) не выконваецца, тады прамыя L_1 і L_2 або перасякаюцца ў адзіным пункце, або крыжуюцца.

Калі прамыя L_1 і L_2 перасякаюцца ў адзіным пункце, то існуе плоскасць, якой належаць прамыя. З гэтага

вынікае, што вектары $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ з'яўляюцца кампланарнымі, што раўназначна роўнасці нулю іх змяшанага здабытку. Значыць, *неабходнай і дастатковай умовай перасячэння непаралельных прамых L_1 і L_2 з'яўляецца роўнасць нулю вызначніка:*

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & s_1 \\ l_2 & m_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Зразумела, што *прамыя L_1 і L_2 крыжуюцца, калі і толькі калі парушаецца апошняя роўнасць.*

У выпадку, калі прамыя L_1, L_2 перасякаюцца ў адзіным пункце, узнікае задача вызначэння вугла паміж імі. Відавочна, што гэты вугал роўны вуглу φ паміж кіроўнымі вектарамі $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$, таму

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|} = \frac{l_1l_2+m_1m_2+s_1s_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+s_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+s_2^2}}.$$

У прыватнасці, з гэтай формулы вынікае *ўмова перпендыкулярнасці прамых L_1 і L_2:*

$$l_1l_2+m_1m_2+s_1s_2=0.$$

У выпадку, калі прамыя L_1, L_2 крыжуюцца, узнікае задача вызначэння найкарацейшай адлегласці паміж прамымі і агульнага перпендыкуляра. Для яе развязання спачатку вызначым раўнанне плоскасці Π_0, якой належыць прамая L_1, а прамая L_2 паралельная. На падставе даследавання задачы маем

$$(L_1 \subset \Pi_0) \Leftrightarrow (Al_1+Bm_1+Cs_1=0,\ Ax_1+By_1+Cz_1+D=0),$$

дзе A, B, C, D — пакуль невядомыя параметры агульнага раўнання плоскасці Π_0. Акрамя таго,

$$(L_2 \parallel \Pi_0) \Leftrightarrow (Am_2+Bl_2+Cs_2=0).$$

Такім чынам, параметры A, B, C, D раўнання плоскасці Π_0 вызначаюцца сістэмай

$$\left.\begin{aligned} Al_1+Bm_1+Cs_1 \quad &=0, \\ Al_2+Bm_2+Cs_2 \quad &=0, \\ Ax_1+By_1+Cz_1+D &=0 \end{aligned}\right\}$$

трох раўнанняў з чатырма невядомымі.

Развязваючы сістэму, вызначым параметры A, B, C праз D. Адкуль, напрыклад, пры $D=1$ атрымаем значэнні ўсіх параметраў раўнання плоскасці Π_0. Пасля гэтага вызначым найкарацейшую адлегласць паміж прамымі L_1 і L_2; яна роўная адлегласці d ад пункта $M_2(x_2; y_2; z_2)$ да плоскасці Π_0 (гл. формулу (4.24)).

Каб знайсці агульны перпендыкуляр да прамых L_1, L_2, трэба вызначыць раўнанні дзвюх плоскасцяў Π_1 і Π_2, якія перпендыкулярныя плоскасці Π_0 і праходзяць, адпаведна, праз прамыя L_1 і L_2. Агульны перпендыкуляр ёсць лінія перасячэння плоскасцяў Π_1 і Π_2.

4.3. ЛІНІІ ДРУГОГА ПАРАДКУ

1°. Кананічныя раўнанні ліній другога парадку. З папярэдніх параграфаў раздзелу мы ведаем, што прамыя на плоскасці (і толькі яны) з'яўляюцца лініямі першага парадку. Цяпер будзем разглядаць лініі другога парадку, вывучаць іх уласцівасці.

Агульнае раўнанне лініі другога парадку мае выгляд

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

дзе A, B, C, D, E, F ёсць зададзеныя рэчаісныя лікі, прычым хоць адзін з трох параметраў A, B, C не роўны нулю.

Разгледзім шэсць найбольш важных прыватных выпадкаў гэтага раўнання:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a\geqslant b>0$ *(эліпс);*

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a, b,>0$ *(гіпербала);*

3) $y^2=2px$, $p>0$ *(парабала);*

4) $a^2x^2-b^2x^2=0$, $a, b>0$ *(пара перасякальных прамых);*

5) $x^2-a^2=0$ *(пара паралельных прамых);*

6) $x^2+y^2=0$ *(пункт).*

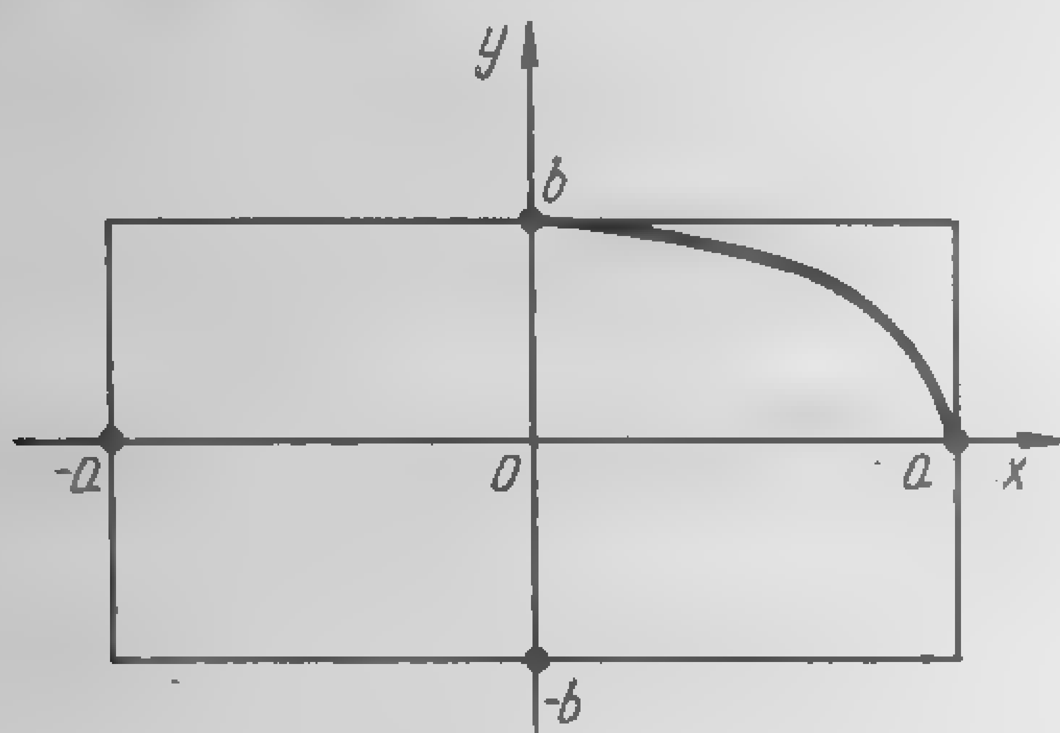
Пералічаныя раўнанні называюцца *кананічнымі раўнаннямі ліній другога парадку.* Вывучым уласцівасці кожнай з ліній, якія вызначаюцца кананічнымі раўнаннямі.

Азначэнне 4.1. *Эліпс ёсць геаметрычнае месца пунктаў, каардынаты якіх праўдзяць раўнанне*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a\geqslant b>0. \tag{4.27}$$

Зазначым, што пры $a=b$ эліпс ёсць акружына з цэнтрам у пункце O, радыусам a.

Непасрэдна з раўнання вынікае, што каардынаты пунктаў эліпса падпарадкоўваюцца няроўнасцям $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant b$. Значыць, эліпс ёсць абмежаваная лінія, якая не выходзіць за межы вызначанага гэтымі няроўнасцямі прамавугольніка (рыс. 4.7).



Рыс. 4.7

Раўнанне эліпса змяшчае толькі цотныя ступені каардынат пунктаў, а таму разам з пунктам $(x;\ y)$ эліпсу належаць пункты $(-x;\ y)$, $(x;\ -y)$, $(-x;\ -y)$. З гэтага вынікае, што эліпс ёсць лінія, сіметрычная ў дачыненні да восяў Ox і Oy і пачатку сістэмы каардынат Oxy. Цяпер зразумела, што даследаванне формы эліпса дастаткова здзейсніць у першай чвэрці Oxy, а ў астатніх пунктах яго пабудова вызначаецца сіметрыяй.

Для першай чвэрці агульнае раўнанне эліпса можна развязаць для y. Тады атрымаем

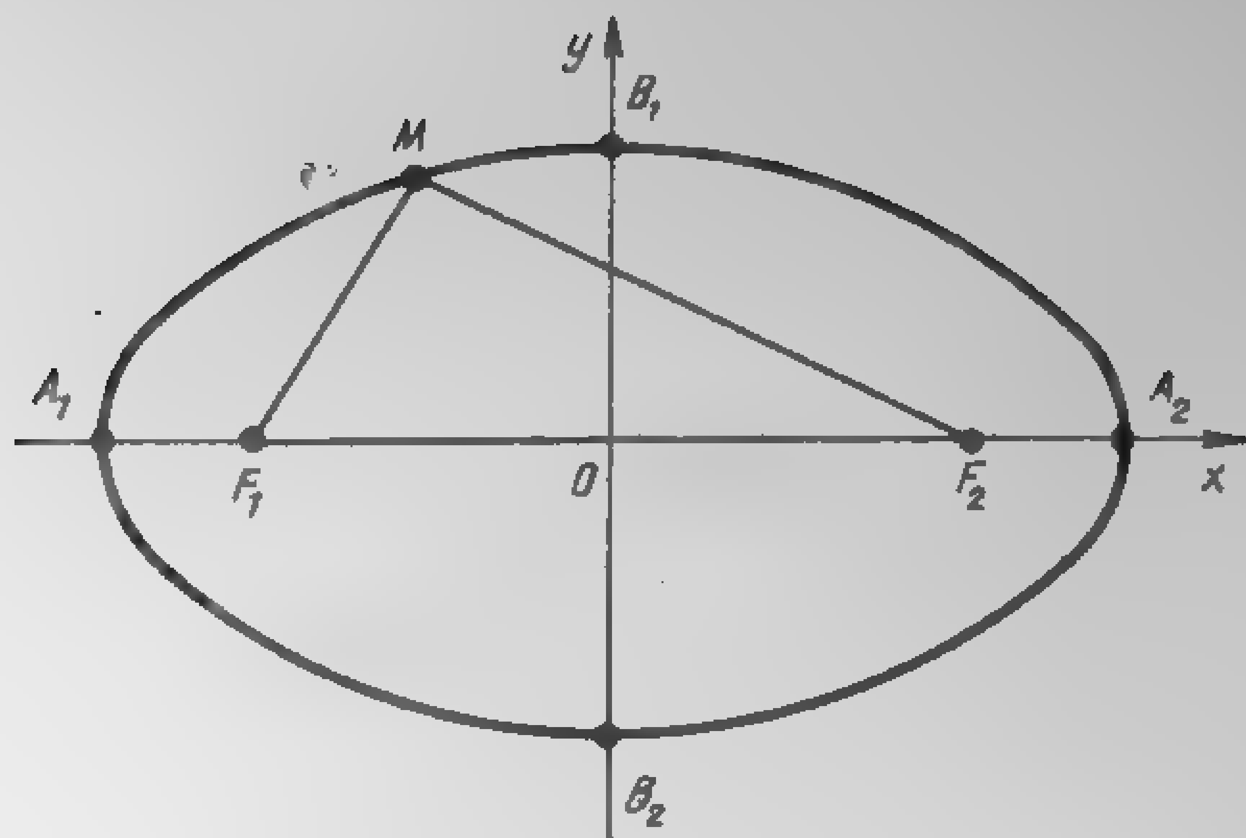
$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Графік гэтай функцыі, якая пры павелічэнні x ад 0 да a манатонна спадае ад b да 0, паказаны на рыс. 4.7.

Восі сіметрыі Ox і Oy называюцца *восямі эліпса*, а цэнтр сіметрыі (пункт O) — *цэнтрам эліпса*. Пункты A_1, A_2, B_1, B_2 перасячэння эліпса з восямі называюцца *вяршынямі эліпса* (рыс. 4.8).

Адрэзкі $OA_1(OA_2)$, $OB_1(OB_2)$ і іх даўжыні называюцца *паўвосямі эліпса*.

Абазначым праз c велічыню $\sqrt{a^2-b^2}$, якая на падставе няроўнасці $a\geqslant b$ з'яўляецца рэчаіснай ($c<a$). На восі Ox адзначым пункты F_1 і F_2, якія маюць абцысы $x=\mp c$. Гэтыя пункты называюцца *фокусамі эліпса*. У дачыненні да фокусаў эліпса мае месца наступная



Рыс. 4.8

Тэарэма 4.6. *Пункт M плоскасці належыць эліпсу, калі і толькі калі сума адлегласцяў ад фокусаў F_1, F_2 да пункту M роўная 2a.*

□ Н е а б х о д н а с ц ь. Няхай каардынаты $(x;\ y)$ пункта M праўдзяць раўнанне (4.27). Дакажам, што выконваецца роўнасць

$$|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = 2a. \qquad (4.28)$$

Відавочна (гл. рыс. 4.8), што

$$|\overrightarrow{F_1M}| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad |\overrightarrow{F_2M}| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Падстаўляючы ў гэтыя роўнасці выраз $y^2 = \frac{b^2}{\square^2}(a^2 - x^2)$, які вынікае з раўнання (4.27), будзем мець:

$$|\overrightarrow{F_1M}| = \sqrt{x^2+2cx+c^2+\frac{b^2}{a_2}(a^2-x^2)} = \frac{\sqrt{(xc+a^2)^2}}{a} = a + \frac{c}{a}x,$$

$$|\overrightarrow{F_2M}| = \sqrt{x^2-2cx+c^2+\frac{b^2}{a_2}(a^2-x^2)} = \frac{\sqrt{(xc-a^2)^2}}{a} = a - \frac{c}{a}x,$$

адкуль пасля складання атрымаем роўнасць (4.28).

Д а с т а т к о в а с ц ь. Пакажам, што калі для пункта M мае месца роўнасць (4.28), то каардынаты $(x;\ y)$ праўдзяць раўнанне (4.27).

Сапраўды,

$$2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

адкуль атрымаем, што

$$4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=(x-c)^2+y^2.$$

Раскрываючы дужкі, спрасцім апошні выраз і ў выніку будзем мець

$$a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

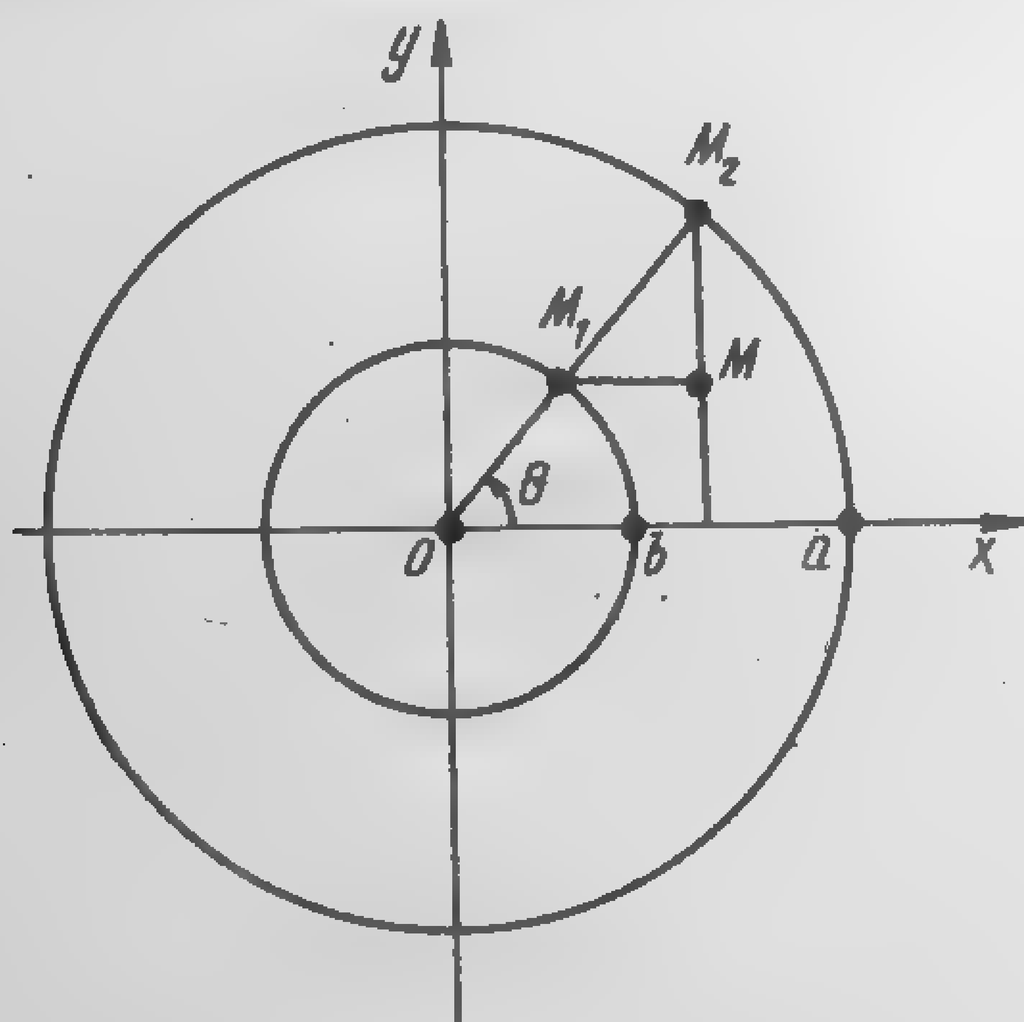
Падвысім абедзве часткі да квадрату і прымем пад увагу, што $c^2=a^2-b^2$. Атрымаем

$$a^2b^2=b^2x^2+a^2y^2,$$

адкуль вынікае раўнанне (4.27) эліпса. ■

Адзначым, што ў некаторых падручніках па аналітычнай геаметрыі сцверджанне тэарэмы 4.6 бярэцца ў якасці азначэння эліпса.

Вызначым параметрычныя раўнанні эліпса і пакажам спосаб яго пабудовы. З гэтаю мэтай на плоскасці xOy пабудуем дзве канцэнтрычныя акружыны радыусаў b і a з цэнтрам у пункце O (рыс. 4.9). З пункта O пад вуглом θ да восі Ox, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$, правядзем паўпрамую,



Рыс. 4.9

якая перасякае акружыны ў пунктах M_1, M_2. З пункта M_2 правядзем прамую, паралельную восі Oy, а з пункта M_1 — прамую, паралельную восі Ox. Пакажам, што пункт M перасячэння пабудаваных прамых належыць эліпсу. Сапраўды, з рыс. 4.9 вынікае, што каардынаты $(x; y)$ пункта M вызначаюцца формуламі:

$$x=|OM_2|\cos\theta=a\cos\theta,\ \ y=|OM_1|\sin\theta=b\sin\theta.$$

Калі падставіць $(x; y)$ у кананічнае раўнанне (4.27), то атрымаем тоеснасць $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, якая і паказвае, што M належыць эліпсу.

Паколькі кожнаму пункту эліпса адпавядае адзіны вугал θ, то *параметрычныя раўнанні эліпса* маюць выгляд:

$$x=a\cos\theta,\ \ y=b\sin\theta,$$

дзе θ ёсць параметр, які належыць прамежку $[0, 2\pi)$.

Азначэнне 4.2. *Гіпербала ёсць геаметрычнае месца пунктаў, каардынаты якіх праўдзяць раўнанне*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,\ b>0. \tag{4.29}$$

З раўнання (4.29) відаць, што абцыса ўсякага пункта гіпербалы падпарадкоўваецца няроўнасці $|x|\geqslant a$. Апошняе азначае, што гіпербала знаходзіцца па-за паласой, абмежаванай прамымі $x=\pm a$. Больш таго, паколькі раўнанне (4.29) утрымлівае толькі цотныя ступені каардынат, то гіпербала ёсць сіметрычная ў дачыненні да восяў Ox, Oy і пачатку сістэмы каардынат O. З гэтай прычыны дастаткова выявіць форму гіпербалы ў першай чвэрці сістэмы Oxy, а ў астатніх чвэрцях гіпербалу можна пабудаваць на падставе сіметрыі.

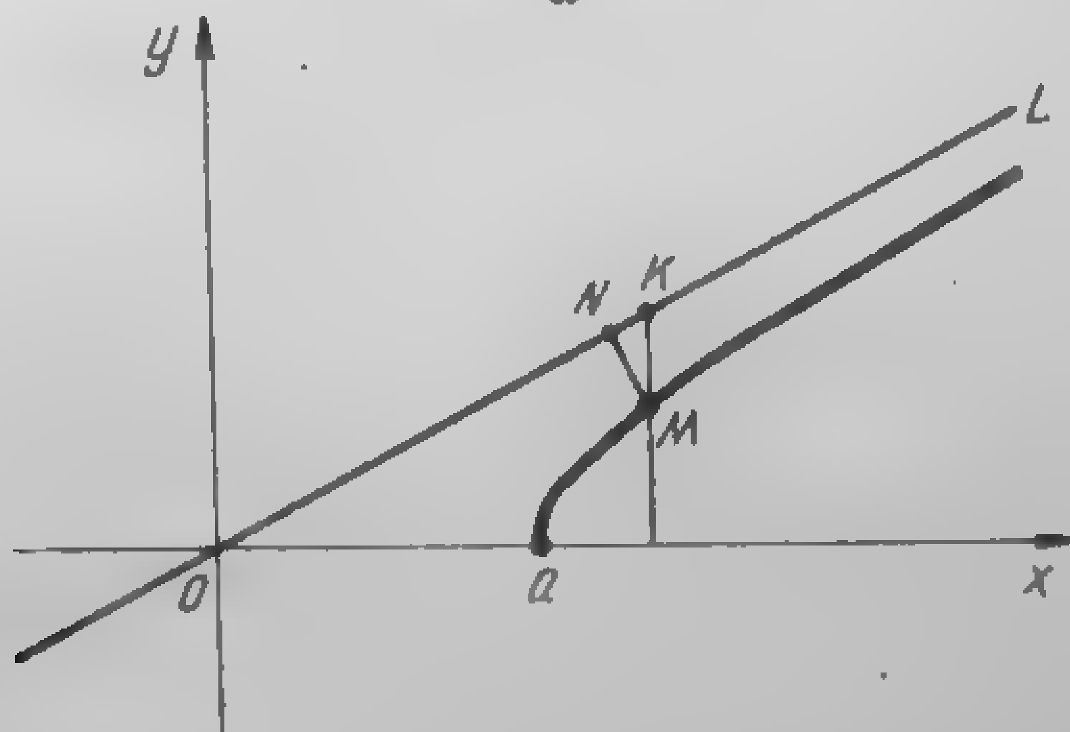
З раўнання (4.29) для першай чвэрці сістэмы Oxy атрымаем функцыю

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \tag{4.30}$$

Графік гэтай функцыі, якая пры павелічэнні x ад a да бясконцасці манатонна нарастае ад 0 да бясконцасці, паказаны на рыс. 4.10.

Пакажам, што гэты графік наколькі пажадана падыходзіць да прамой L, якая вызначаецца раўнаннем

$$y=\frac{b}{a}x.$$



Рыс. 4.10

Дзеля гэтага з адвольнага пункта M графіка пабудуем перпендыкуляр MN на L і прамую MK, паралельную восі Oy. Няхай K ёсць пункт перасячэння прамых L і MK. Тады

$$|\overrightarrow{MK}| = y_K - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}, \quad (4.31)$$

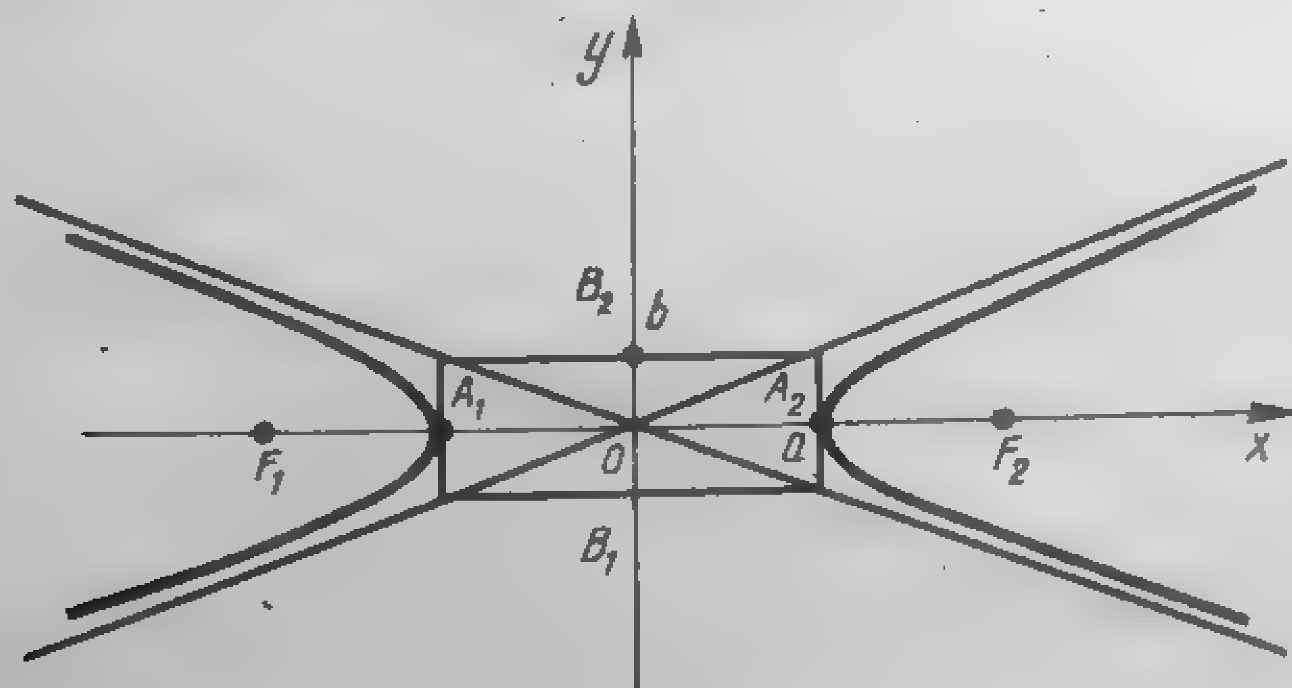
дзе y_K ёсць ардыната пункта K. Адсюль, з улікам няроўнасці $|\overrightarrow{MN}| < |\overrightarrow{MK}|$, будзем мець

$$|\overrightarrow{MN}| < \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Апошняя няроўнасць паказвае, што калі абцыса пункта M павялічваецца, то адлегласць паміж M і прамой L змяншаецца і становіцца меншая за кожны наперад зададзены дадатны лік. Больш таго, роўнасць (4.31) сведчыць, што графік функцыі (4.30) не перасякае прамую L. Прамую L называюць *асімптотай гіпербалы.* Зразумела, што на падставе сіметрыі гіпербала будзе мець і другую асімптоту

$$y = -\frac{b}{a}x.$$

Каб зрабіць рысунак гіпербалы, трэба спачатку пабудаваць прамавугольнік (яго стораны паралельныя восям Ox, Oy), цэнтр якога супадае з пачаткам каардынат, а даўжыні асновы і бока роўныя адпаведна $2a$ і $2b$. Затым трэба пабудаваць дыяганалі прамавугольніка, а пасля нарысаваць саму гіпербалу (рыс. 4.11).



Рыс. 4.11

Гіпербала ёсць лінія, якая складаецца з дзвюх асобных галін. Дадатным значэнням x адпавядае правая яе галіна, а адмоўным x — левая галіна. Пункт O ёсць *цэнтр*

гіпербалы, а восі сіметрыі Ox, Oy называюцца *восямі гіпербалы*. Вось, якая перасякае гіпербалу ў двух пунктах, называецца *рэчаіснай*, а другая вось — *уяўнай*. Пункты $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ ёсць *вяршыні гіпербалы*. Адрэзкі $OA_1(OA_2)$, $OB_1(OB_2)$ называюцца *паўвосямі гіпербалы*. Часам паўвосямі называюцца лікі a і b. Калі $a=b$, гіпербала называецца *раўнабокай*.

Абазначым праз c велічыню $\sqrt{a^2+b^2}$ і адзначым на рэчаіснай восі Ox пункты $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, якія будзем называць *фокусамі гіпербалы*. У дачыненні да фокусаў мае месца

Тэарэма 4.7. *Пункт M плоскасці належыць гіпербале, калі і толькі калі абсалютная велічыня розніцы адлегласцяў ад фокусаў F_1, F_2 да пункта M роўная $2a$.*

□ Неабходнасць. Няхай каардынаты $(x; y)$ пункта M праўдзяць раўнанне (4.29). Пакажам, што выконваецца роўнасць

$$||\overrightarrow{F_1M}|-|\overrightarrow{F_2M}||=2a. \qquad (4.32)$$

Падставім у формулы адлегласцяў

$$|\overrightarrow{F_1M}|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ |\overrightarrow{F_2M}|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

выраз $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, які вынікае з раўнання (4.29). Атрымаем:

$$|\overrightarrow{F_1M}|=\sqrt{x^2-2cx+\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)+c^2}=\frac{\sqrt{(xc+a^2)^2}}{a}=$$

$$=\pm\left(a+\frac{c}{a}x\right),$$

$$|\overrightarrow{F_2M}|=\sqrt{x^2-2cx+c^2+\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)}=\frac{\sqrt{(xc-a^2)^2}}{a}=$$

$$=\pm\left(\frac{c}{a}x-a\right),$$

дзе знак «плюс» адпавядае выпадку, калі M належыць правай галіне гіпербалы, а знак «мінус» адпавядае пунктам левай галіны гіпербалы.

Цяпер, скарыстоўваючы знойдзеныя выразы для $|\overrightarrow{F_1M}|$, $|\overrightarrow{F_2M}|$, пераканаемся, што праўдзіцца роўнасць (4.32).

Дастатковасць. Пакажам, што калі мае месца роўнасць (4.32), то каардынаты (x; y) пункта M праўдзяць раўнанне гіпербалы (4.29).

На падставе роўнасці (4.32) маем стасунак

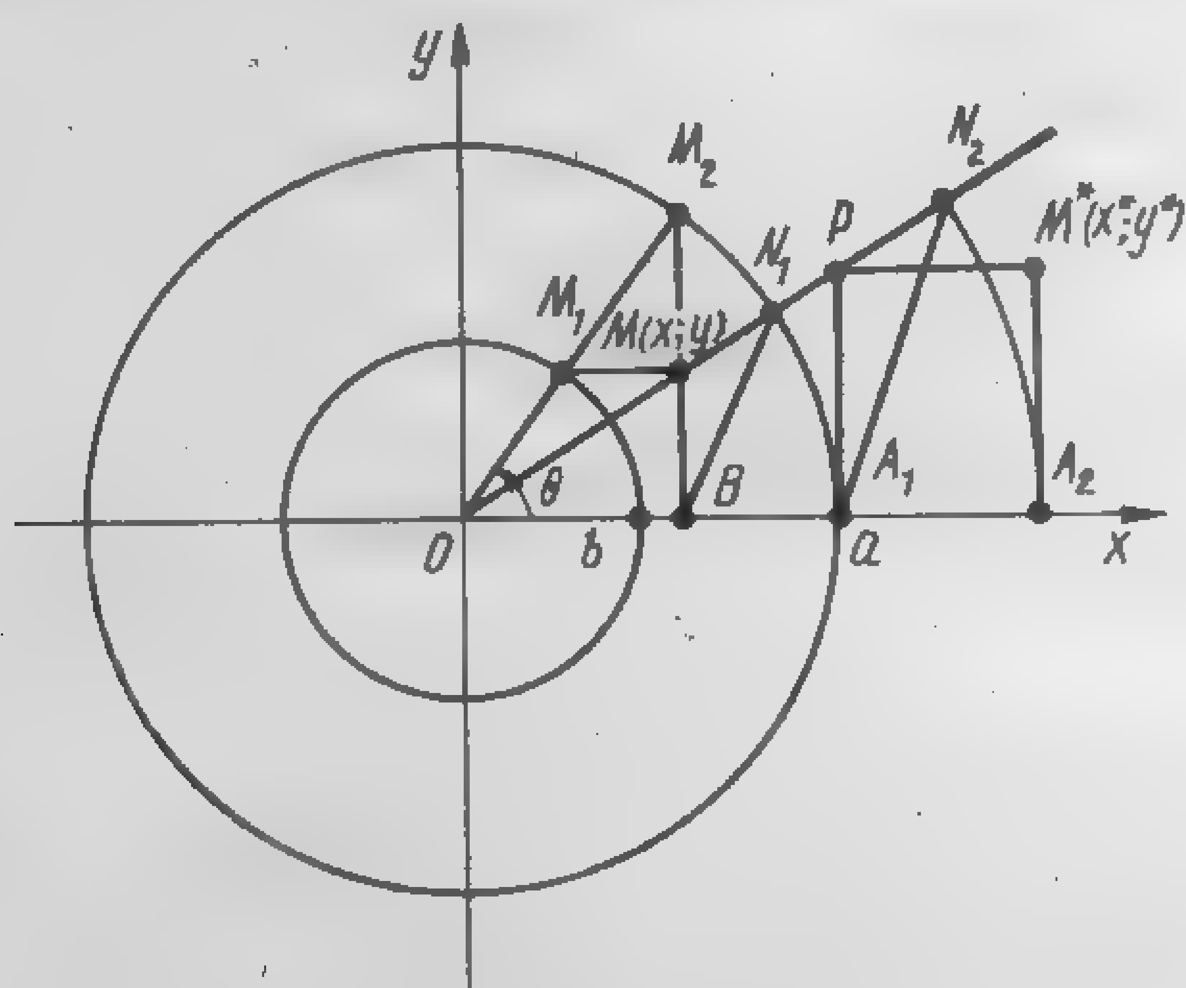
$$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Падвысім абедзве яго часткі да квадрата і прымем пад увагу, што $c^2=a^2+b^2$. У выніку атрымаем раўнанне

$$b^2x-a^2y^2=a^2b^2,$$

раўназначнае раўнанню гіпербалы (4.29). ■

Знойдзем параметрычныя раўнанні гіпербалы. Дзеля гэтага пакажам геаметрычную сувязь паміж пунктамі гіпербалы і пунктамі пэўнага эліпса. Рыс. 4.9 дапоўнім пабудовай прамых OM, BN_1, A_1N_2, A_1P, PM^*, A_2M^* (рыс. 4.12). Пункты N_1, P, N_2 належаць прамой OM, пункты B,



Рыс. 4.12

A_1, A_2 — восі Ox, $|\overrightarrow{ON_1}|=|\overrightarrow{OA_1}|=a$, $|\overrightarrow{ON_2}|=|\overrightarrow{OA_2}|$, OB ёсць абцыса пункта M эліпса. Прамая A_1N_2 паралельная BN_1, прамыя A_1P і A_2M^* паралельныя восі Oy, а прамая PM^* паралельная восі Ox. Непасрэдна з рыс. 4.12 вынікае, што кожны пункт эліпса, які не супадае з вяршынямі B_1 і B_2 (гл. рыс. 4.8), вызначае пэўны пункт M^* плоскасці xOy. Пакажам, што M^* ёсць пункт гіпербалы (4.29).

Няхай (x; y), (x^*; y^*) ёсць каардынаты пунктаў M і M^* адпаведна. На падставе падабенства трохвугольнікаў OA_1N_2 і OBN_1 мае месца роўнасць

$$|\overrightarrow{ON_1}|/|\overrightarrow{ON_2}|=|\overrightarrow{OB}|/|\overrightarrow{OA_1}|.$$

Цяпер, з улікам $|\overrightarrow{ON_1}|=|\overrightarrow{OA_1}|=a$, $|\overrightarrow{ON_2}|=|\overrightarrow{OA_2}|$, атрымаем $x^*=a^2/x$. Паколькі раўнанне прамой OM мае выгляд $Y=\frac{y}{x}X$, то ардыната y^* пункта M^*, якая роўная ардынаце пункта P, вызначаецца роўнасцю

$$y^*=\frac{y}{x}a.$$

Падстаўляючы выразы x^* і y^* у раўнанне гіпербалы (4.29), атрымаем роўнасці:

$$\frac{a^4}{a^2x^2}-\frac{a^2y^2}{x^2b^2}=\frac{a^2}{x^2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{a^2}{x^2}\frac{x^2}{a^2}=1,$$

якія паказваюць, што $(x^*;\ y^*)$ праўдзяць раўнанне гіпербалы.

Калі скарыстаць параметрычны запіс каардынат эліпса: $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, то будзем мець:

$$x^*=\frac{a}{\cos\theta},\ y^*=b\operatorname{tg}\theta,\ \theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)\cup\left(\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right].$$

Гэта *параметрычныя раўнанні гіпербалы.*

Азначэнне 4.3. *Парабала ёсць геаметрычнае месца пунктаў, каардынаты якіх праўдзяць раўнанне*

$$y^2=2px,\ p>0. \tag{4.33}$$

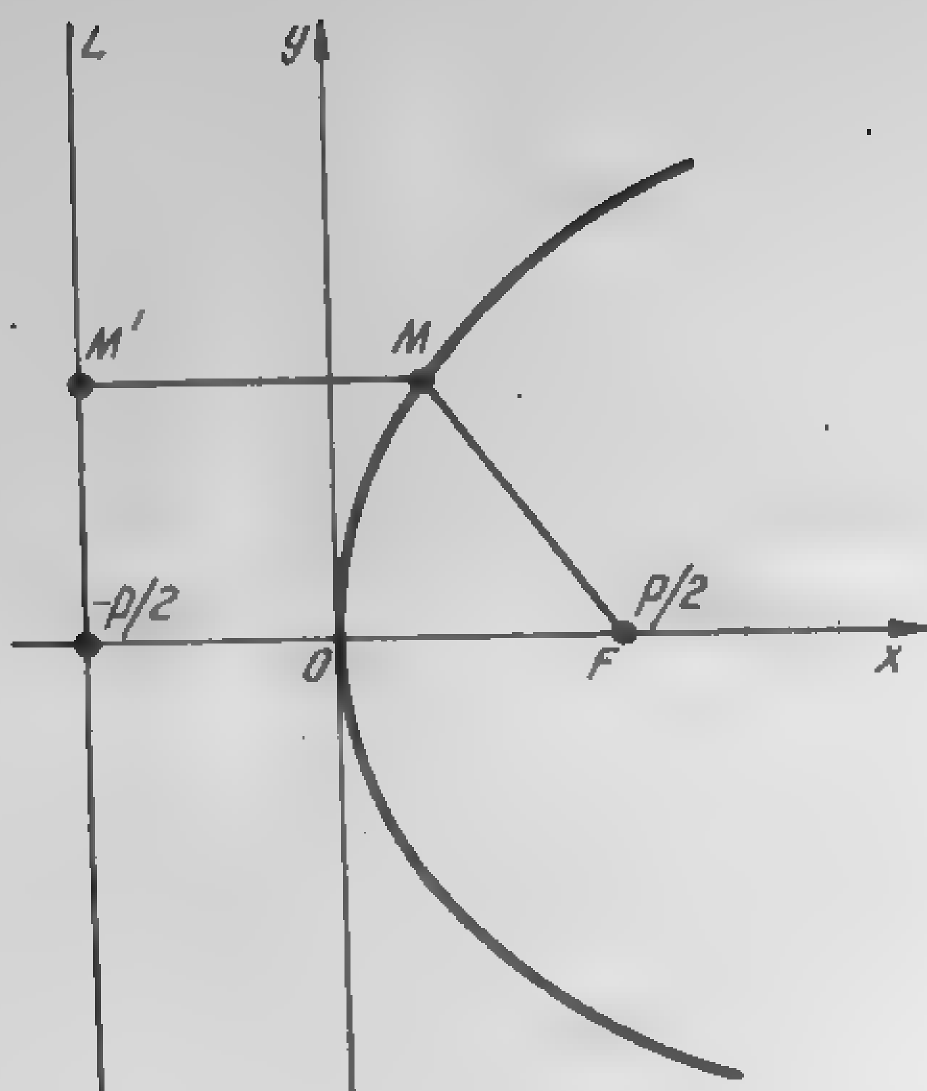
Відавочна, што разам з пунктам $(x;\ y)$ парабале належыць пункт $(x;\ -y)$, г. зн. парабала сіметрычная ў дачыненні да восі Ox. Акрамя таго, абцысы пунктаў парабалы ёсць неадмоўныя велічыні, а таму парабала знаходзіцца ў першай і чацвёртай чвэрцях плоскасці xOy. У першай чвэрці кананічнае раўнанне парабалы можна развязаць у дачыненні да y. Атрымаем функцыю

$$y=\sqrt{2px}. \tag{4.34}$$

Графік гэтай манатонна нарастальнай функцыі не мае асімптот (рыс. 4.13). У чацвёртай чвэрці парабалу можна пабудаваць на падставе сіметрыі.

Вось сіметрыі Ox называецца *воссю парабалы*, а пункт O перасячэння парабалы з воссю называецца яе *вяршыняй.*

На восі Ox адзначым пункт F з абцысай $x=p/2$; ён называецца *фокусам парабалы.* Акрамя таго, пабудуем прамую L, якая вызначаецца раўнаннем $x=-p/2$ і на-



Рыс. 4.13

зываецца *дырэктрысай парабалы.* У дачыненні да фокуса і дырэктрысы мае месца

Тэарэма 4.8. *Пункт M плоскасці належыць парабале, калі і толькі калі гэты пункт роўнааддалены ад фокуса F і дырэктрысы L.*

□ Неабходнасць. Няхай каардынаты $(x;\ y)$ пункта M праўдзяць кананічнае раўнанне парабалы (4.34).

Пакажам, што выконваецца роўнасць $|\overrightarrow{MM'}| = |\overrightarrow{FM}|$, дзе M' ёсць аснова перпендыкуляра з пункта M на L. Відавочна (гл. рыс. 4.13), што:

$$|\overrightarrow{MM'}| = x + p/2, \ |\overrightarrow{FM}| = \sqrt{(x-p/2)^2 + y^2}.$$

Падстаўляючы ў апошнюю роўнасць выраз $y^2 = 2px$, атрымаем:

$$|\overrightarrow{FM}| = \sqrt{x^2 - px + p^2/4 + 2px} = x + p/2 = |\overrightarrow{MM'}|.$$

Дастатковасць. Няхай для пункта M плоскасці мае месца роўнасць $|\overrightarrow{FM}| = |\overrightarrow{MM'}|$. Пакажам, што каардынаты $(x;\ y)$ пункта M праўдзяць раўнанне (4.34). На падставе выразаў для $|\overrightarrow{MM'}|$ і $|\overrightarrow{FM}|$ маем

$$\sqrt{(x-p/2)^2 + y^2} = x + p/2.$$

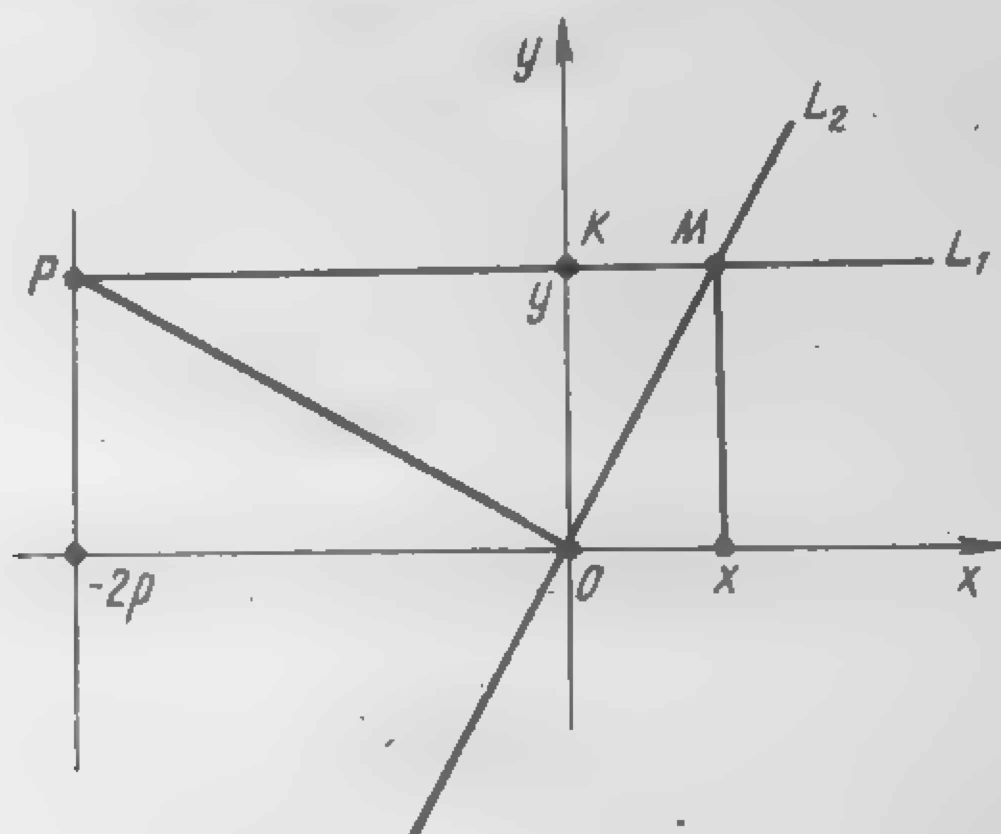
Падвысім абедзве часткі гэтага раўнання да квадрата і атрымаем кананічнае раўнанне парабалы. ■

Параметрычныя раўнанні парабалы вынікаюць з кананічнага раўнання і маюць выгляд:

$$x=u,\ y=\pm\sqrt{2pu},\ 0\leqslant u<+\infty,$$

дзе знак «плюс» адпавядае частцы парабалы ў першай чвэрці xOy, а знак «мінус» — частцы парабалы ў чацвёртай чвэрці xOy.

Дадзім спосаб пабудовы парабалы. Дзеля гэтага на плоскасці xOy правядзем прамую $x=-2p$ (рыс. 4.14).



Рыс. 4.14

Няхай P ёсць адвольны пункт гэтай прамой, ён мае каардынаты $(-2p;\ y)$. З пункта P пабудуем прамую L_1, паралельную восі Ox; і прамую PO. Затым з пункта O пабудуем прамую L_2, перпендыкулярную прамой PO. Пакажам, што пункт M перасячэння прамых L_1 і L_2 належыць парабале, якая вызначаецца раўнаннем (4.34). Сапраўды, з прамавугольнага трохвугольніка POM вынікае, што адрэзак OK ёсць сярэдняе геаметрычнае адрэзкаў PK і KM, ■ таму $y=\sqrt{2px}$, дзе x — абцыса M.

Разгледзім наступнае кананічнае раўнанне лініі другога парадку

$$a^2x^2-b^2y^2=0, \tag{4.35}$$

якое можна запісаць у выглядзе

$$(ax-by)(ax+by)=0.$$

Зразумела, што калі каардынаты $(x;\ y)$ якога-небудзь пункта плоскасці праўдзяць раўнанне (4.35), то гэтыя ж каардынаты задавальняюць хоць адно з раўнанняў:

$$ax-by=0,\ ax+by=0. \tag{4.36}$$

Раўнанні (4.36) вызначаюць пару перасякальных прамых.

Наадварот, калі каардынаты $(x;\ y)$ праўдзяць хоць адно раўнанне (4.36), то яны спраўдзяць і кананічнае

раўнанне (4.35). Такім чынам, раўнанне (4.35) вызначае пару перасякальных прамых.

Падобны аналіз можна правесці і для кананічнага раўнання

$$x^2 - a^2 = 0, \qquad (4.37)$$

якое вызначае пару паралельных прамых $x = \pm a$.

Відавочна, што кананічнае раўнанне

$$x^2 + y^2 = 0 \qquad (4.38)$$

вызначае толькі адзін пункт $O(0; 0)$.

2°. Агульнае раўнанне лініі другога парадку. У папярэднім пункце мы пазнаёміліся з эліпсам, гіпербалай, парабалай, парамі перасякальных або паралельных прамых, якія з'яўляюцца лініямі другога парадку. Натуральна ўзнікае пытанне, якія яшчэ ёсць лініі другога парадку? Адказ на сфармуляванае пытанне складае змест гэтага пункта.

Будзем разглядаць агульнае раўнанне лініі другога парадку

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (4.39)$$

дзе A, B, C, D, E, F ёсць пэўныя рэчаісныя лікі і хоць адзін з лікаў A, B, C няроўны нулю. Зразумела, што лінія L (вызначаная гэтым раўнаннем) як геаметрычны аб'ект не зменіцца, калі ад зыходнай сістэмы каардынат Oxy перайсці да іншай дэкартавай прамавугольнай сістэмы каардынат $O_1x_1y_1$.

Пакажам, што існуе такая сістэма $O_1x_1y_1$, у якой раўнанне L набывае такі просты выгляд, што геаметрычная характарыстыка лініі L не выклікае вялікіх цяжкасцяў. Далей мы пададзім правілы, з дапамогай якіх выбіраецца патрэбная нам сістэма $O_1x_1y_1$, а таксама вызначаецца тып лініі на падставе яе зыходнага раўнання (4.39).

Паколькі ўсякі пераход ад сістэмы Oxy да сістэмы $O_1x_1y_1$ без пераарыентацыі каардынатных восяў і без змянення даўжыні ортаў можа быць здзейснены з дапамогай паралельнага пераносу, і затым павароту сістэмы каардынат, то мы асобна будзем разглядаць каэфіцыенты раўнання (4.39) пры паралельным пераносе і павароце.

Дамовімся сукупнасць складнікаў $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ левай часткі раўнання (4.39) называць *сукупнасцю ста-*

рэйшых складнікаў, а сукупнасць складнікаў $2Dx+$ $+2Ey$ — *лінейнай часткай раўнання.*

Няхай дэкартава прамавугольная сістэма каардынат $O_1x_1y_1$ ёсць вынік паралельнага пераносу сістэмы Oxy у кірунку вектара $\overrightarrow{OO_1}$. Тады формулы пераўтварэння каардынат маюць выгляд:

$$x=x_1+x_0,\ y=y_1+y_0,$$

дзе $(x_0;\ y_0)$ ёсць каардынаты пункта O_1 у сістэме Oxy.

Падстаўляючы гэтыя формулы ў левую частку (4.39), атрымаем раўнанне лініі L у сістэме $O_1x_1y_1$:

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2D_1x_1+2E_1y_1+F_1=0, \quad (4.40)$$

дзе

$$\begin{aligned} D_1&=Ax_0+By_0+D,\ E_1=Bx_0+Cy_0+E,\\ F_1&=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Аналізуючы раўнанне (4.40), можна адзначыць, што пры паралельным пераносе сістэмы каардынат сукупнасць старэйшых складнікаў раўнання лініі не мяняецца.

Зразумела, што раўнанне (4.40) спросціцца, калі каэфіцыенты D_1 і E_1 будуць роўныя нулю. У гэтым выпадку сістэма

$$\left.\begin{aligned} Ax+By&=-D,\\ Bx+Cy&=-E \end{aligned}\right\} \quad (4.42)$$

будзе мець развязак.

Кожны развязак сістэмы (4.42) называецца *цэнтрам лініі L*. Калі лінія L мае адзіны цэнтр, то яна называецца *цэнтральнай*. Дадзім геаметрычнае тлумачэнне словазлучэнню «цэнтр лініі». Будзем лічыць, што пачатак сістэмы $O_1x_1y_1$ знаходзіцца ў цэнтры лініі. Тады раўнанне (4.40) набывае выгляд

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+F_1=0.$$

Паколькі ў гэтым раўнанні адсутнічае лінейная частка, то разам з пунктам $M(x_1;\ y_1)$ лініі належыць і пункт $M^*(-x_1;\ -y_1)$, які сіметрычны M у дачыненні да O_1. Такім чынам, калі лінія L мае цэнтр, то ён з'яўляецца цэнтрам сіметрыі лініі.

Згодна з правілам Крамэра, сістэма (4.42) мае адзіны развязак у тым і толькі тым выпадку, калі

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (4.43)$$

Гэтая няроўнасць ёсць неабходная і дастатковая ўмова для таго, каб лінія L была цэнтральнай.

У якасці прыкладаў цэнтральных ліній можна нагадаць эліпс і гіпербалу. Парабала не з'яўляецца цэнтральнай лініяй.

Няхай цяпер сістэма каардынат $O_1x_1y_1$ ёсць вынік павароту сістэмы Oxy на вугал φ. Пункты O і O_1 у гэтым выпадку супадаюць. Формулы пераўтварэння каардынат маюць выгляд:

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi,$$
$$y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi.$$

Падстаўляючы гэтыя формулы ў левую частку роўнасці (4.39), атрымаем раўнанне лініі L у сістэме $O_1x_1y_1$:

$$A_1x_1^2 + 2B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F_1 = 0, \qquad (4.44)$$

дзе

$$A_1 = B\sin 2\varphi + \frac{1}{2}(A - C)\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(A + C),$$

$$B_1 = -\frac{1}{2}(A - C)\sin 2\varphi + B\cos 2\varphi,$$

$$C_1 = -B\sin 2\varphi - \frac{1}{2}(A - C)\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(A + C), \qquad (4.45)$$

$$D_1 = D\cos\varphi + E\sin\varphi,$$

$$E_1 = E\cos\varphi - D\sin\varphi,$$

$$F_1 = F.$$

Аналізуючы роўнасці (4.45), можна адзначыць, што пры павароце сістэмы каардынат каэфіцыенты сукупнасці старэйшых складнікаў раўнання (4.44) залежаць толькі ад каэфіцыентаў сукупнасці старэйшых складнікаў раўнання (4.39), каэфіцыенты лінейнай часткі раўнання (4.44) — толькі ад каэфіцыентаў лінейнай часткі раўнання (4.39), а вольныя складнікі раўнанняў супадаюць.

Апрача таго пакажам, што справядлівая

Лема 4.1. *Усякае раўнанне (4.39) лініі L спецыяльным паваротам сістэмы каардынат на вугал φ спрашчаецца так, што ў раўнанні (4.44) каэфіцыент B_1 роўны нулю.*

□ У раўнанні (4.39) будзем лічыць $B \neq 0$. На падставе другой роўнасці (4.45) атрымаем, што патрэбны нам

вугал павароту φ вызначаецца трыганаметрычным раўнаннем

$$-\frac{1}{2}(A-C)\sin 2\varphi+B\cos 2\varphi=0,$$

адкуль вынікае

$$\operatorname{ctg} 2\varphi=\frac{A-C}{2B} \text{ ці } \varphi=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{A-C}{2B},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi. \blacksquare$$

Для каэфіцыентаў сукупнасці старэйшых складнікаў вызначым велічыні $I_1=A+C$, $I_2=AC-B^2$. У дачыненні да гэтых велічынь мае месца

Лема 4.2. *Усякі паралельны перанос або паварот сістэмы каардынат не змяняе значэнняў* I_1, I_2.

□ Доказ лемы непасрэдна вынікае з формул (4.44) і (4.45). ■

Велічыні I_1, I_2 называюцца *інварыянтамі раўнання лініі* L. Заўважым, што велічыня I_2 роўная вызначніку ў няроўнасці (4.43), ▪ таму для цэнтральнай лініі маем $I_2\neq 0$.

На падставе лемы 4.1 раўнанне цэнтральнай лініі ў пэўнай сістэме каардынат $O_1x_1y_1$ будзе мець просты выгляд:

$$A_1x_1^2+C_1y_1^2+F_1=0. \tag{4.46}$$

Каб класіфікаваць цэнтральныя лініі, трэба разгледзець два выпадкі: $I_2>0$ і $I_2<0$.

У выпадку $I_2>0$ на падставе лемы 4.2 атрымаем $I_2=A_1C_1>0$. Значыць, A_1, C_1 няроўныя нулю і маюць аднолькавы знак, які супадае са знакам I_1. Увогуле можна лічыць A_1, C_1 дадатнымі, у іншым выпадку раўнанне (4.46) памножым на -1. Пры гэтых акалічнасцях раўнанне (4.46) можна запісаць наступным чынам:

$$\frac{x_1^2}{(\sqrt{-F_1/A_1})^2}+\frac{y_1^2}{(\sqrt{-F_1/C_1})^2}=1 \text{ пры } F_1<0;$$

$$\frac{x_1^2}{(\sqrt{1/A_1})^2}+\frac{y_1^2}{(\sqrt{1/C_1})^2}=0 \qquad \text{пры } F_1=0;$$

$$\frac{x_1^2}{(\sqrt{F_1/A_1})^2}+\frac{y_1^2}{(\sqrt{F_1/C_1})^2}=-1 \quad \text{пры } F_1>0;$$

Відавочна, что пры $F_1<0$ атрымалі кананічнае раўнанне эліпса з паўвосямі $\sqrt{-F_1/A_1}$, $\sqrt{-F_1/C_1}$, пры $F=0$ — раўнанне пункта $O_1(0;\ 0)$, пры $F_1>0$ раўнанне (4.46) не з'яўляецца раўнаннем лініі.

Разгледзім выпадак $I_2<0$. Паколькі $I_2=A_1C_1$, то каэфіцыенты A_1, C_1 маюць процілеглыя знакі. Увогуле можна лічыць $A_1>0$, $C_1<0$. Раўнанне (4.46) можна запісаць у выглядзе:

$$\frac{y_1^2}{(\sqrt{F_1/|C_1|})^2}-\frac{x_1^2}{(\sqrt{F_1/|A_1|})^2}=1 \qquad \text{пры } F_1<0;$$

$$\frac{x_1^2}{(\sqrt{1/|A_1|})^2}-\frac{y_1^2}{(\sqrt{1/|C_1|})^2}=0 \qquad \text{пры } F_1=0;$$

$$\frac{x_1^2}{(\sqrt{-F_1/|A_1|})^2}-\frac{y_1^2}{(\sqrt{-F_1/|C_1|})^2}=1 \qquad \text{пры } F_1>0.$$

Пры $F_1<0$ атрымалі кананічнае раўнанне гіпербалы з рэчаіснай воссю O_1y_1, уяўнай воссю O_1x_1 і паўвосямі $\sqrt{F_1/|A_1|}$, $\sqrt{F_1/|C_1|}$. Пры $F_1=0$ маем кананічнае раўнанне пары перасякальных прамых. Пры $F_1>0$ атрымалі кананічнае раўнанне гіпербалы з рэчаіснай воссю O_1x_1, уяўнай воссю O_1y_1 і паўвосямі $\sqrt{-F_1/|A_1|}$, $\sqrt{-F_1/|C_1|}$.

Пры $I_2>0$ цэнтральная лінія называецца *лініяй эліптычнага тыпу*, а пры $I_2<0$ — *лініяй гіпербалічнага тыпу*.

Калі $I_2=0$, то раўнанне (4.39) не вызначае цэнтральную лінію. Таму, згодна з лемай 4.1, у некаторай сістэме $O_1x_1y_1$ раўнанне лініі набывае выгляд

$$A_1x_1^2+C_1y_1^2+2D_1x_1+2E_1y_1+F_1=0.$$

Паколькі $I_2=0$, а $I_1=A_1+C_1\neq 0$, то толькі адзін з каэфіцыентаў A_1, C_1 роўны нулю. З гэтага вынікае, што раўнанне лініі запішацца ў выглядзе

$$I_1x_1^2+2D_1x_1+2E_1y_1+F_1=0$$

або

$$I_1y_1^2+2D_1x_1+2E_1y_1+F_1=0. \qquad (4.47)$$

Дэталёва разгледзім толькі апошняе раўнанне, бо спецыяльным паваротам сістэмы $O_1x_1y_1$ на вугал $\varphi=\pi/2$ да яго прыводзіцца і папярэдняе раўнанне.

Пры $D_1\neq 0$ раўнанне лініі (4.47) можна запісаць у выглядзе

$$I_1\left(y_1+\frac{E_1}{I_1}\right)^2=-2D_1\left(x_1+\frac{F_1}{2D_1}-\frac{E_1^2}{2I_1D_1}\right).$$

Калі зрабіць паралельны перанос сістэмы $O_1x_1y_1$ да сістэмы $O_2x_2y_2$ з дапамогаю формул:

$$x_1 = x_2 - \frac{F_1}{2D_1} + \frac{E_1^2}{2I_1D_1}, \quad y_1 = y_2 - \frac{E_1}{I_1},$$

то лінія будзе вызначацца раўнаннем

$$y_2^2 = 2(-D_1)x_2.$$

Пры $D_1 < 0$ атрымалі кананічнае раўнанне парабалы з параметрам $p = -D_1$. Пры $D_1 > 0$ з дапамогаю спецыяльнага паварота сістэмы $O_2x_2y_2$ на вугал $\varphi = \pi$, зноў атрымаем кананічнае раўнанне парабалы з параметрам $p = D_1$.

У выпадку $D_1 = 0$ раўнанне (4.47) набывае выгляд

$$I_1(y_1 + E_1/I_1)^2 - (E_1^2/I_1^2 - F_1) = 0.$$

Здзяйсняючы далей паралельны перанос сістэмы $O_1x_1y_1$, згодна з формуламі $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 - E_1/I_1$, атрымаем раўнанне лініі ў выглядзе

$$I_1y_2^2 - (E_1^2/I_1^2 - F_1) = 0.$$

Апошняе раўнанне можа быць толькі кананічным раўнаннем пары паралельных прамых.

Калі $I_2 = 0$, то лінія l называецца *лініяй парабалічнага тыпу.*

Падводзячы вынікі нашых разважанняў, адзначым, што агульнае раўнанне лініі з дапамогай пераўтварэння каардынат спрашчаецца да аднаго з кананічных раўнанняў лініі другога парадку.

3°. Палярныя раўнанні эліпса, гіпербалы і парабалы. Вызначым раўнанні эліпса, гіпербалы і парабалы ў палярнай сістэме каардынат. Дзеля гэтага патрэбна разгледзець некаторыя ўласцівасці ліній, звязаныя з паняццямі эксцэнтрысітэта і дырэктрысы.

Эксцэнтрысітэтам эліпса або *гіпербалы* называецца велічыня $\varepsilon = c/a$. Улічваючы, што для эліпса $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, а для гіпербалы $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, атрымаем:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2} \quad (\text{для эліпса}),$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + b^2/a^2} \quad (\text{для гіпербалы}).$$

Гэта азначае, што $0 \leqslant \varepsilon < 1$ для эліпса, $\varepsilon > 1$ для гіпербалы.

Будзем лічыць, што для парабалы $\varepsilon = 1$. Адзначым,

што калі эліпс з'яўляецца акружынай, то $\varepsilon=0$, паколькі ў гэтым выпадку $a=b$.

Заўвага 4.2. Эксцэнтрысітэт эліпса характарызуе форму эліпса: чым ε бліжэй да нуля, тым больш эліпс падобны на акружыну; чым большы ε, тым больш эліпс «сплюснуты» да восі Ox.

Заўвага 4.3. Эксцэнтрысітэт гіпербалы ёсць характарыстыка вугла паміж асімптотамі, а значыць, і формы гіпербалы: чым менш ε, тым больш гіпербала «сплюснута» да рэчаіснай восі.

Дырэктрысай эліпса (гіпербалы) называецца прамая, перпендыкулярная восі, якой належаць фокусы, і праведзеная на адлегласці a/ε ад цэнтра. З гэтага азначэння вынікае, што эліпс (гіпербала) мае дзве дырэктрысы, якія знаходзяцца па розныя бакі ад цэнтра.

Фокус F_i і дырэктрысу D_i, $i=1, 2$, якія знаходзяцца па адзін бок ад цэнтра, будзем называць *адпаведнымі*.

Раней мы далі азначэнне дырэктрысы парабалы як прамой, перпендыкулярнай восі і праведзенай на адлегласці p ад фокуса, прычым дырэктрыса не мае агульных пунктаў з парабалай.

Заўвага 4.4. У азначэнні дырэктрысы эліпса маецца на ўвазе, што ён не з'яўляецца акружынай ($\varepsilon\neq 0$).

Для кожнага пункта M эліпса (гіпербалы) праз r_j, d_j абазначым адлегласці ад M да фокуса F_j і дырэктрысы D_j, $j=1, 2$.

У дачыненні да гэтых велічынь мае месца

Тэарэма 4.9. *Для кожнага пункта эліпса (гіпербалы) праўдзіцца роўнасць*

$$\varepsilon=r_j/d_j,\ j=1,\ 2.$$

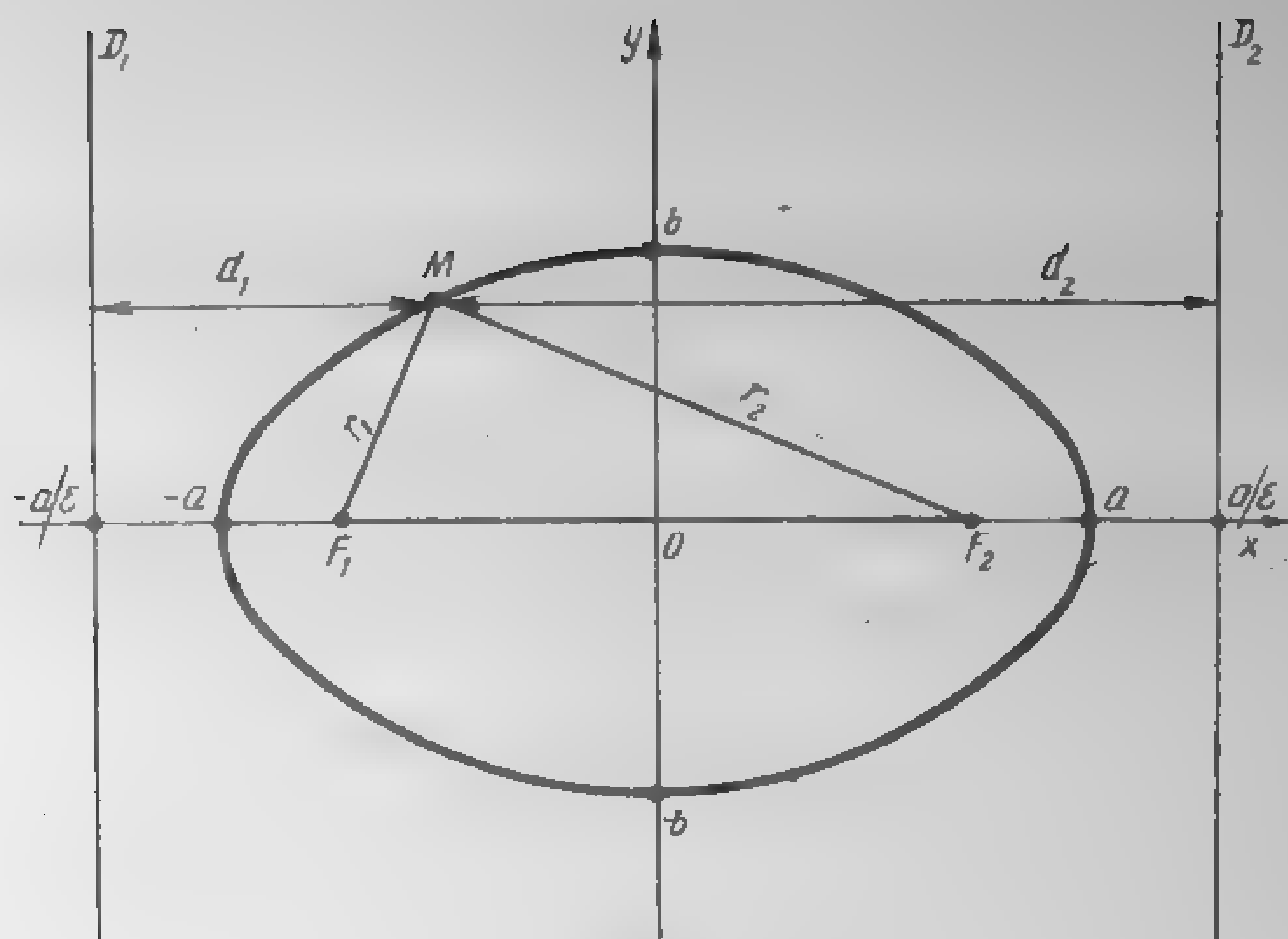
□ Няхай на плоскасці выбрана дэкартава прамавугольная сістэма каардынат Oxy, у дачыненні да якой эліпс (гіпербала) вызначаецца кананічным раўнаннем (4.27) (або (4.29)). Разгледзім спачатку доказ тэарэмы для пункта M эліпса (рыс. 4.15).

З рыс. 4.15 відаць, што

$$d_1=a/\varepsilon+x,\ d_2=a/\varepsilon-x.$$

Беручы пад увагу доказ тэарэмы 4.6, атрымаем формулы:

$$r_1=|\overrightarrow{F_1M}|=a+\varepsilon x,\ r_2=|\overrightarrow{F_2M}|=a-\varepsilon x.$$



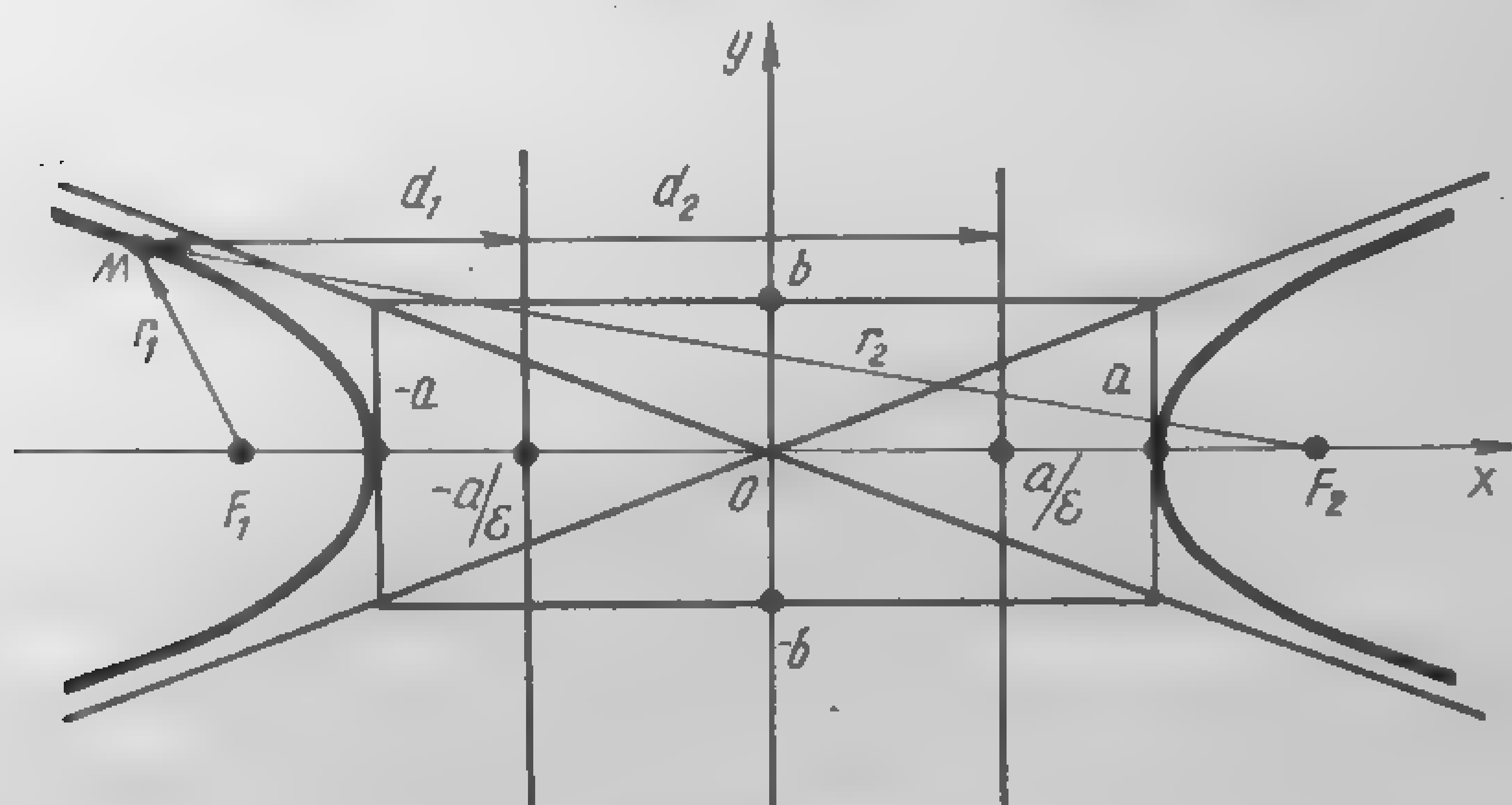
Рыс. 4.15

У выніку знойдзеных выразаў для r_j, d_j, $j=1, 2$, маем:

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a+\varepsilon x}{a/\varepsilon+x}=\varepsilon,\ \frac{r_2}{d_2}=\frac{a-\varepsilon x}{a/\varepsilon-x}=\varepsilon.$$

Цяпер разгледзім доказ тэарэмы для пункта M гіпербалы. Няхай M належыць левай галіне гіпербалы (рыс. 4.16). З рыс. 4.16 відаць, што

$$d_1=-x-a/\varepsilon,\ d_2=-x+a/\varepsilon,$$



Рыс. 4.16

а калі спаслацца на доказ тэарэмы 4.7, то будзем мець формулы:

$$r_1=-(a+\varepsilon x),\ r_2=-(\varepsilon x-a).$$

У выніку гэтых роўнасцяў атрымаем:

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{-(a+\varepsilon x)}{-(x+a/\varepsilon)}=\varepsilon,\ \frac{r_2}{d_2}=\frac{-(\varepsilon x-a)}{-(x-a/\varepsilon)}=\varepsilon.$$

Тэарэма даказваецца аналагічна для пункта M, які належыць правай галіне гіпербалы. ■

Адзначым, што для парабалы на падставе тэарэмы 4.8 таксама справядлівая ўласцівасць, сфармуляваная ў тэарэме 4.9: $r/d=1=\varepsilon$.

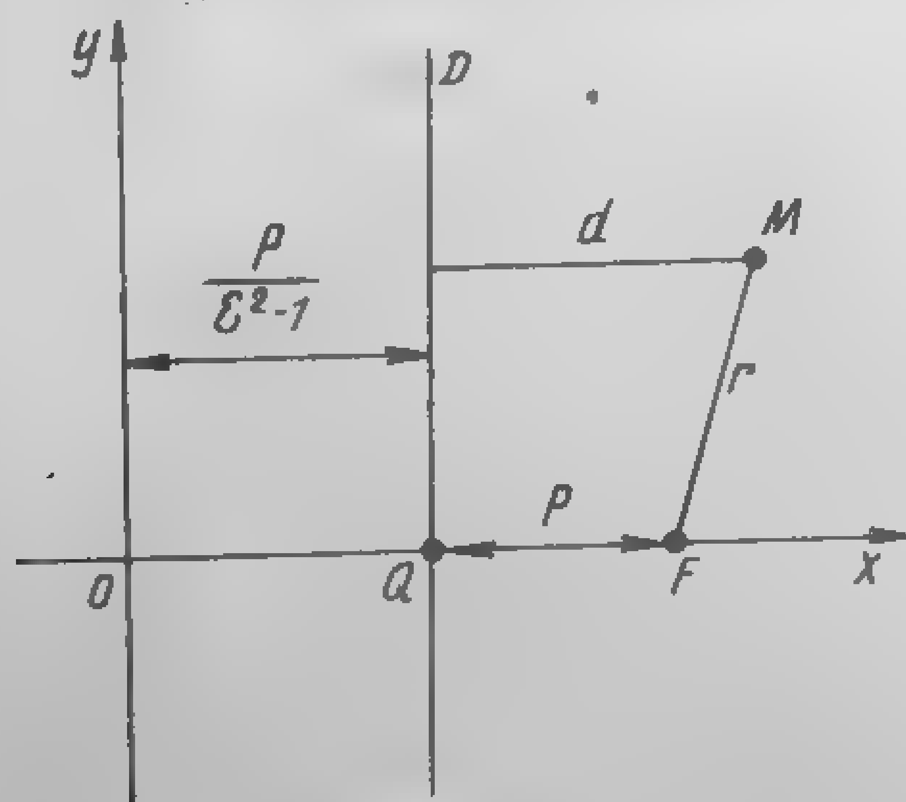
Для эліпса, які не супадае з акружынай, для парабалы і гіпербалы справядлівае сцверджанне, адваротнае (у пэўным сэнсе) тэарэме 4.9.

Тэарэма 4.10. *Няхай для геаметрычнага месца пунктаў плоскасці выконваецца роўнасць $r/d=\varepsilon$, $\varepsilon=\text{const}$, дзе r ёсць зменная велічыня, роўная адлегласці ад разгляданых пунктаў плоскасці да фіксаванага пункта F (фокуса), а d — роўная адлегласці ад гэтых пунктаў плоскасці да фіксаванай прамой D (дырэктрысы). Пры гэтым пункт F не належыць D. Калі $\varepsilon<1$, то геаметрычнае месца пунктаў ёсць эліпс; калі $\varepsilon=1$,— парабала; калі $\varepsilon>1$,— гіпербала.*

□ Пры $\varepsilon=1$ на падставе тэарэмы 4.8 атрымаем, што дадзенае месца пунктаў ёсць парабала.

Няхай $\varepsilon>1$. Пераканаемся, што ў гэтым выпадку мы маем гіпербалу. Абазначым праз Q пункт перасячэння прамой D і прамой L, якая праходзіць праз пункт F перпендыкулярна прамой D. Няхай $p=|\overrightarrow{FQ}|$. На прамой L выбіраем кірунак ад Q да F і адзначаем пункт O злева ад Q на адлегласці $p/(\varepsilon^2-1)$. На плоскасці зафіксуем дэкартаву прамавугольную сістэму каардынат Oxy: пачатак сістэмы ў пункце O, вось Ox супадае з накіраванай прамой L, вось Oy выбіраецца такім чынам, каб сістэма Oxy была правая (рыс. 4.17).

$$c=p+\frac{p}{\varepsilon^2-1}=\frac{\varepsilon^2 p}{\varepsilon^2-1}.$$



Рыс. 4.17

Абазначым праз c абцысу пункта F. Згодна з вызначэннем сістэмы Oxy,

Няхай $M(x;\, y)$ ёсць адвольны пункт плоскасці. Адлегласці ад яго да пункта F і прамой D вызначаюцца формуламі:

$$r=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\ d=\left|x-\frac{p}{\varepsilon^2-1}\right|.$$

Тады $d=|x-a/\varepsilon|$, дзе a ёсць дадатны лік, роўны $p\varepsilon/(\varepsilon^2-1)$.

Калі M належыць да геаметрычнага месца пунктаў, якія адпавядаюць умове тэарэмы, то мае месца стасунак

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,/\,|x-a/\varepsilon|=\varepsilon.$$

Падвысім абедзве часткі гэтай роўнасці да квадрата і атрымаем

$$x^2-2cx+c^2+y^2=x^2\varepsilon^2-2a\varepsilon x+a^2.$$

Згодна з залежнасцю $c=a\varepsilon$, апошняя роўнасць набывае выгляд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

Цяпер, калі абазначыць $b^2=c^2-a^2$, атрымаем, што каардынаты пункта M задавальняюць кананічнае раўнанне гіпербалы.

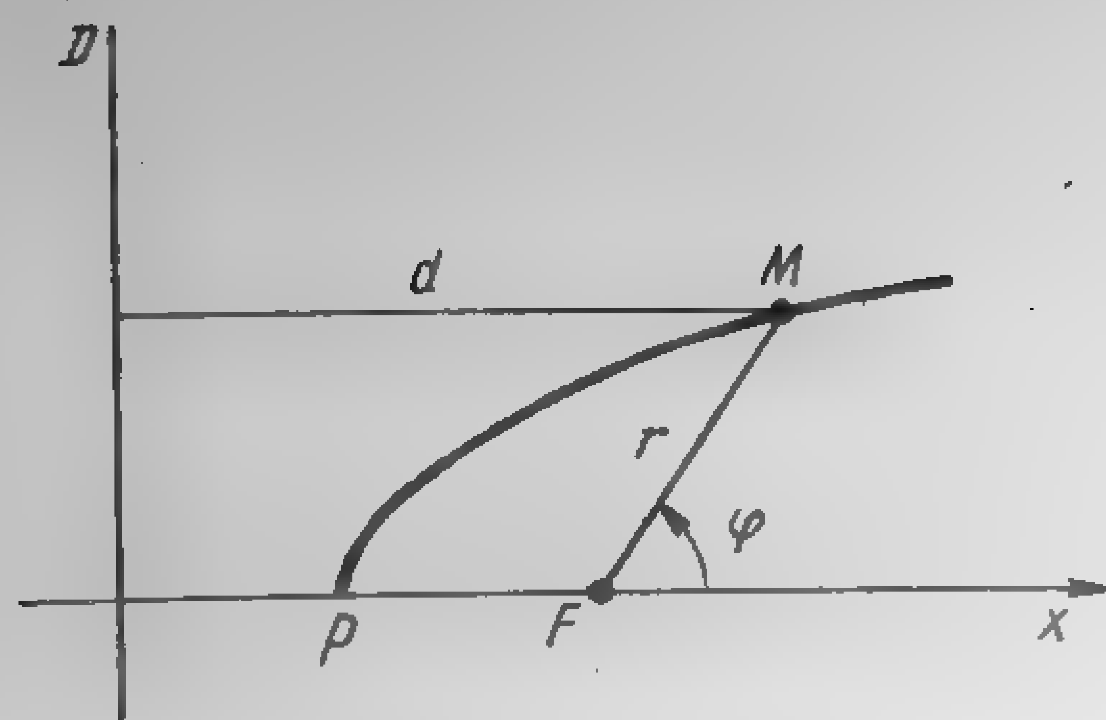
Аналагічна даказваецца тэарэма пры $\varepsilon<1$, праўда, кірунак прамой L выбіраецца ад F да Q і пункт O адзначаецца на L злева ад пункта F на адлегласці $p\varepsilon^2/(1-\varepsilon)^2$.

Грунтуючыся на тэарэмах 4.9, 4.10, прыходзім да высновы, што роўнасць $r/d=\varepsilon$ пры пэўным значэнні ε ёсць неабходная і дастатковая ўмова таго, каб пункт плоскасці належаў эліпсу (які не супадае з акружынай), парабале, гіпербале. Гэтай умовай мы будзем карыстацца пры вызначэнні раўнанняў у палярных каардынатах пералічаных ліній.

Спачатку разгледзім выпадак, калі лінія ёсць эліпс або парабала.

Полюс палярнай сістэмы каардынат выбіраем у пункце F, а палярную вось — перпендыкулярнай прамой D і накіраванай ад D да F (рыс. 4.18).

Абазначым праз p адлегласць ад F да D, а праз $(r;\, \varphi)$



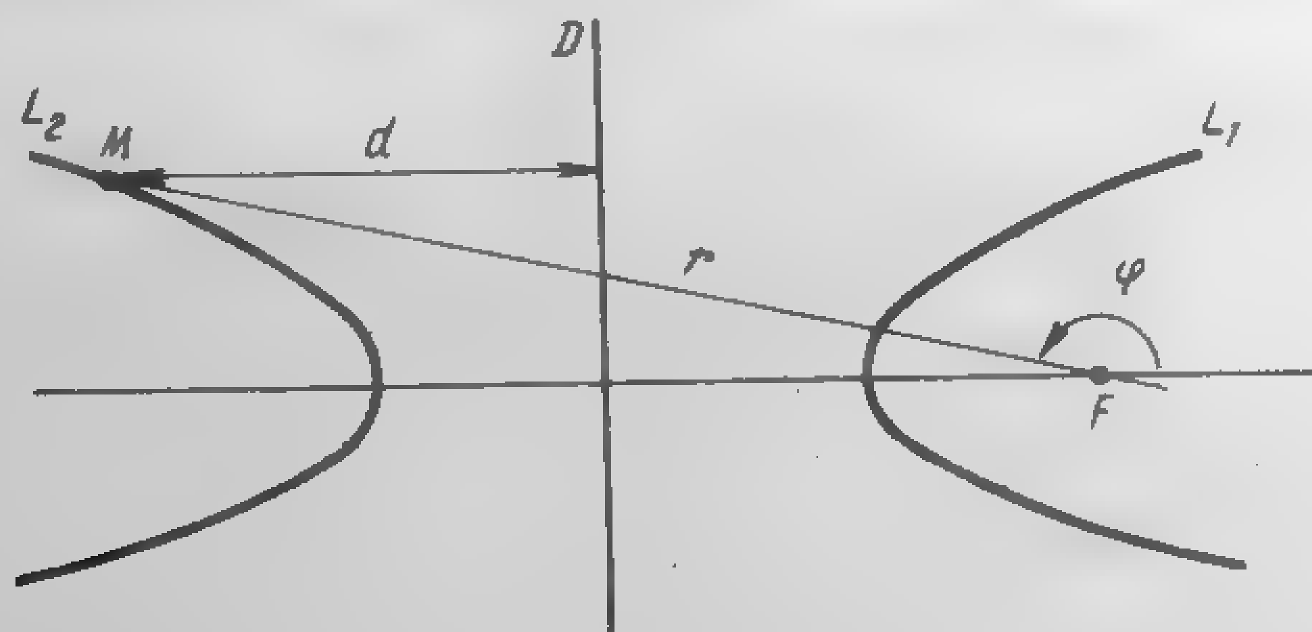
Рыс. 4.18

палярныя каардынаты пункта M парабалы (эліпса). З рыс. 4.18 відаць, што $d=p+r\cos\varphi$, і таму на падставе роўнасці $r/d=\varepsilon$ атрымаем раўнанне

$$r=\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\varphi}. \tag{4.48}$$

Яно называецца *палярным раўнаннем эліпса ці парабалы*. У выпадку эліпса $\varphi\in[0,\ 2\pi]$, а парабалы — $\varphi\in\in(0,\ 2\pi)$.

Вызначым цяпер палярнае раўнанне гіпербалы. Няхай L_1 ёсць галіна гіпербалы, якая адпавядае фокусу F, а L_2 — другая галіна (рыс. 4.19). Разважаючы як і ў выпадку эліпса (парабалы), лёгка пераканацца, што палярнае раўнанне галіны L_1 гіпербалы мае выгляд (4.48).



Рыс. 4.19

Вызначым палярнае раўнанне L_2. Няхай $M(r;\ \varphi)$ ёсць адвольны пункт галіны L_2. З рыс. 4.19 відаць, што $d=-r\cos\varphi-p$, адкуль, згодна з роўнасцю $r/d=\varepsilon$, атрымаем раўнанне галіны L_2:

$$r=\frac{-p\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\varphi}.$$

У выніку прыходзім да высновы, што палярнае раўнанне гіпербалы мае выгляд

$$r=\begin{cases}\dfrac{p\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\varphi}, & \varphi\in(\alpha_1,\ \beta_1),\\ \dfrac{-p\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\varphi}, & \varphi\in(\alpha_2,\ \beta_2),\end{cases}$$

дзе межы прамежкаў змянення φ вызначаюцца вугламі паміж асімптотамі гіпербалы і палярнай воссю. Згодна з азначэннем эксцэнтрысітэта ε гіпербалы, атрымаем формулы:

$$\alpha_1=\arccos(1/\varepsilon),\qquad \beta_1=2\pi-\arccos(1/\varepsilon),$$

$$\alpha_2=\arccos(-1/\varepsilon),\ \beta_2=2\pi-\arccos(-1/\varepsilon)$$

для гэтых вуглоў.

4.4. ПАВЕРХНІ ДРУГОГА ПАРАДКУ

1°. Кананічныя раўнанні паверхняў другога парадку. З § 4.2 мы ведаем, што плоскасці, і толькі яны, з'яўляюцца паверхнямі першага парадку. Разгледзім паверхні другога парадку. Пачнем з фармулёўкі некалькіх азначэнняў.

Азначэнне 4.4. *Эліпсоідам называецца мноства ўсіх пунктаў прасторы, каардынаты якіх праўдзяць раўнанне*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,\ b,\ c>0. \qquad (4.49)$$

Паколькі зменныя x, y, z прысутнічаюць у раўнанні толькі ў цотных ступенях, то эліпсоіду разам з пунктам $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ належаць таксама пункты $M_2(-x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_3(x_1;\ -y_1;\ z_1)$, $M_4(x_1;\ y_1;\ -z_1)$, $M_5(x_1;\ -y_1;\ -z_1)$, $M_6(-x_1;\ y_1;\ -z_1)$, $M_7(-x_1;\ -y_1;\ z_1)$, $M_8(-x_1;\ -y_1;\ -z_1)$. З гэтага вынікае, што эліпсоід ёсць сіметрычная паверхня ў дачыненні да кожнай каардынатнай плоскасці, кожнай каардынатнай восі і пачатку сістэмы каардынат.

Апрача таго, з раўнання эліпсоіда вынікае, што каардынаты яго пунктаў задавальняюць няроўнасці: $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant b$, $|z|\leqslant c$. Гэта азначае, што эліпсоід ёсць абмежаваная паверхня, якая знаходзіцца ўнутры прамавугольнага паралелепіпеда памерамі $2a\times2b\times2c$.

Каб уявіць форму эліпсоіда, здзейснім сячэнні гэтай паверхні плоскасцямі, паралельнымі каардынатнай плоскасці xOy. Раўнанні такіх плоскасцяў ёсць $z=h$, $-c\leqslant\leqslant h\leqslant c$, а лінія перасячэння вызначаецца сістэмай

$$\left.\begin{array}{l} x^2/a^2+y^2/b^2=1-h^2/c^2, \\ z=h. \end{array}\right\}$$

З гэтага відаць, што лінія перасячэння з'яўляецца эліпсам з паўвосямі

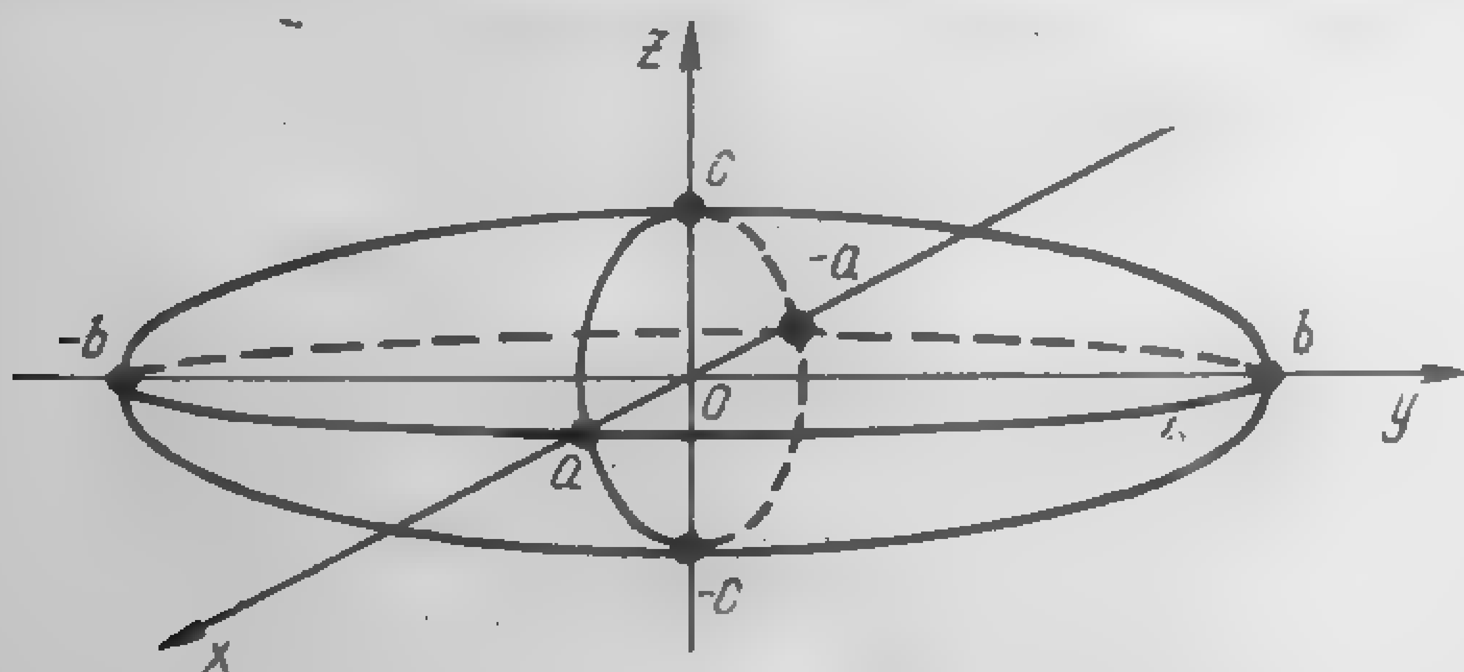
$$a^*=a\sqrt{1-h^2/c^2}, \quad b^*=b\sqrt{1-h^2/c^2}, \quad -c\leqslant h\leqslant c,$$

які размешчаны сіметрычна ў дачыненні да плоскасцяў xOz і yOz.

Зразумела, што велічыні a^*, b^* маюць найбольшыя значэнні пры $h=0$, г. зн. самы вялікі эліпс утвараецца ў выніку сячэння эліпсоіда плоскасцю $z=0$. Калі $|h|$ нарастае, то велічыні a^*, b^* спадаюць і пры $h=\pm c$ становяцца роўнымі нулю, г. зн. эліпс як сечыва эліпсоіда плоскасцямі $z=\pm c$ выраджаецца ў пункт.

Аналагічную сітуацыю маем і ў выніку сячэння эліпсоіда плоскасцямі, паралельнымі xOz ($y=h$, $-b\leqslant h\leqslant b$), і плоскасцямі, паралельнымі yOz ($x=h$, $-a\leqslant h\leqslant a$). Адзначым толькі, што сама каардынатная плоскасць xOz сячэ эліпсоід па эліпсе з паўвосямі a, c, а плоскасць yOz — па эліпсе з паўвосямі b, c.

У выніку гэтых разважанняў прыходзім да высновы, што эліпсоід ёсць паверхня, паказаная на рыс. 4.20.



Рыс. 4.20

Велічыні a, b, c называюцца *паўвосямі эліпсоіда*. Калі ўсе яны розныя, то эліпсоід называецца *трохвосным*. У выпадку, калі $a=b=c$, эліпсоід з'яўляецца сферай радыуса a з цэнтрам у пункце O.

Азначэнне 4.5. *Аднапаласцевым гіпербалоідам называецца мноства ўсіх пунктаў прасторы, каардынаты якіх праўдзяць раўнанне*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a, \ b, \ c>0. \tag{4.50}$$

Па аналогіі з эліпсоідам можна паказаць, што аднаполасцевы гіпербалоід сіметрычны ў дачыненні да кожнай з каардынатных плоскасцяў, кожнай з каардынатных восяў і пачатку каардынат.

Будзем разглядаць лініі перасячэння гіпербалоіда з плоскасцю $z=h$, $-\infty<h<+\infty$. Няцяжка бачыць, што гэтыя лініі ёсць эліпсы з паўвосямі

$$a^*=a\sqrt{1+h^2/c^2},\quad b^*=b\sqrt{1+h^2/c^2}.$$

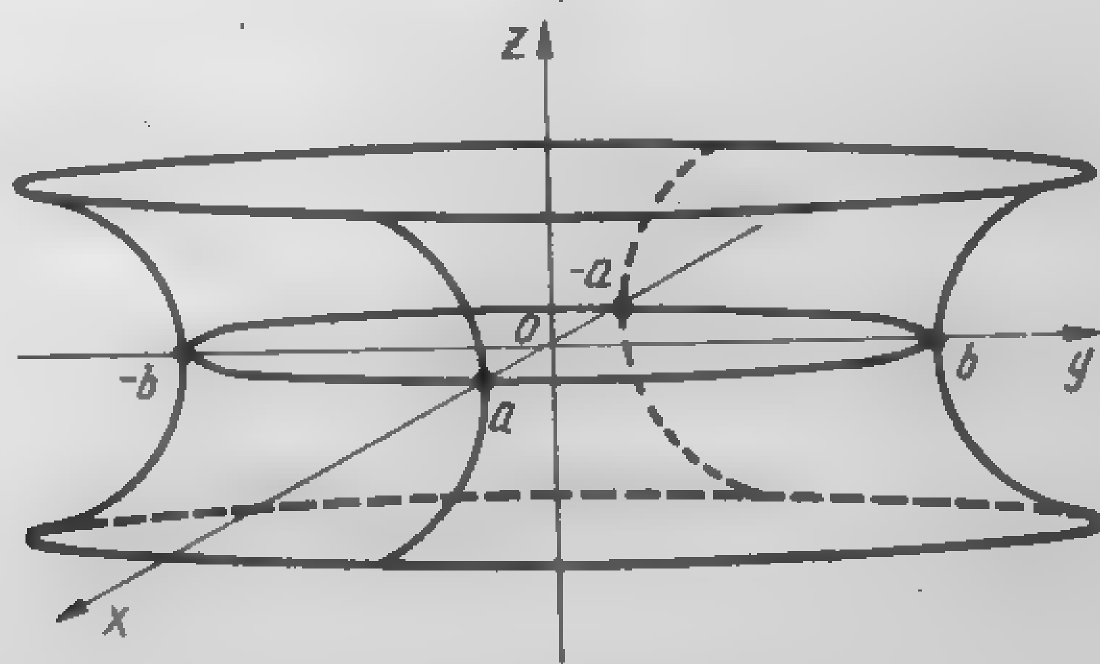
Пры $h=0$ утвараецца эліпс з паўвосямі a, b, які належыць плоскасці xOy; ён называецца *гарлавым эліпсам*. Пры нарастанні $|h|$ паўвосі a^*, b^* неабмежавана павялічваюцца разам з эліпсам, і таму аднаполасцевы гіпербалоід з'яўляецца неабмежаванай паверхняй.

Каб удакладніць форму паверхні, разгледзім яе сячэнні плоскасцямі xOz і yOz. У выніку атрымаем лініі, якія вызначаюцца адпаведна сістэмамі:

$$\left.\begin{array}{l} x^2/a^2-z^2/c^2=1,\\ y=0,\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{l} y^2/b^2-z^2/c^2=1,\\ x=0.\end{array}\right\}$$

Відавочна, што гэтыя лініі ёсць гіпербалы на плоскасці xOz і yOz.

Падводзячы вынікі нашых разважанняў, прыходзім да высновы, што аднаполасцевы гіпербалоід ёсць паверхня, паказаная на рыс. 4.21. Велічыні a, b, c называюцца *паўвосямі гіпербалоіда*.



Рыс. 4.21

Аднаполасцевы гіпербалоід можа быць утвораны пэўным мноствам прамых прасторы. Больш дакладна пакажам, што мае месца

Тэарэма 4.11. *Праз кожны пункт аднаполасцевага гіпербалоіда праходзяць дзве прамыя, якія цалкам належаць гэтай паверхні.*

☐ Разгледзім дзве сістэмы лінейных раўнанняў:

$$\left.\begin{aligned} x/a - z/c &= \lambda(1 - y/b), \\ \lambda(x/a + z/c) &= 1 + y/b, \ \lambda \neq 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x/a - z/c &= \mu(1 + y/b), \\ \mu(x/a + z/c) &= 1 - y/b, \ \mu \neq 0. \end{aligned}\right\}$$

Раўнанне (4.50) аднапорасцевага гіпербалоіда можна атрымаць, калі перамножыць адпаведныя часткі раўнанняў адной і той жа сістэмы. З гэтага вынікае, што прамыя L_λ, $\tilde{L}_\mu$, якія з'яўляюцца лініямі перасячэння плоскасцяў, вызначаных раўнаннямі сістэмы, належаць паверхні.

Пры $\lambda = \mu = 0$ прамыя L_λ, $\tilde{L}_\mu$ вызначаюцца адпаведна сістэмамі:

$$\left.\begin{aligned} x/a - z/c &= 0, \\ 1 + y/b &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x/a - z/c &= 0, \\ 1 - y/b &= 0, \end{aligned}\right\}$$

а пры $\lambda = \mu = \infty$

$$\left.\begin{aligned} 1 - y/b &= 0, \\ x/a + z/c &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 1 + y/b &= 0, \\ x/a + z/c &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Пакажам, што для ўсякага пункта $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ паверхні гіпербалоіда існуюць адпаведныя λ_0, μ_0, для якіх прамыя L_{λ_0}, $\tilde{L}_{\mu_0}$ перасякаюцца ў пункце M_0.

Сапраўды, калі $M_0 \in L_0$ ці $M_0 \in L_\infty$, то μ_0 выбіраем такім, каб мела месца роўнасць

$$\mu_0(x_0/a + z_0/c) = 1 - y_0/b$$

або

$$\mu_0(1 + y_0/b) = x_0/a - z_0c.$$

Калі $M_0 \in \tilde{L}_0$ або $M_0 \in \tilde{L}_\infty$, то λ_0 вызначаецца з роўнасці

$$\lambda_0(x_0/a + z_0/c) = 1 + y_0/b$$

ці

$$\lambda_0(1 - y_0/b) = x_0/a - z_0/c.$$

У іншых выпадках λ_0 і μ_0 выбіраюцца такім чынам, каб мелі месца роўнасці:

$$x_0/a - z_0/c = \lambda_0(1 - y_0/b), \quad x_0/a - z_0/c = \mu_0(1 + y_0/b).$$

Зусім проста пераканацца, што прамыя L_{λ_0} і $\tilde{L}_{\mu_0}$ праходзяць праз пункт M_0. ■

Прамыя L_λ, $\tilde{L}_\mu$ называюцца *прамалінейнымі ўтваральнымі аднапаласцевага гіпербалоіда.*

Азначэнне 4.6. *Паверхня называецца дзвюхпаласцевым гіпербалоідам, калі яна ёсць мноства ўсіх пунктаў прасторы, каардынаты якіх праўдзяць раўнанне*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \quad a,\ b,\ c>0. \qquad (4.51)$$

Як і паверхні, якія разглядаліся раней, дзвюхпаласцевы гіпербалоід сіметрычны ў дачыненні да кожнай з каардынатных плоскасцяў, кожнай з каардынатных восяў і пачатку каардынат.

Сячэнне гіпербалоіда плоскасцямі $z=h$, $-\infty<h<<+\infty$, паралельнымі каардынатнай плоскасці xOy, дае лініі, якія вызначаюцца сістэмай

$$\left.\begin{array}{l} x^2/a^2+y^2/b^2=h^2/c^2-1, \\ z=h, \qquad -\infty<h<+\infty. \end{array}\right\}$$

З гэтага вынікае, што пры $-c<h<c$ гіпербалоід не мае з плоскасцямі агульных пунктаў. Пры $|h|=c$ першае раўнанне сістэмы набывае выгляд

$$x^2/a^2+y^2/b^2=0.$$

Зразумела, што гэтае раўнанне праўдзяць толькі нулявыя значэнні x, y, а таму плоскасці $z=\pm c$ маюць з гіпербалоідам толькі па адным агульным пункце $A_1(0;\ 0;\ c)$, $A_2(0;\ 0;\ -c)$, г. зн. з'яўляюцца датычнымі плоскасцямі.

Пры ўмове $|h|>c$ плоскасці $z=h$ перасякаюць гіпербалоід па эліпсах з паўвосямі

$$a^*=a\sqrt{h^2/c^2-1}, \qquad b^*=b\sqrt{b^2/c^2-1}.$$

Калі велічыня h нарастае, то паўвосі a^*, b^* таксама нарастаюць, імкнучыся да бясконцасці. Апошняе азначае, што дзвюхпаласцевы гіпербалоід з'яўляецца неабмежаванаю паверхняй.

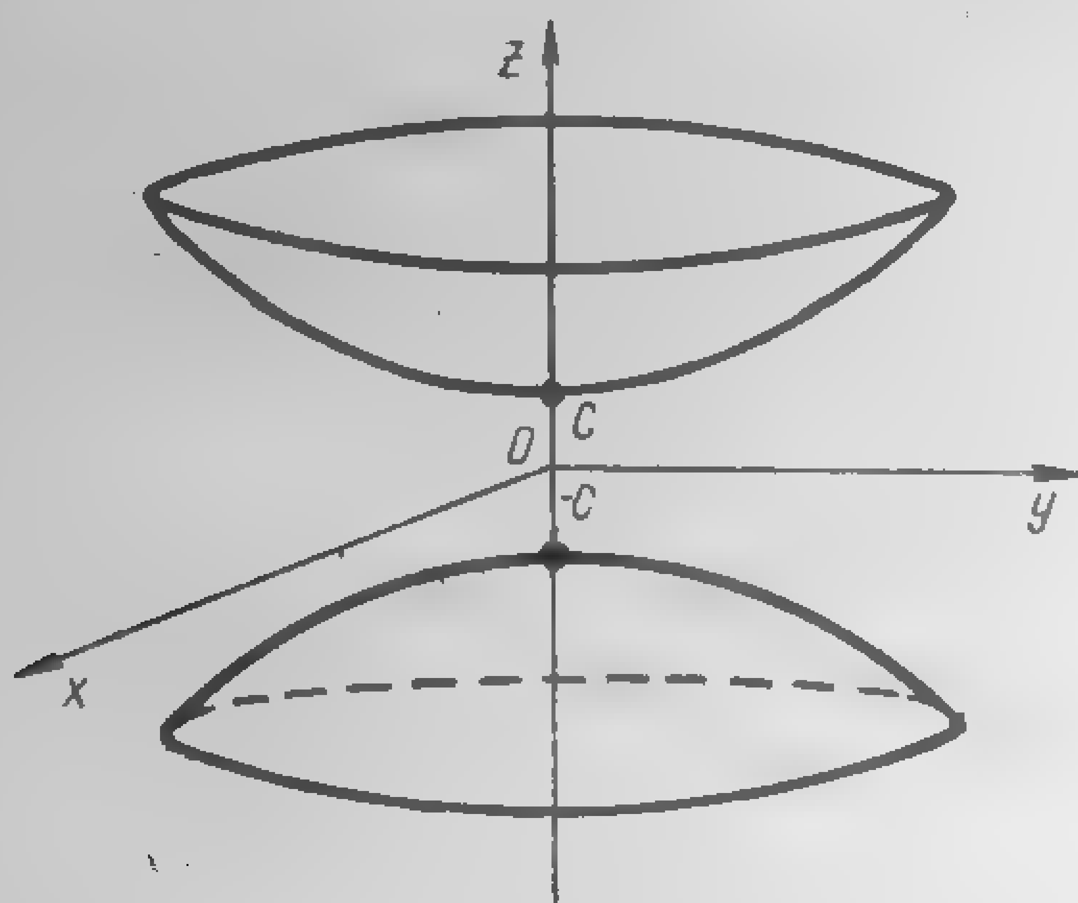
Сячэнне гіпербалоіда каардынатнай плоскасцю yOz дае лінію, якая вызначаецца сістэмай

$$\left.\begin{array}{l} y^2/b^2-z^2/c^2=-1, \\ x=0. \end{array}\right\}$$

Відавочна, што гэта лінія ёсць гіпербала, у якой уяўная

вось ёсць Oy, а рэчаісная вось — Oz. Пункты $(0; 0; c)$ і $(0; 0; -c)$ — вяршыні гіпербалы.

На падставе ўсіх гэтых разважанняў прыходзім да высновы, што дзвюхполасцевы гіпербалоід мае выгляд, пададзены на рыс. 4.22.



Рыс. 4.22

Велічыні a, b, c называюцца *паўвосямі дзвюхполасцевага гіпербалоіда.*

Азначэнне 4.7. *Эліптычным парабалоідам называецца мноства ўсіх пунктаў прасторы, каардынаты якіх праўдзяць раўнанне*

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad p,\ q>0. \tag{4.52}$$

Відавочна, што гэты парабалоід сіметрычны ў дачыненні да плоскасцяў xOz, yOz і восі Oz. Больш таго, паколькі $p,\ q>0$, то парабалоід цалкам знаходзіцца па адзін бок ад плоскасці xOy $(z\geqslant 0)$.

Будзем разглядаць сячэнні парабалоіда плоскасцямі $z=h$, $0\leqslant h<+\infty$, якія паралельныя каардынатнай плоскасці xOy. Лініі перасячэння вызначаюцца сістэмай раўнанняў

$$\left.\begin{array}{l} x^2/p+y^2/q=2h, \\ z=h, \quad h>0, \end{array}\right\}$$

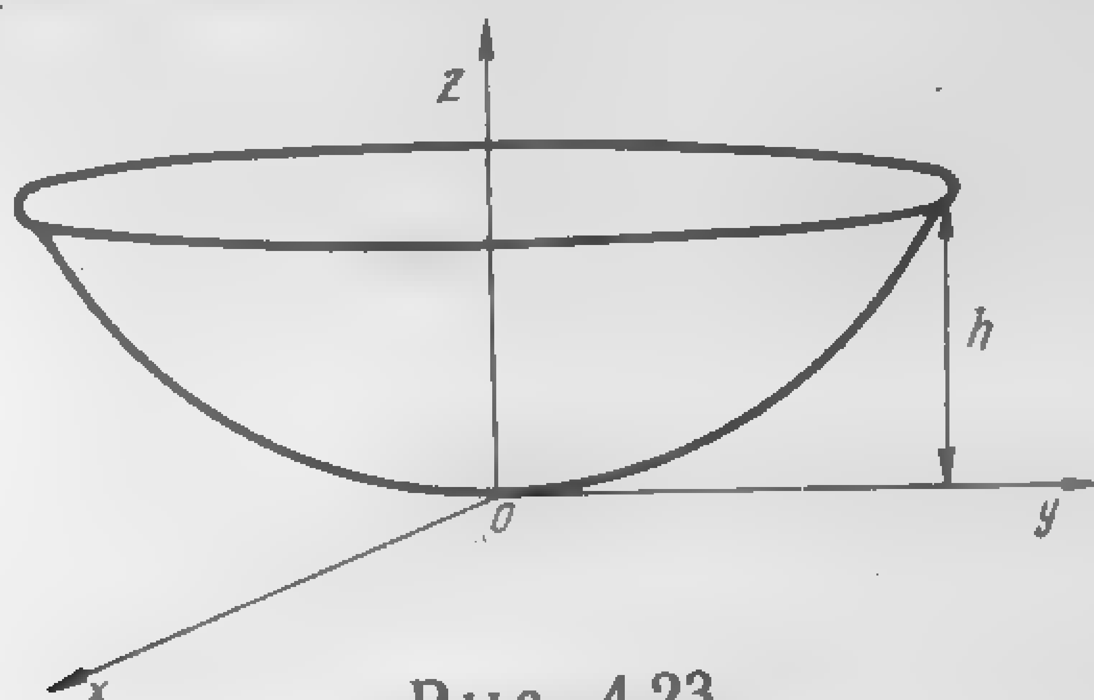
адкуль відаць, што гэтыя лініі з'яўляюцца эліпсамі з паўвосямі $a^*=\sqrt{2hp}$, $b^*=\sqrt{2hq}$. Зразумела, што калі $h=0$, то эліпс выраджаецца ў пункт O, а пры нарастанні h паўвосі a^*, b^* павялічваюцца, імкнучыся да бясконцасці. Апошняе паказвае, што эліптычны парабалоід ёсць неабмежаваная паверхня.

Сячэнні парабалоіда плоскасцямі xOz і yOz даюць лініі, якія вызначаюцца сістэмамі:

$$\left.\begin{aligned} x^2&=2pz, \\ y&=0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} y^2&=2qz, \\ x&=0. \end{aligned}\right\}$$

Відавочна, што кожная з гэтых ліній з'яўляецца парабалай адпаведна ў плоскасцях xOz і yOz.

Аб'ядноўваючы нашы разважанні, прыходзім да высновы, што эліптычны парабалоід ёсць паверхня, якая паказана на рыс. 4.23.



Рыс. 4.23

Пункт O называецца *вяршыняй*, а лікі p, q — *параметрамі эліптычнага парабалоіда.*

Азначэнне 4.8. *Гіпербалічным парабалоідам называецца мноства ўсіх пунктаў прасторы, каардынаты якіх праўдзяць раўнанне*

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad p,\ q>0. \tag{4.53}$$

Як і эліптычны парабалоід, гэтая паверхня з'яўляецца сіметрычнай у дачыненні да каардынатных плоскасцяў xOz, yOz і восі Oz.

Сячэнне парабалоіда (4.53) плоскасцямі $y=h$, $-\infty<h<+\infty$, паралельнымі плоскасці xOz, дае лініі, якія падаюцца сістэмай

$$\left.\begin{aligned} x^2/p&=2z+h^2/q, \\ y&=h. \end{aligned}\right\}$$

Відавочна, што гэтыя лініі ёсць парабалы, накіраваныя ўверх, з параметрам p. Пры $h=0$ атрымаем парабалу

$$\left.\begin{aligned} x^2&=2pz, \\ y&=0 \end{aligned}\right\} \tag{4.54}$$

у плоскасці xOz з вяршыняй у пункце O.

У выніку сячэння гіпербалічнага парабалоіда плоскасцямі $x=h$, $-\infty<h<+\infty$, паралельнымі плоскасці yOz, атрымаем лініі, якія вызначаюцца сістэмай

$$\left.\begin{array}{l} 2z=-y^2/q+h^2/p, \\ x=h. \end{array}\right\}$$

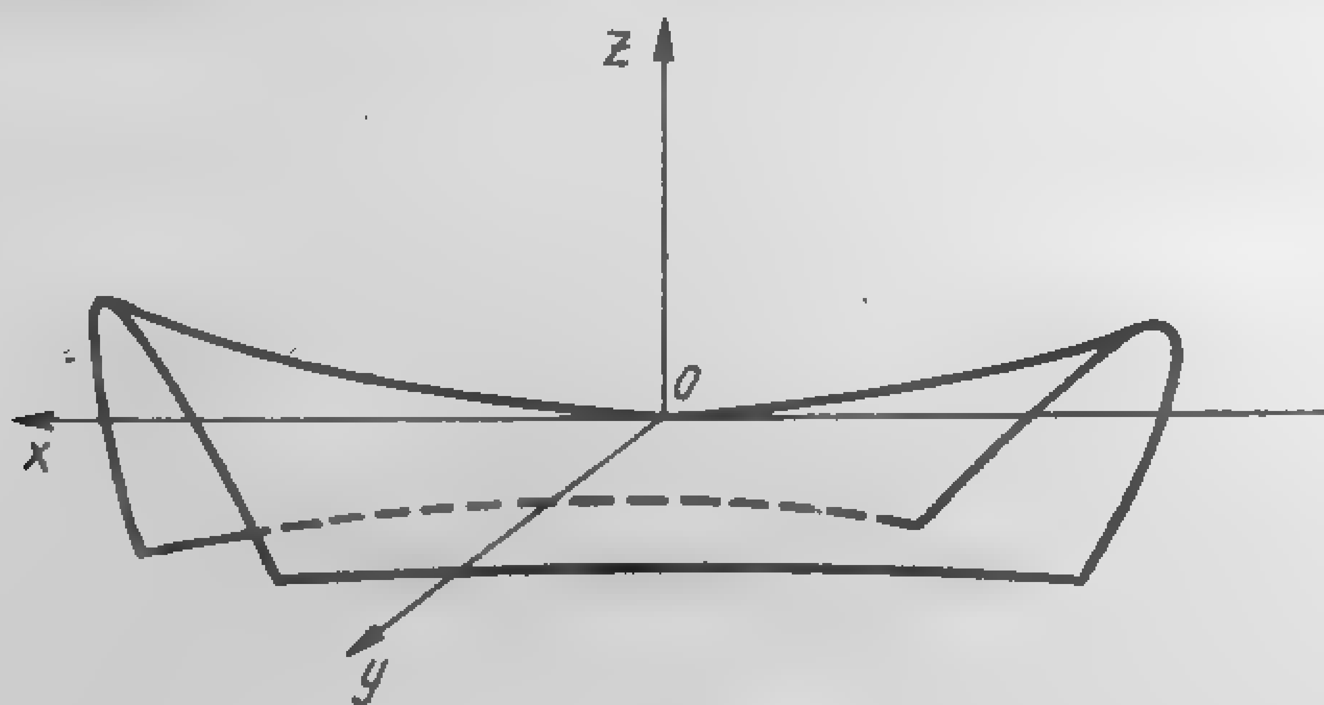
Кожная з гэтых ліній з'яўляецца парабалай, вяршыня якой належыць парабале (4.54), а сама яна накіраваная ўніз. Параметр кожнай парабалы роўны q.

Сячэнне паверхні (4.53) плоскасцямі $z=h$, $-\infty<$ $<h<+\infty$, паралельнымі плоскасці xOy, дае лініі:

$$\left.\begin{array}{l} x^2/p-y^2/q=2h, \\ z=h. \end{array}\right\} \tag{4.55}$$

Гэтыя лініі ёсць гіпербалы: пры $h>0$ гіпербала перасякае плоскасць xOz, пры $h=0$ — выраджаецца ў пару неперасякальных прамых, а пры $h<0$ гіпербала перасякае плоскасць yOz.

На падставе нашых даследаванняў прыходзім да высновы, што гіпербалічны парабалоід мае выгляд, паказаны на рыс. 4.24.



Рыс. 4.24

Як і аднапаласцевы гіпербалоід, паверхня (4.53) можа быць утворана пэўным мноствам прамых прасторы. Сапраўды, дзве прамыя паверхні вызначаюцца сістэмай (4.55) пры $h=0$. Астатнія прамалінейныя ўтваральныя L_λ, $\bar{L}_\mu$ гіпербалічнага парабалоіда падаюцца сістэмамі:

$$\left.\begin{array}{l} z=\lambda(x/\sqrt{p}+y/\sqrt{q}), \\ \lambda=x/\sqrt{p}-y/\sqrt{q}, \quad \lambda\neq 0, \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} z=\mu(x/\sqrt{p}-y/\sqrt{q}), \\ \mu=x/\sqrt{p}+y/\sqrt{q}, \quad \mu\neq 0. \end{array}\right\}$$

Разважаючы, як і пры доказе тэарэмы 4.11, можам сцвярджаць, што мае месца

Тэарэма 4.12. *Праз кожны пункт гіпербалічнага парабалоіда праходзяць дзве розныя прамыя L_λ і $\tilde{L}_\mu$, якія цалкам належаць гэтай паверхні.*

У наступным пункце параграфа мы працягнем пералік кананічных раўнанняў паверхняў другога парадку. Паверхні, якія падаюцца гэтымі раўнаннямі, проста азначыць як геаметрычнае месца пунктаў прасторы з пэўнымі абмежаваннямі. Грунтуючыся на азначэннях, атрымаем раўнанні паверхняў, у прыватнасці кананічныя раўнанні.

2°. Цыліндрычныя і канічныя паверхні. Вылучым неабходны клас паверхняў.

Азначэнне 4.9. *Паверхня называецца цыліндрычнай, калі яна ўтворана мноствам усіх прамых, якія паралельныя фіксаванаму кірунку* **a** *і маюць агульны пункт з фіксаванай лініяй L.*

Лінія L называецца *кіроўнай*, а прамыя, з якіх складаецца цыліндрычная паверхня,— *утваральнымі.*

Няхай кіроўная вызначаецца ў прасторы як лінія перасячэння дзвюх паверхняў

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0, \tag{4.56}$$

а вектар **a** мае каардынаты (l; m; s). Знойдзем раўнанне цыліндрычнай паверхні.

Параметрычныя раўнанні ўтваральнай маюць выгляд:

$$X=x+lt, \quad Y=y+mt, \quad Z=z+st, \quad -\infty<t<+\infty,$$

дзе (X; Y; Z), (x; y; z) ёсць каардынаты адвольных пунктаў утваральнай і кіроўнай ліній цыліндрычнай паверхні адпаведна.

Развязваючы гэтыя раўнанні ў дачыненні да x, y, z і падстаўляючы атрыманыя выразы ў стасункі (4.56), будзем мець роўнасці

$$\begin{aligned} &F_1(X-lt, \ Y-mt, \ Z-st)=0, \\ &F_2(X-lt, \ Y-mt, \ Z-st)=0. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Калі ўдаецца выдаліць параметр t, то замест роўнасцяў (4.57) атрымаем раўнанні цыліндрычнай паверхні ў дэкартавай сістэме каардынат $Oxyz$.

Разгледзім прыватны выпадак, калі

$$F_1(x, y, z)=x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2-1, \ F_2(x, y, z)=z, \quad \mathbf{a}=(0; 0; 1).$$

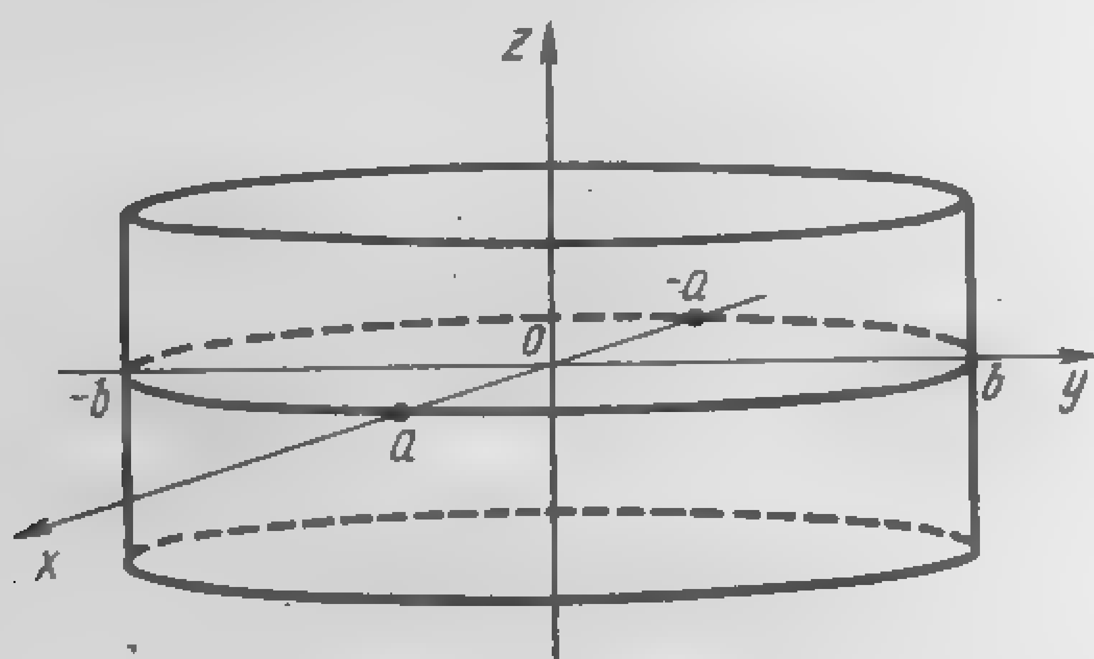
Аналізуючы гэтыя дадзеныя, можна заўважыць, што першае раўнанне (4.56) ёсць кананічнае раўнанне эліпсоіда (4.49), а другое раўнанне вызначае плоскасць xOy. Кіроўнай L з'яўляецца эліпс з паўвосямі a, b у плоскасці xOy. Далей, паколькі вектар **a** ёсць адзінкавы вектар восі Oz, то ўтваральнымі цыліндрычнай паверхні з'яўляюцца прамыя, паралельныя Oz. Роўнасці (4.57) у нашым выпадку будуць мець выгляд

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{(Z-st)^2}{c^2}=1, \quad Z-st=0,$$

адкуль вынікае раўнанне цыліндрычнай паверхні

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1. \qquad (4.58)$$

Яно называецца *кананічным раўнаннем эліптычнага цыліндра*, які паказаны на рыс. 4.25.



Рыс. 4.25

У раўнанні (4.58) яўна адсутнічае зменная z, а таму ўзнікае пытанне, ці заўсёды раўнанне, у якім адсутнічаюць адна альбо дзве зменныя, вызначае цыліндрычную паверхню.

Тэарэма 4.13. *Калі ў некаторай дэкартавай прамавугольнай сістэме каардынат паверхня вызначаецца раўнаннем, у якім адсутнічаюць адна або дзве зменныя, то паверхня ёсць цыліндрычная, прычым яе ўтваральныя паралельныя тым восям, каардынаты якіх адсутнічаюць у раўнанні.*

□ Няхай паверхня падаецца раўнаннем $F(x, y)=0$, у якім адсутнічае зменная z; адпаведна гэтым жа раўнаннем на плоскасці xOy вызначана кіроўная L. У гэтым выпадку для адвольнага пункта $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паверхні выконваецца роўнасць $F(x_0, y_0)=0$. Будзем разглядаць прамую, паралельную восі Oz, якая праходзіць праз

пункт M_0. Параметрычныя раўнанні прамой маюць выгляд:

$$x=x_0,\quad y=y_0,\quad z=z_0+t,\quad -\infty<t<+\infty,$$

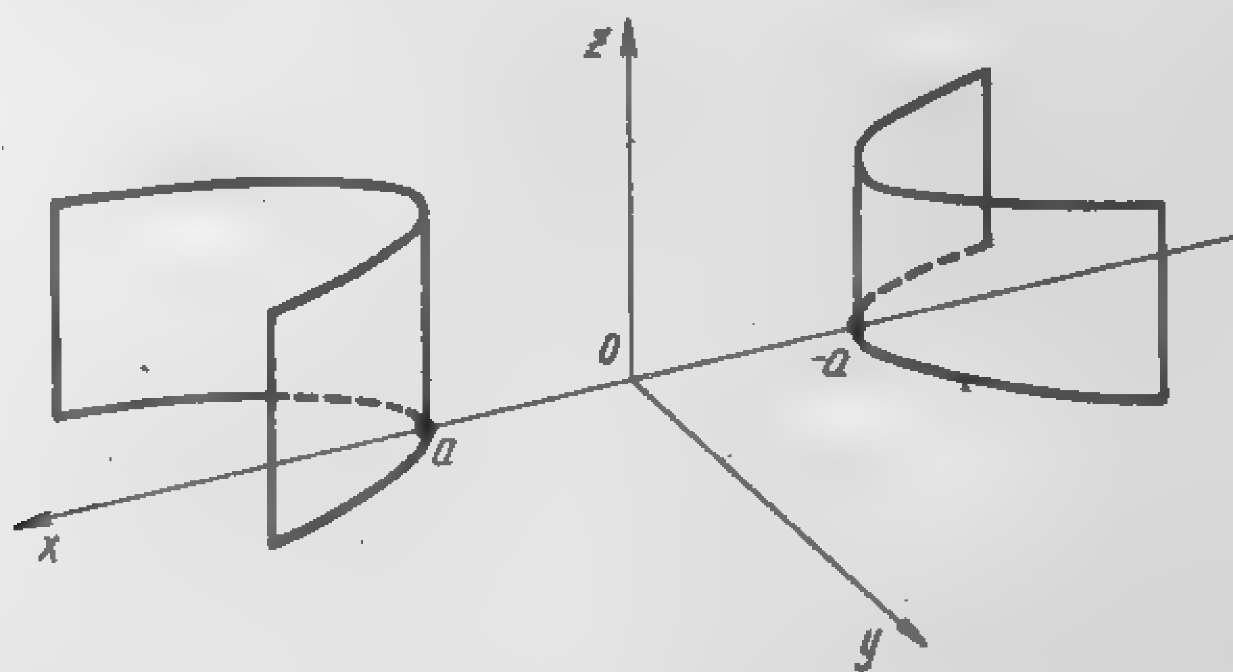
адкуль вынікае, што кожны пункт прамой, а значыць, цалкам прамая належыць паверхні. Паколькі M_0 ёсць адвольны пункт паверхні, то паверхня можа быць утворана мноствам усіх прамых, паралельных восі Oz, якія праходзяць праз пункты кіроўнай L. Апошняе азначае, што паверхня з'яўляецца цыліндрычнай і яе ўтваральныя паралельныя восі Oz. Аналагічна разглядаюцца іншыя выпадкі раўнання паверхні. ■

На падставе тэарэмы 4.13 можна сцвярджаць, што да цыліндрычных паверхняў другога парадку, акрамя эліптычнага цыліндра (4.58), належаць:

гіпербалічны цыліндр, які мае кананічнае раўнанне

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a,\ b>0, \tag{4.59}$$

і паказаны на рыс. 4.26;

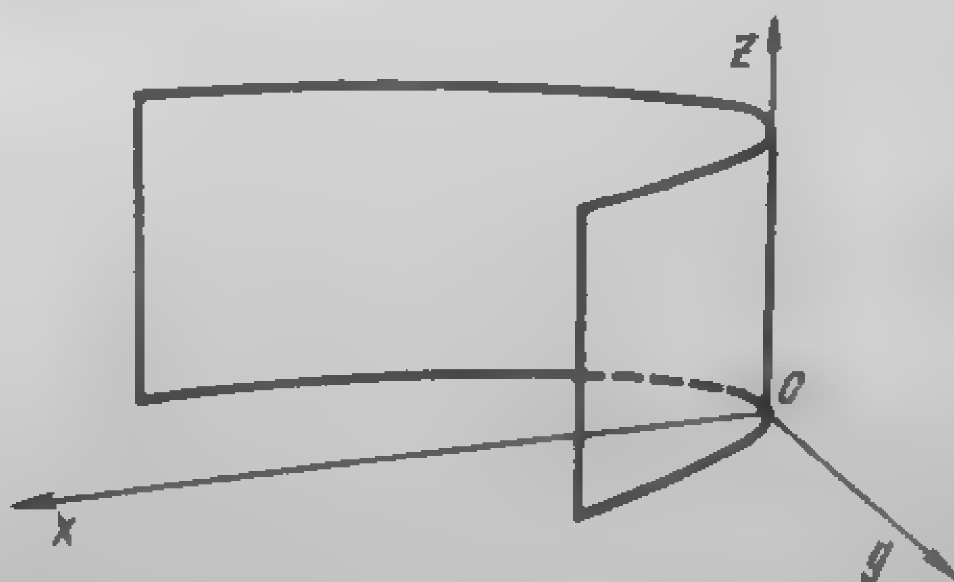


Рыс. 4.26

парабалічны цыліндр, які мае кананічнае раўнанне

$$y^2=2px,\quad p>0, \tag{4.60}$$

і паказаны на рыс. 4.27;



Рыс. 4.27

пара перасякальных плоскасцяў, якая мае кананічнае раўнанне

$$a^2x^2-b^2y^2=0, \quad a,\ b>0; \tag{4.61}$$

пара паралельных плоскасцяў, якая мае кананічнае раўнанне

$$x^2-a^2=0, \quad a\geqslant 0. \tag{4.62}$$

Азначэнне 4.10. *Паверхня называецца канічнай, калі яна ўтвораная мноствам усіх прамых, якія праходзяць праз фіксаваны пункт V і маюць агульны пункт з фіксаванай лініяй L.*

Пункт V называецца *вяршыняй*, ■ лінія L — *кіроўнай* канічнай паверхні. Прамыя, з якіх складаецца канічная паверхня, называюцца *ўтваральнымі*.

Калі мы маем каардынаты вяршыні $V(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і раўнанне кіроўнай L як лініі перасячэння паверхняў:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,\ y,\ z)=0,\\ F_2(x,\ y,\ z)=0,\end{aligned}\right\} \tag{4.63}$$

то можна знайсці раўнанне канічнай паверхні.

Сапраўды, параметрычныя раўнанні ўтваральнай можна запісаць у выглядзе:

$$X=x_0+t(x-x_0),\ Y=y_0+t(y-y_0),\ Z=z_0+t(z-z_0),$$
$$-\infty<t<+\infty,$$

дзе $(x;\ y;\ z)$ ёсць каардынаты адвольнага пункта кіроўнай L.

Развязваючы гэтыя раўнанні ў дачыненні да x, y, z і падстаўляючы іх выразы ў сістэму (4.63), атрымаем роўнасці:

$$\begin{aligned} F_1\left(\frac{X-x_0}{t}+x_0,\ \frac{Y-y_0}{t}+y_0,\ \frac{Z-z_0}{t}+z_0\right)=0,\\ F_2\left(\frac{X-x_0}{t}+x_0,\ \frac{Y-y_0}{t}+y_0,\ \frac{Z-z_0}{t}+z_0\right)=0.\end{aligned} \tag{4.64}$$

Калі ў роўнасцях (4.64) удаецца выдаліць параметр t, то замест (4.64) будзем мець раўнанне канічнай паверхні ў сістэме $Oxyz$.

Разгледзім прыватны выпадак, калі

$$F_1(x,\ y,\ z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1,\ \ F_2(x,\ y,\ z)=z-c,\ \ c>0,$$
$$V(0;\ 0;\ 0).$$

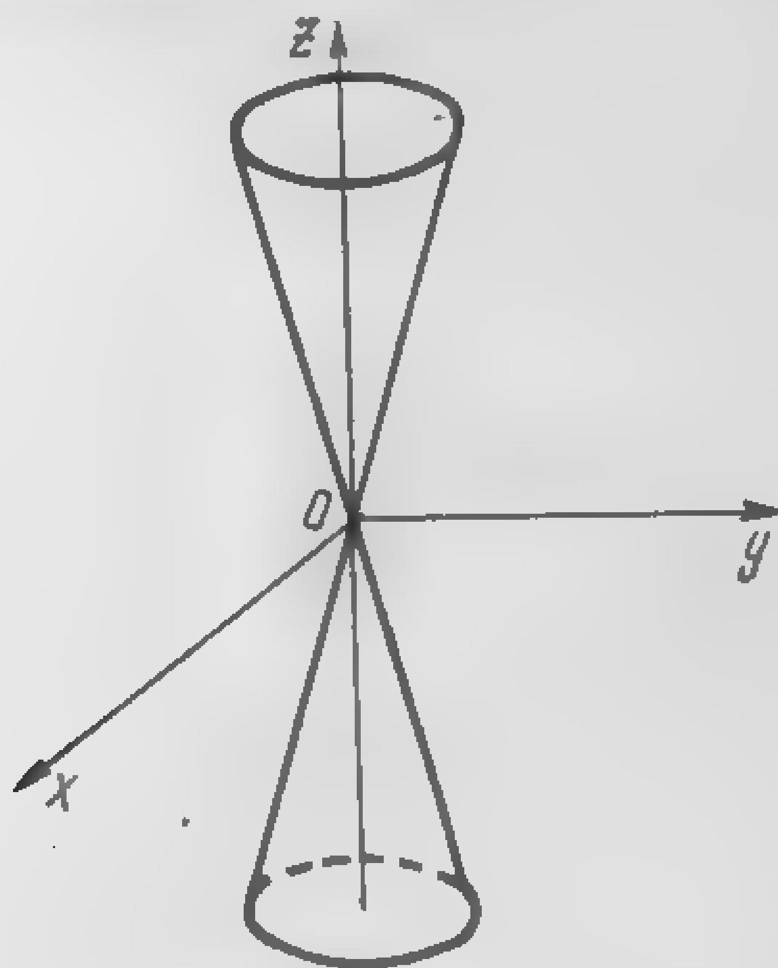
Кіроўная L ёсць эліпс, лінія перасячэння эліптычнага цыліндра (4.58) і плоскасці $z=c$, якая не супадае з xOy. Вяршыня V супадае з пачаткам сістэмы каардынат. Роўнасці (4.64) у гэтым выпадку маюць выгляд:

$$\frac{(X/t)^2}{a^2}+\frac{(Y/t)^2}{b^2}-1=0, \quad Z/t-c=0.$$

На падставе другой роўнасці $t=z/c$. Падстаўляючы гэты выраз у першую роўнасць, атрымаем раўнанне канічнай паверхні

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0, \quad a, b, c>0. \qquad (4.65)$$

Яно называецца *кананічным раўнаннем конуса другога парадку*, які паказаны на рыс. 4.28.



Рыс. 4.28

Конус (4.65) з'яўляецца сіметрычным у дачыненні да кожнай каардынатнай плоскасці, кожнай каардынатнай восі і пачатку каардынат. Вось Oz называецца *воссю конуса*. Калі $a=b$, то конус называецца *конусам авароту*.

Наступная тэарэма змяшчае фармулёўку дастатковай умовы, пры выкананні якой раўнанне $F(x, y, z)=0$ вызначае канічную паверхню. Дзеля гэтай фармулёўкі нам спатрэбіцца паняцце аднароднай функцыі.

Функцыя $f(x, y, z)$ называецца *аднароднай*, калі можна падабраць такую функцыю $\varphi(t)$, што для кожнага рэчаіснага t мае месца роўнасць

$$f(tx, ty, tz)=\varphi(t)f(x, y, z).$$

Тэарэма 4.14. *Калі ў некаторай дэкартавай прамавугольнай сістэме каардынат паверхня вызначаецца раўнан-*

нем $F(x, y, z)=0$, у якім левая частка ёсць аднародная функцыя, то паверхня з'яўляецца канічнай з вяршыняй у пачатку каардынат.

□ Няхай $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — некаторы фіксаваны пункт паверхні, які не супадае з пачаткам сістэмы каардынат. Праз пункты O і M_0 правядзем прамую. Параметрычныя раўнанні прамой OM_0 маюць выгляд:

$$x=tx_0, \quad y=ty_0, \quad z=tz_0, \quad -\infty<t<+\infty.$$

Паколькі $F(x, y, z)$ ёсць аднародная функцыя, то

$$F(tx_0, ty_0, tz_0)=\varphi(t)F(x_0, y_0, z_0)=0 \quad \forall t\in\mathbf{R}.$$

Гэта азначае, што прамая OM_0 цалкам належыць паверхні. Прымаючы пад увагу адвольнасць выбару пункта M_0, можна сцвярджаць, што ўся паверхня ўтворана пэўнымі прамымі, якія праходзяць праз пункт O. Сячэнне ўсіх такіх прамых плоскасцю, якая не праходзіць праз пачатак каардынат, вызначае кіроўную. Значыць, згодна з азначэннем, раўнанне $F(x, y, z)=0$ вызначае канічную паверхню з вяршыняй у пункце O. ■

Прыкладамі раўнанняў, якія задавальняюць умову тэарэмы 4.14, з'яўляюцца кананічныя раўнанні пары перасякальных плоскасцяў (4.61) і конуса другога парадку (4.65).

Кананічнае раўнанне

$$x^2+y^2+z^2=0 \tag{4.66}$$

таксама задавальняе ўмову тэарэмы 4.14, але гэтае раўнанне праўдзяць каардынаты толькі адзінага пункта O.

У наступным раздзеле падручніка мы пакажам, што кожнае раўнанне паверхні другога парадку шляхам пераўтварэння каардынат можна звесці да аднаго з пералічаных кананічных раўнанняў. Такім чынам, кожная паверхня другога парадку з'яўляецца адной з паверхняў, якія разглядаліся ў гэтым параграфе.

5. ЛІНЕЙНЫЯ ПРАСТОРЫ І ЛІНЕЙНЫЯ АПЕРАТАРЫ

У раздзелах «Матрыцы і сістэмы раўнанняў», «Вектарная алгебра» мы ўжо разглядалі мноствы, для якіх былі вызначаны аперацыі сумы двух элементаў і множання элемента на лік. Двум вектарам, згодна з правілам трохвугольніка, мы ставілі ў адпаведнасць вектар, які называўся сумай. Вектару **a** і ліку λ адпавядаў вектар, які называўся здабыткам **a** і λ. У мностве матрыц роўных памераў мы вызначалі аперацыі сумы дзвюх матрыц і множання матрыцы на лік. Сумай дзвюх матрыц называлася матрыца, элементы якой былі роўныя суме адпаведных элементаў матрыц-складнікаў. Здабыткам матрыцы і ліку называлася матрыца, элементы якой ёсць здабыткі элементаў зыходнай матрыцы і гэтага ліку. Хоць у кожным з гэтых мностваў аперацыі былі азначаны па-рознаму, але такія іх уласцівасці, як, напрыклад, камутатыўнасць і асацыятыўнасць сумы, дыстрыбутыўнасць множання элемента на лік (у дачыненні да сумы) супадалі. У сувязі з гэтым узнікае неабходнасць даследавання мностваў элементаў адвольнага паходжання, у якіх вызначаны аперацыі сумы двух элементаў і множання элемента на лік. Зразумела, што азначэнне гэтых аперацый можа быць розным, але ў кожным выпадку яны павінны падпарадкоўвацца пэўным уласцівасцям.

5.1. ЛІНЕЙНЫЯ ПРАСТОРЫ

1°. Паняцце лінейнай прасторы і падпрасторы. Пачнем з абмеркавання асноўнага паняцця.

Азначэнне 5.1. *Мноства* **L** *называецца лінейнай прасторай, а яго элементы вектарамі, калі для яго:*

1) *вызначана аперацыя складання, якая кожным двум элементам* **x**, **y** $\in$ **L** *ставіць у адпаведнасць элемент з* **L**, *што называецца сумай* **x** *і* **y** *і абазначаецца* **x**+**y**;

2) *вызначана аперацыя множання элемента на лік, якая кожным* **x** $\in$ **L** *і ліку* λ *ставіць у адпаведнасць*

элемент з $\mathbf{L}$, *што называецца здабыткам* $\mathbf{x}$ *і* λ *і абазначаецца* $\lambda\mathbf{x}$;

3) *для ўсіх* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{L}$ *і лікаў* λ, μ *выконваюцца наступныя аксіёмы:*

$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$;

$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$;

існуе нулявы элемент $\mathbf{0} \in \mathbf{L}$, *такі, што* $\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$;

існуе процілеглы элемент $(-\mathbf{x}) \in \mathbf{L}$, *такі, што* $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$;

$\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$;

$(\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}$;

$\lambda(\mu\mathbf{x})=(\lambda\mu)\mathbf{x}$.

Калі ў пункце 2 азначэння мы абмяжоўваемся рэчаіснымі лікамі, то $\mathbf{L}$ называецца *рэчаіснай лінейнай прасторай*, а калі вызначана множанне на ўсякі камплексны лік, то $\mathbf{L}$ называецца *камплекснай лінейнай прасторай.*

Пададзім некалькі прыкладаў лінейных прастораў.

1. Няхай $\mathbf{L}$ ёсць мноства ўсіх матрыц-радкоў з n рэчаісных лікаў $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$. Сумай двух радкоў з'яўляецца радок, элементы якога роўныя суме адпаведных элементаў-складнікаў. Здабытак радка і ліку ёсць радок, элементы якога роўныя элементам зыходнага радка, памножаным на лік. Нулявы вектар ёсць радок, у якога ўсе элементы роўныя 0. Такая лінейная прастора называецца *арыфметычнай прасторай* і абазначаецца $\mathbf{R}^n$.

2. Лічым $\mathbf{L}$ мноствам усіх мнагаскладаў адной зменнай ступені не вышэй зададзенага натуральнага n. Сумай двух мнагаскладаў з'яўляецца мнагасклад ступені не вышэй n. Множанне мнагасклада на лік дае мнагасклад з $\mathbf{L}$. Нулявы вектар ёсць мнагасклад з каэфіцыентамі, роўнымі нулю.

3. Мноства ўсіх камплексных лікаў у дачыненні да звычайных аперацый складання і множання лікаў ёсць *камплексная лінейная прастора C.*

4. Калі $\mathbf{L}$ ёсць аднаэлементавае мноства, то яго адзіны элемент з'яўляецца і нулявым вектарам, і процілеглым сам сабе. Аперацыі азначаюцца роўнасцямі $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$. Такая прастора называецца *нулявой* і абазначаецца $\{\mathbf{0}\}$.

З аксіём лінейнай прасторы вынікаюць наступныя ўласцівасці.

1. *Лінейная прастора мае толькі адзін нулявы вектар, і для кожнага вектара* $\mathbf{x}$ *існуе адзіны процілеглы.*

□ Сапраўды, калі ў $\mathbf{L}$ ёсць два нулявыя вектары $\mathbf{0}_1$ і $\mathbf{0}_2$, якія задавальняюць аксіёму 3, то $\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2$. Аналагічна калі нейкі вектар $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ мае два процілеглыя вектары $-\mathbf{x}_1$, $-\mathbf{x}_2$, то $(-\mathbf{x}_1)+\mathbf{x}+(-\mathbf{x}_2)=-\mathbf{x}_1=-\mathbf{x}_2$. ■

2. *Для кожнага вектара* $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ *мае месца роўнасць* $0 \cdot \mathbf{x}=\mathbf{0}$.

□ Сапраўды, $0\cdot\mathbf{x}=0\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}-\mathbf{x}=(1+0)\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$. ■

Азначэнне 5.2. *Падмноства $\mathbf{L}_*$ прасторы $\mathbf{L}$ называецца лінейнай падпрасторай $\mathbf{L}$, калі: 1) сума кожных двух вектараў з $\mathbf{L}_*$ належыць $\mathbf{L}_*$; 2) здабытак вектара з $\mathbf{L}_*$ і адвольнага ліку таксама належыць $\mathbf{L}_*$.*

Адзначым, што нулявы вектар, як здабытак $0\cdot\mathbf{x}$, дзе $\mathbf{x}\in\mathbf{L}_*$, $0\in\mathbf{R}$, належыць $\mathbf{L}_*$; для кожнага вектара $\mathbf{x}\in\mathbf{L}_*$ процілеглы вектар $-\mathbf{x}$, які роўны $(-1)\mathbf{x}$, таксама належыць $\mathbf{L}_*$. Усе аксіёмы лінейнай прасторы маюць месца і для падпрасторы $\mathbf{L}_*$. Такім чынам, кожная лінейная падпрастора прасторы $\mathbf{L}$ сама з'яўляецца лінейнай прасторай.

Разгледзім некалькі прыкладаў.

1. Лінейная прастора $\mathbf{L}$ з'яўляецца сваёй падпрасторай.

2. Нулявая прастора $\mathbf{L}=\{\mathbf{0}\}$ з'яўляецца падпрасторай кожнай лінейнай прасторы.

3. Мноства ўсіх вектараў плоскасці $\mathbf{R}^2$ ёсць падпрастора геаметрычнай прасторы $\mathbf{R}^3$.

Няхай

$$\mathbf{L}_1,\ \mathbf{L}_2,\ \ldots,\ \mathbf{L}_m,\quad m\geqslant 2, \tag{5.1}$$

ёсць лінейныя падпрасторы адной і той жа прасторы $\mathbf{L}$. *Сумай падпрасторaў (5.1)* будзем называць мноства ўсіх вектараў $\mathbf{x}$, якія можна падаць у выглядзе

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{x}_m,\quad \mathbf{x}_j\in\mathbf{L}_j,\quad j=\overline{1,\ m}.$$

Абазначаецца гэтая сума

$$\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2+\ldots+\mathbf{L}_m \quad \text{або} \quad \sum_{j=1}^{m}\mathbf{L}_j.$$

Перасячэннем падпрасторaў (5.1) будзем называць мноства ўсіх вектараў, якія належаць кожнай падпрасторы $\mathbf{L}_j$, $j=\overline{1,\ m}$, і абазначаць яго $\bigcap_{j=1}^{m}\mathbf{L}_j$. Калі $m=2$, то будзем пісаць $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2$.

З гэтымі азначэннямі звязана

Тэарэма 5.1. *Сума і перасячэнне падпрасторaў прасторы $\mathbf{L}$ ёсць яе лінейныя падпрасторы.*

□ Абазначым $\mathbf{S}=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{L}_j$, $\mathbf{P}=\bigcap_{j=1}^{m}\mathbf{L}_j$. Для ўсякіх вектараў $\mathbf{a},\ \mathbf{b}\in\mathbf{S}$, $\mathbf{c},\ \mathbf{d}\in\mathbf{P}$ пакажам, што лінейныя камбінацыі

$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$, $\lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d}$ з адвольнымі каэфіцыентамі $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ належаць адпаведна $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$.

Сапраўды,

$$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=\alpha\left(\sum_{j=1}^{m}\mathbf{a}_j\right)+\beta\left(\sum_{j=1}^{m}\mathbf{b}_j\right)=\sum_{j=1}^{m}(\alpha\mathbf{a}_j+\beta\mathbf{b}_j),$$

дзе $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j\in\mathbf{L}_j$, $j=\overline{1,\ m}$. Паколькі $\mathbf{L}_j$ ёсць падпрасторы, то $\alpha\mathbf{a}_j+\beta\mathbf{b}_j\in\mathbf{L}_j$. З гэтай нагоды $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}\in\mathbf{S}$ і $\mathbf{S}$ з'яўляецца падпрасторай прасторы $\mathbf{L}$.

З таго, што $\mathbf{c}, \mathbf{d}\in\mathbf{P}$, вынікае прыналежнасць вектараў $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ да кожнай падпрасторы $\mathbf{L}_j$. Гэта азначае, што $\lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d}$ належыць кожнай $\mathbf{L}_j$, а значыць, і перасячэнню $\mathbf{P}$, якое з'яўляецца падпрасторай прасторы $\mathbf{L}$. ■

Суму падпрастораў (5.1) будзем называць *прамой*, калі ў сукупнасці (5.1) няма нулявых падпрастораў і калі перасячэнне кожнай $\mathbf{L}_j$ з сумай астатніх падпрастораў з (5.1) з'яўляецца нулявой падпрасторай. Абазначаецца прамая сума $\mathbf{L}_1\oplus\mathbf{L}_2\oplus\ldots\oplus\mathbf{L}_m$.

Для прамой сумы $\mathbf{S}=\mathbf{L}_1\oplus\mathbf{L}_2\oplus\ldots\oplus\mathbf{L}_m$ справядлівая

Тэарэма 5.2. *Кожны вектар* $\mathbf{x}\in\mathbf{S}$ *можна адзіным чынам падаць у выглядзе* $\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{x}_j$, *дзе* $\mathbf{x}_j\in\mathbf{L}_j$; $j=\overline{1,\ m}$.

□ Дакажам тэарэму метадам ад процілеглага. Няхай існуюць два розныя выразы для $\mathbf{x}$: $\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{x}'_j$, дзе $\mathbf{x}_j, \mathbf{x}'_j\in\mathbf{L}_j$. У гэтым выпадку знойдзецца такі індэкс $k\in\{\overline{1,\ m}\}$, што $\mathbf{x}_k-\mathbf{x}'_k\neq 0$ і $\mathbf{x}_k-\mathbf{x}'_k=\sum_{j=1,\, j\neq k}^{m}(\mathbf{x}_j-\mathbf{x}'_j)$. Адсюль вынікае $\mathbf{L}_k\cap\sum_{j=1,\, j\neq k}^{m}\mathbf{L}_j\neq\{0\}$, але гэта супярэчыць таму, што $\mathbf{S}$ — прамая сума. Значыць, $\mathbf{x}$ не можа мець два розныя выразы. ■

2°. Базіс і памернасць. Няхай $\mathbf{L}$ ёсць лінейная прастора і

$$\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3,\ \ldots,\ \mathbf{a}_m \tag{5.2}$$

ёсць сістэма вектараў з $\mathbf{L}$. Сістэму (5.2) будзем называць *лінейна залежнай*, калі існуюць такія лікі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, няроўныя разам нулю, што

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_m\mathbf{a}_m=0. \tag{5.3}$$

Калі роўнасць (5.3) выконваецца толькі пры $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0$, то сістэма вектараў (5.2) называецца *лінейна незалежнай.*

Зразумела, што гэтыя азначэнні паўтараюць азначэнні лінейна залежных (незалежных) сістэм вектараў геаметрычнай прасторы $\mathbf{R}^3$, якая разглядалася ў раздзеле «Вектарная алгебра». Таму нагадаем некаторыя *уласцівасці лінейнай залежнасці.*

1. *Сістэма вектараў, якой належыць нулявы вектар, з'яўляецца лінейна залежнай.*

2. *Калі частка сістэмы вектараў лінейна залежная, то лінейна залежнай будзе і ўся сістэма.*

Апошнюю ўласцівасць можна сфармуляваць наступным чынам: *кожная частка лінейна незалежнай сістэмы з'яўляецца лінейна незалежнай.*

Праўда, у адрозненне ад прасторы $\mathbf{R}^3$ у выпадку абстрактнай лінейнай прасторы можна весці размову пра лінейную залежнасць і незалежнасць бясконцай сістэмы вектараў.

Бясконцую сістэму вектараў будзем называць *лінейна незалежнай*, калі лінейна незалежнай будзе кожная яе канечная частка, і *лінейна залежнай*, калі ў яе знойдзецца канечная лінейна залежная частка.

Няхай цяпер $\mathbf{L}$ ёсць абстрактная лінейная прастора, якая не супадае з нулявой. Тады прасторы належыць хоць адзін ненулявы вектар і, значыць, існуе лінейна незалежная сістэма вектараў. Тут магчымы два выпадкі: існуе або бясконцая лінейна незалежная сістэма, або лінейна незалежная сістэма з максімальнай канечнай колькасцю вектараў. У першым выпадку прастору $\mathbf{L}$ будзем называць *бясконцамернай*, а ў другім — *канцамернай.* Далей наша ўвага будзе звернута ў асноўным да канцамерных лінейных прастораў.

Няхай вектары

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n \tag{5.4}$$

утвараюць лінейна незалежную сістэму прасторы $\mathbf{L}$ з максімальнай колькасцю вектараў. Тады для кожнага вектара $\mathbf{x}\in\mathbf{L}$ сістэма $\mathbf{x}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ будзе лінейна залежнай, г. зн.

$$\alpha\mathbf{x}+\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{e}_n=0,$$

дзе хоць адзін з каэфіцыентаў α, α_1, α_2, ..., α_n няроўны

нулю. Паколькі (5.4) ёсць лінейна незалежная сістэма, то $\alpha\neq 0$, а таму

$$\mathbf{x}=-\frac{\alpha_1}{\alpha}\mathbf{e}_1-\frac{\alpha_2}{\alpha}\mathbf{e}_2-\ldots-\frac{\alpha_n}{\alpha}\mathbf{e}_n=\alpha_1'\mathbf{e}_1+\alpha_2'\mathbf{e}_2+\ldots+\alpha_n'\mathbf{e}_n.$$

Прымаючы пад увагу, што $\mathbf{x}$ ёсць адвольны вектар, а вектары $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ — фіксаваныя, прыходзім да высновы, што канцамерная прастора $\mathbf{L}$ ёсць мноства ўсіх вектараў, якія магчыма запісаць у выглядзе лінейнай камбінацыі вектараў упарадкаванай сістэмы (5.4). Такое мноства вектараў называецца *лінейнай абалонкай сістэмы (5.4)* і абазначаецца $\mathbf{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Азначэнне 5.3. *Базісам прасторы* $\mathbf{L}$ *называецца кожная ўпарадкаваная лінейна незалежная сістэма вектараў з* $\mathbf{L}$, *лінейная абалонка якой супадае з* $\mathbf{L}$.

Пакажам, што мае месца

Тэарэма 5.3. *Два розныя базісы* $\mathbf{B}_1=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\mathbf{B}_2=\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_m'\}$ *адной і той жа прасторы* $\mathbf{L}$ *маюць роўную колькасць вектараў, г. зн.* $m=n$.

□ Паколькі $\mathbf{B}_2$ ёсць базіс, то

$$\mathbf{e}_n=\alpha_1'\mathbf{e}_1'+\alpha_2'\mathbf{e}_2'+\ldots+\alpha_m'\mathbf{e}_m'.$$

З прычыны таго, што $\mathbf{e}_n\neq 0$, некаторы каэфіцыент $\alpha_k'\neq 0$ і

$$\mathbf{e}_k'=\frac{1}{\alpha_k'}\mathbf{e}_n-\frac{\alpha_1'}{\alpha_k'}\mathbf{e}_1'-\ldots-\frac{\alpha_{k-1}'}{\alpha_k'}\mathbf{e}_{k-1}-\frac{\alpha_{k+1}'}{\alpha_k'}\mathbf{e}_{k+1}+\ldots+\frac{\alpha_m'}{\alpha_k'}\mathbf{e}_m'.$$

У выніку гэтай роўнасці атрымаем, што сістэма $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_{k-1}', \mathbf{e}_{k+1}', \ldots, \mathbf{e}_m'$ з'яўляецца базісам прасторы $\mathbf{L}$. Далучым да гэтага базіса вектар $\mathbf{e}_{n-1}\neq 0$, будзем мець

$$\mathbf{e}_{n-1}=\beta_n\mathbf{e}_n+\beta_1'\mathbf{e}_1'+\ldots+\beta_{k-1}'\mathbf{e}_{k-1}'+\beta_{k+1}'\mathbf{e}_{k+1}'+\ldots+\beta_m'\mathbf{e}_m'.$$

У гэтай роўнасці ёсць ненулявы каэфіцыент, напрыклад, $\beta_s'\neq 0$, бо інакш вектары $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_{n-1}$ з'яўляліся б лінейна залежнымі:

$$\mathbf{e}_s'=\frac{1}{\beta_s'}\mathbf{e}_{n-1}-\frac{\beta_n'}{\beta_s'}\mathbf{e}_n-\frac{\beta_1'}{\beta_s'}\mathbf{e}_1'-\ldots-\frac{\beta_{k-1}'}{\beta_s'}\mathbf{e}_{k-1}-$$
$$-\frac{\beta_{k+1}'}{\beta_s'}\mathbf{e}_{k+1}'-\ldots-\frac{\beta_m'}{\beta_s'}\mathbf{e}_m'.$$

Адсюль вынікае, што сістэма $\mathbf{e}_{n-1}$, $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_1'$, ..., $\mathbf{e}_{k-1}'$, $\mathbf{e}_{k+1}'$, ..., $\mathbf{e}_{s-1}'$, $\mathbf{e}_{s+1}'$, ..., $\mathbf{e}_m'$ ёсць таксама базіс прасторы $\mathbf{L}$.

Калі паўтарыць гэты працэс, то можна заўважыць, што вектары $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, ..., $\mathbf{e}_m'$ не могуць быць выключаны

з новаўтвораных базісаў раней, чым да іх далучацца вектары $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Адсюль вынікае няроўнасць $n \leqslant m$. Падобнымі меркаваннямі можна паказаць, што $m \leqslant n$. Таму ў выніку атрымаем $m = n$. ■

Тэарэма 5.3 паказвае, што колькасць вектараў базіса з'яўляецца характарыстыкай канцамернай прасторы $\mathbf{L}$, якая называецца *памернасцю прасторы* і абазначаецца $\dim \mathbf{L}$. Калі $\dim \mathbf{L} = n$, то прастора $\mathbf{L}$ называецца *n-мернай* і ў такім выпадку будзем абазначаць яе $\mathbf{L}^n$.

Адзначым, што нулявая прастора, згодна з азначэннем базіса, не мае базіса, і яе будзем лічыць *нульмернай*.

З дапамогай базіса прасторы можна пабудаваць эфектыўны апарат, які аперацыі з вектарамі зводзіць да аперацый з лікамі.

Кожны вектар $\mathbf{x} \in \mathbf{L}^n$ можа быць пададзены ў выглядзе лінейнай камбінацыі

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n. \qquad (5.5)$$

Лікі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называюцца *каардынатамі* $\mathbf{x}$ у дачыненні да базіса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Няцяжка паказаць, што каардынаты вектара $\mathbf{x}$ вызначаюцца адзіным чынам. Зробім гэта. Няхай, акрамя запісу (5.5), для вектара $\mathbf{x}$ існуе другая лінейная камбінацыя

$$\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \beta_n \mathbf{e}_n.$$

Адымем ад роўнасці (5.5) адпаведныя часткі апошняй роўнасці, атрымаем

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Адсюль, прымаючы пад увагу лінейную незалежнасць вектараў базіса, будзем мець $\alpha_j = \beta_j$, $j = \overline{1, n}$.

Такім чынам, пры фіксаваным базісе кожны вектар вызначаецца сваімі каардынатамі. Той факт, што вектар $\mathbf{x} \in \mathbf{L}^n$ зададзены сваімі каардынатамі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, будзем запісваць у выглядзе $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Калі мы маем два вектары $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\mathbf{y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, то

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \beta_n \mathbf{e}_n,$$

а таму

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{e}_n$$

або

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n+b_n).$$

Далей, для кожнага ліку λ маем

$$\lambda\mathbf{x}=\lambda\alpha_1\mathbf{e}_1+\lambda\alpha_2\mathbf{e}_2+\ldots+\lambda\alpha_n\mathbf{e}_n$$

ці

$$\lambda\mathbf{x}=(\lambda\alpha_1,\ \lambda\alpha_2,\ \ldots,\ \lambda\alpha_n).$$

З гэтага аналізу вынікае, што пры вызначэнні сумы вектараў **x** і **y** іх адпаведныя каардынаты складваюцца, а пры множанні вектара на лік кожная каардыната вектара множыцца на гэты лік.

Няхай $\mathbf{L}^s$ ёсць s-мерная падпрастора прасторы $\mathbf{L}^n$. Зразумела, што, як і ў самой прасторы, у кожнай падпрасторы можна зафіксаваць некаторы базіс. Сувязь паміж базісамі падпрасторы $\mathbf{L}^s$ і прасторы $\mathbf{L}^n$ паказвае наступная

Тэарэма 5.4. *Базіс* $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_s\}$ *падпрасторы* $\mathbf{L}^s$ *заўсёды можна дапоўніць вектарамі* $\mathbf{e}_{s+1},\ \mathbf{e}_{s+2},\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$ *з* $\mathbf{L}^n$, *каб сістэма* $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_s,\ \mathbf{e}_{s+1},\ \mathbf{e}_{s+2},\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$ *стала базісам прасторы* $\mathbf{L}^n$.

□ Будзем разглядаць такія лінейна незалежныя сістэмы вектараў з $\mathbf{L}^n$, якім належаць вектары $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_s$. Відавочна, што сярод гэтых сістэм ёсць сістэма $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_s,\ \mathbf{e}_{s+1},\ \mathbf{e}_{s+2},\ \ldots,\ \mathbf{e}_p$, якая мае максімальную колькасць вектараў. Для кожнага вектара $\mathbf{x}\in\mathbf{L}^n$ сістэма $\mathbf{x},\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_s,\ \mathbf{e}_{s+1},\ \mathbf{e}_{s+2},\ \ldots,\ \mathbf{e}_p$ ёсць лінейна залежная, таму вектар **x** роўны лінейнай камбінацыі вектараў $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_s,\ \mathbf{e}_{s+1},\ \mathbf{e}_{s+2},\ \ldots,\ \mathbf{e}_p$. Апошняе з прычыны адвольнасці вектара **x** азначае, што $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_s,\ \mathbf{e}_{s+1},\ \mathbf{e}_{s+2},\ \ldots,\ \mathbf{e}_p$ ёсць базіс $\mathbf{L}^n$, і таму $p=n$. ■

Скарыстоўваючы гэтую тэарэму, дакажам, што праўдзіцца

Тэарэма 5.5. *Для кожных двух падпрастораў* $\mathbf{L}_1$ *і* $\mathbf{L}_2$ *лінейнай прасторы* $\mathbf{L}$ *выконваецца роўнасць*

$$\dim(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2)=\dim\mathbf{L}_1+\dim\mathbf{L}_2-\dim(\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2).$$

□ Пазначым намернасці падпрастораў $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ адпаведна праз m, r_1, r_2. У падпрасторы $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2$ вызначым базіс $\{\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \ldots,\ \mathbf{c}_m\}$. Паколькі $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2$ ёсць падпрастора $\mathbf{L}_1$ і $\mathbf{L}_2$, то, згодна з тэарэмай 5.4, у $\mathbf{L}_1$ і $\mathbf{L}_2$ знойдуцца адпаведна вектары $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k$, $k=r_1-m$, $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_s$, $s=r_2-m$, такія, што сістэма вектараў $\{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k,\ \mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \ldots,\ \mathbf{c}_m\}$ ёсць базіс падпрасторы $\mathbf{L}_1$, а $\{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_s,\ \mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \ldots,\ \mathbf{c}_m\}$ — базіс $\mathbf{L}_2$.

Пакажам, што сістэма

$$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s\} \qquad (5.6)$$

з'яўляецца базісам падпрасторы $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2$. Відавочна, што кожны вектар падпрастораў $\mathbf{L}_1$ і $\mathbf{L}_2$ ёсць лінейная камбінацыя вектараў (5.6), таму кожны вектар з $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2$ таксама ёсць лінейная камбінацыя вектараў сістэмы (5.6). Застаецца паказаць, што сістэма (5.6) з'яўляецца лінейна незалежнай.

Няхай

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{a}_k+\gamma_1\mathbf{c}_1+\gamma_2\mathbf{c}_2+\ldots+\gamma_m\mathbf{c}_m+ \\ +\beta_1\mathbf{b}_1+\beta_2\mathbf{b}_2+\ldots+\beta_s\mathbf{b}_s=\mathbf{0}. \qquad (5.7)$$

Абазначым

$$\mathbf{b}=\beta_1\mathbf{b}_1+\beta_2\mathbf{b}_2+\ldots+\beta_s\mathbf{b}_s. \qquad (5.8)$$

Зразумела, што $\mathbf{b}\in\mathbf{L}_2$, але з роўнасці (5.7) атрымаем $\mathbf{b}\in\mathbf{L}_1$. У такім выпадку $\mathbf{b}\in\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2$, і значыць,

$$\mathbf{b}=\nu_1\mathbf{c}_1+\nu_2\mathbf{c}_2+\ldots+\nu_m\mathbf{c}_m,$$

дзе $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ — некаторыя лікі. Параўноўваючы гэтую роўнасць з роўнасцю (5.8), атрымаем

$$\beta_1\mathbf{b}_1+\beta_2\mathbf{b}_2+\ldots+\beta_s\mathbf{b}_s+(-\nu_1)\mathbf{c}_1+(-\nu_2)\mathbf{c}_2+\ldots+ \\ +(-\nu_m)\mathbf{c}_m=\mathbf{0}.$$

Паколькі сістэма вектараў $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m\}$ з'яўляецца базісам $\mathbf{L}_2$, то $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_s=\nu_1=\nu_2=\ldots=\nu_m=0$. З улікам гэтага роўнасць (5.7) набудзе выгляд

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{a}_k+\gamma_1\mathbf{c}_1+\gamma_2\mathbf{c}_2+\ldots+\gamma_m\mathbf{c}_m=\mathbf{0}.$$

Прымаючы пад увагу, што сістэма $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$ ёсць базіс $\mathbf{L}_1$, будзем мець $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_m=0$. Значыць, роўнасць (5.7) выконваецца толькі ў тым выпадку, калі ўсе каэфіцыенты левай часткі роўныя нулю. ■

Вынік. *Калі* $\mathbf{L}=\mathbf{L}_1\oplus\mathbf{L}_2$, *то* $\dim\mathbf{L}=\dim\mathbf{L}_1+\dim\mathbf{L}_2$.

3°. Сувязь паміж базісамі, пераўтварэнні каардынат. Няхай $\mathbf{B}_1=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ і $\mathbf{B}_2=\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ ёсць два розныя базісы прасторы $\mathbf{L}^n$. Вектары з $\mathbf{B}_2$ адзіным чынам вызначаюцца роўнасцямі:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e}'_1=p_{11}\mathbf{e}_1+p_{21}\mathbf{e}_2+\ldots+p_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}'_2=p_{12}\mathbf{e}_1+p_{22}\mathbf{e}_2+\ldots+p_{n2}\mathbf{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}'_n=p_{1n}\mathbf{e}_1+p_{2n}\mathbf{e}_2+\ldots+p_{nn}\mathbf{e}_n \end{array}\right\} \qquad (5.9)$$

у дачыненні да базіса $\mathbf{B}_1$. Каэфіцыенты p_{ij} утвараюць матрыцу

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

якая называецца *матрыцай пераходу ад базіса* $\mathbf{B}_1$ *да базіса* $\mathbf{B}_2$. Паколькі слупкі матрыцы P ёсць каардынаты вектараў базіса $\mathbf{B}_2$, то з улікам іх лінейнай незалежнасці можна сцвярджаць, што матрыца P — незвыродная. Апошняе азначае існаванне адваротнай да P матрыцы P^{-1}. Матрыцы P і P^{-1} вызначаюць сувязь паміж двума базісамі $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_2$ адной і той жа лінейнай прасторы.

Возьмем адвольны вектар $\mathbf{x}\in\mathbf{L}^n$ і разгледзім яго лінейныя камбінацыі ў дачыненні да базісаў $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_2$:

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^{n} x'_i\mathbf{e}'_i.$$

Згодна з сістэмай (5.9), будзем мець

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^{n} x'_i\mathbf{e}'_i=\sum_{i=1}^{n} x'_i\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ji}\mathbf{e}_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x'_j p_{ij}\right)\mathbf{e}_i.$$

Калі прыраўняць адпаведныя каэфіцыенты, якія стаяць перад вектарам $\mathbf{e}_i$, то атрымаем

$$x_i=\sum_{i=1}^{n} p_{ij}x'_j,\ i=\overline{1,\ n}. \qquad (5.10)$$

Гэтыя формулы называюцца *формуламі пераўтварэння каардынат пры пераходзе ад базіса* $\mathbf{B}_1$ *да базіса* $\mathbf{B}_2$.

Абазначым праз $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ матрыцы-слупкі памераў $n\times\times 1$ з каардынат вектара $\mathbf{x}$ у базісах $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_2$ адпаведна. Тады формулы (5.10) будуць мець выгляд

$$\mathbf{x}=P\mathbf{x}'. \qquad (5.11)$$

Памножым гэтую матрычную роўнасць на P^{-1} злева і атрымаем роўнасць

$$\mathbf{x}'=P^{-1}\mathbf{x},$$

якая вызначае *формулы пераўтварэння каардынат, адваротныя дачыненням (5.10)*.

Няхай цяпер у лінейнай прасторы $\mathbf{L}^n$ зададзены тры базісы $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ і $\mathbf{B}_3=\{\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', ..., \mathbf{e}_n''\}$. Пераход ад базіса $\mathbf{B}_1$ да $\mathbf{B}_3$ можна здзейсніць двума шляхамі: або непасрэдна ад $\mathbf{B}_1$ да $\mathbf{B}_3$, або спачатку ад $\mathbf{B}_1$ да $\mathbf{B}_2$, а пасля ад $\mathbf{B}_2$ да $\mathbf{B}_3$. Згодна з роўнасцю (5.11), маюць месца стасункі: $\mathbf{x}=P\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'=R\mathbf{x}''$, $\mathbf{x}=S\mathbf{x}''$, дзе R ёсць матрыца пераходу ад $\mathbf{B}_2$ да $\mathbf{B}_3$; S — матрыца пераходу ад $\mathbf{B}_1$ да $\mathbf{B}_3$; $\mathbf{x}''$ — матрыца-слупок з каардынат вектара $\mathbf{x}$ у базісе $\mathbf{B}_3$. З першых дзвюх роўнасцяў вынікае

$$\mathbf{x}=P\mathbf{x}'=P(R\mathbf{x}'')=(PR)\mathbf{x}'',$$

адкуль на падставе трэцяй роўнасці атрымаем $S=PR$. Такім чынам, *пры паслядоўным пераўтварэнні каардынат матрыца выніковага пераходу будзе роўная здабытку матрыц прамежкавых пераходаў.*

5.2. ЭЎКЛІДАВЫ ПРАСТОРЫ

1°. Паняцце эўклідавай прасторы. Абстрактныя рэчаісныя лінейныя прасторы з'яўляюцца (у нейкім сэнсе) больш простымі, чым геаметрычная прастора, якая разглядалася ў раздзелах «Вектарная алгебра» і «Аналітычная геаметрыя». Тут не ідзе гутарка пра вымярэнні даўжынь, вуглоў, плошчаў і г. д. Распаўсюджваць метрычныя паняцці на абстрактныя прасторы можна па-рознаму, але адным з эфектыўных спосабаў з'яўляецца аксіяматычнае азначэнне скалярнага здабытку вектараў.

Азначэнне 5.4. *Рэчаісная лінейная прастора* $\mathbf{E}$ *называецца эўклідавай прасторай, калі кожнай пары вектараў* $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in\mathbf{E}$ *пастаўлены ў адпаведнасць рэчаісны лік* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, *які называецца скалярным здабыткам і падпарадкаваны наступным аксіёмам:*

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})=(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
2) $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y})=\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
3) $(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z})=(\mathbf{x}, \mathbf{z})+(\mathbf{y}, \mathbf{z})$;
4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x})>0$ *пры* $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, $(\mathbf{0}, \mathbf{0})=0$,

дзе $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ *ёсць адвольныя вектары з* $\mathbf{E}$; λ — *адвольны рэчаісны лік.*

Калі ў прасторы $\mathbf{E}$ зададзены базіс $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$, то для $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in\mathbf{E}$ маюць месца роўнасці:

$$\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+...+\alpha_n\mathbf{e}_n,\quad \mathbf{y}=\beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+...+\beta_n\mathbf{e}_n,$$

адкуль на падставе аксіём 2, 3 скалярнага здабытку атрымаем:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i, \ \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (\mathbf{e}_i, \ \mathbf{e}_j).$$

Апошняя роўнасць паказвае, што вызначэнне скалярнага здабытку залежыць ад базіса прасторы **E** і велічынь $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, $i, j = \overline{1, n}$. Запішам гэтыя велічыні ў выглядзе квадратнай матрыцы:

$$G = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix}.$$

Матрыца G называецца *матрыцай Грама** базіса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Згодна з аксіёмай 1 скалярнага здабытку, $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$, а таму матрыца G з'яўляецца сіметрычнай, г. зн. $G^T = G$.

Калі праз **x**, **y** абазначыць матрыцы-слупкі каардынатаў вектараў **x**, **y** у базісе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, то атрымаем наступнае выяўленне скалярнага здабытку:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T G \mathbf{y}. \qquad (5.12)$$

Пададзім уласцівасць скалярнага здабытку, якая не залежыць ад спосаба яго вызначэння.

Тэарэма 5.6* (няроўнасць Кашы** — Бунякоўскага).** *Для кожных двух вектараў* **x**, **y** *эўклідавай прасторы выконваецца няроўнасць*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

□ Відавочна, што тэарэма мае месца, калі хоць адзін з вектараў **x**, **y** нулявы. Таму лічым, што **x**, **y** ёсць ненулявыя вектары. Будзем разглядаць вектар $\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}$ пры адвольным λ. Згодна з аксіёмамі скалярнага здабытку, атрымліваем

$$(\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}, \ \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2\lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^2 (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geqslant 0.$$

Квадратовы трохсклад правай часткі апошняй роўна-

---

* *Грам Ёрген Педэрсэн* (Gram Iørgen Pedersen, 1850—1916) — дацкі матэматык.

** *Кашы Агюстэн Люі* (Cauchy Augustin Louis, 1789—1857) — французскі матэматык.

*** *Бунякоўскі Віктар Якаўлевіч* (1804—1889) — расійскі матэматык.

сці неадмоўны пры ўсякім значэнні λ, у прыватнасці пры $\lambda=(\mathbf{x}, \mathbf{y})/(\mathbf{y}, \mathbf{y})$. Тады

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x})-2\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}(\mathbf{x}, \mathbf{y})+\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})^2}(\mathbf{y}, \mathbf{y})=(\mathbf{x}, \mathbf{x})-\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}\geqslant 0,$$

адкуль і вынікае сцверджанне тэарэмы. ■

Па аналогіі з геаметрычнай прасторай у рэчаіснай лінейнай прасторы азначым калініярнасць вектараў. Два вектары **x** і **y** будзем называць *калініярнымі*, калі існуе лік λ, такі, што $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}$.

Засяродзім увагу на тым, што ў нястрогай няроўнасці Кашы — Бунякоўскага праўдзіцца роўнасць, калі і толькі калі вектары **x** і **y** калініярныя. Сапраўды, з $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}$ будзем мець роўнасці:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2=(\lambda\mathbf{y}, \mathbf{y})^2=\lambda^2(\mathbf{y}, \mathbf{y})^2,$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})=(\lambda\mathbf{y}, \lambda\mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{y})=\lambda^2(\mathbf{y}, \mathbf{y})^2.$$

Параўноўваючы іх, атрымаем роўнасць у тэарэме 5.6. Наадварот, калі няроўнасць Кашы — Бунякоўскага з'яўляецца роўнасцю, то з доказу тэарэмы 5.6 атрымаем калініярнасць вектараў **x** і **y**, $\mathbf{x}=\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}\mathbf{y}$.

Зразумела, што калі **x** і **y** з'яўляюцца некалініярнымі вектарамі, то няроўнасць Кашы — Бунякоўскага выконваецца ў строгім сэнсе.

Такім чынам, няроўнасць Кашы — Бунякоўскага можна разглядаць як крытэр калініярнасці (некалініярнасці) ненулявых вектараў.

2°. Артаганальныя вектары і ортаўнармаваны базіс. Разгледзім фундаментальныя паняцці эўклідавай прасторы.

Азначэнне 5.5. *Вектары* **x** *і* **y** *эўклідавай прасторы* **E** *называюцца артаганальнымі, калі* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})=0$; *запісваюць* $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$.

Згодна з аксіёмай 1 скалярнага здабытку, дачыненне артаганальнасці з'яўляецца сіметрычным, г. зн. з $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$ вынікае $\mathbf{y}\perp\mathbf{x}$. Паколькі ў геаметрычнай прасторы $\mathbf{R}^3$ паняцце артаганальнасці супадае з паняццем перпендыкулярнасці вектараў, то артаганальнасць можна разглядаць як абагульненне перпендыкулярнасці ў абстрактных эўклідавых прасторах.

Сістэма вектараў

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \tag{5.13}$$

называецца *артаганальнай*, калі яна складаецца або з аднаго вектара, або яе вектары парамі артаганальныя.

Тэарэма 5.7. *Артаганальная сістэма з ненулявых вектараў ёсць лінейна незалежная.*

□ Няхай сукупнасць (5.13) ёсць канечная артаганальная сістэма з ненулявых вектараў. Абедзве часткі роўнасці

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{a}_n=0,\ \alpha_i\in\mathbf{R},\ i=\overline{1,\ n} \qquad (5.14)$$

($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\in\mathbf{R}$), памножым скалярна на вектар $\mathbf{a}_i$, $i=\overline{1,\ n}$. Атрымаем $\alpha_i(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)=0$, $i=\overline{1,\ n}$. Паколькі $\mathbf{a}_i\neq 0$, то $\alpha_i=0$, $i=\overline{1,\ n}$. Гэта даказвае тэарэму пры канечным n. Бясконцая артаганальная сістэма з ненулявых вектараў таксама з'яўляецца лінейна незалежнай, бо лінейна незалежная кожная яе канечная частка. ■

Вектар $\mathbf{x}$ эўклідавай прасторы $\mathbf{E}$ будзем называць *унармаваным*, калі $(\mathbf{x}, \mathbf{x})=1$.

Кожны ненулявы вектар $\mathbf{x}\in\mathbf{E}$ можна ўнармаваць, калі памножыць яго на лік $\lambda=1/(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$. Сапраўды,

$$(\lambda\mathbf{x},\ \lambda\mathbf{x})=\lambda^2(\mathbf{x},\ \mathbf{x})=\frac{1}{(\mathbf{x},\ \mathbf{x})}(\mathbf{x},\ \mathbf{x})=1.$$

Сістэму вектараў будзем называць *унармаванай*, калі ўнармаваныя ўсе вектары сістэмы.

Азначэнне 5.6. *Сістэма вектараў называецца артаўнармаванай, калі яна з'яўляецца артаганальнай і ўнармаванай.*

Тэарэма 5.8. *У n-мернай эўклідавай прасторы* $\mathbf{E}^n$ *існуе артаўнармаваны базіс.*

□ Доказ тэарэмы здзейснім з дапамогай метада матэматычнай індукцыі ў дачыненні да памернасці прасторы n. Пры $n=1$ сцверджанне тэарэмы мае месца, бо калі $\mathbf{a}_1$ ёсць базіс $\mathbf{E}^1$, то вектар $\mathbf{e}_1=\dfrac{1}{(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_1)^{1/2}}\mathbf{a}_1$ ёсць унармаваны вектар і ўтварае базіс $\mathbf{E}^1$.

Дапусцім, што ў кожнай прасторы $\mathbf{E}^{n-1}$ існуе артаўнармаваны базіс, і дакажам гэта сцверджанне для $\mathbf{E}^n$.

Няхай сістэма (5.13) ёсць адвольны базіс $\mathbf{E}^n$. У гэтым выпадку лінейная абалонка $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1})$ ёсць $(n-1)$-мерная эўклідава прастора. Згодна з пагадненнем індукцыі, там існуе артаўнармаваны базіс $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}\}$. Будзем разглядаць вектар

$$\mathbf{a}'_n = \mathbf{a}_n - \alpha_1\mathbf{e}_1 - \alpha_2\mathbf{e}_2 - \ldots - \alpha_{n-1}\mathbf{e}_{n-1},$$

дзе лікі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ вызначым такім чынам, што $\mathbf{a}'_n \perp \mathbf{e}_i$, $i=\overline{1, n-1}$. Паколькі сістэма вектараў $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ з'яўляецца ортаўнармаванай, то

$$(\mathbf{a}'_n, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{a}_n, \mathbf{e}_i) - \alpha_i = 0, \quad i=\overline{1, n-1},$$

адкуль $\alpha_i = (\mathbf{a}_n, \mathbf{e}_i)$. Зыходзячы з вектара $\mathbf{a}'_n \neq \mathbf{0}$, вызначым вектар $\mathbf{e}_n = \frac{1}{(\mathbf{a}'_n, \mathbf{a}'_n)^{1/2}} \mathbf{a}'_n$. Зразумела, што ён з'яўляецца ўнармаваным і сістэма $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ ортаўнармаванай. Цяпер на падставе тэарэмы 5.7 маем сцверджанне, што $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ ёсць ортаўнармаваны базіс у прасторы $\mathbf{E}^n$. ■

Адзначым, што пры доказе тэарэмы 5.8 скарыстоўваўся *метад артаганалізацыі* адвольнага базіса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ прасторы $\mathbf{E}^n$. Для яго практычнага выкарыстання спачатку вызначаюць вектар $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)^{1/2}} \mathbf{a}_1$. Пасля вызначаюць ортаўнармаваны базіс $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ лінейнай абалонкі $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, $\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 - \alpha_1\mathbf{e}_1$, дзе $\alpha_1 = (\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1)$; $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2)^{1/2}} \mathbf{a}'_2$. Далей вызначаюць ортаўнармаваны базіс $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ лінейнай абалонкі $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ і г. д.

У выпадку, калі базіс $\mathbf{E}^n$ з'яўляецца ортаўнармаваным, матрыца Грама

$$G = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \ldots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \ldots & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2) & \ldots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

ёсць адзінкавая матрыца. Таму на падставе формулы (5.12) скалярны здабытак вызначаецца формулай

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T E \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i, \tag{5.15}$$

дзе, нагадаем, $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; $\mathbf{y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Формула (5.15) паказвае аналогію з формулай скалярнага здабытку ў дэкартавых прамавугольных каардынатах для геаметрычнай прасторы $\mathbf{R}^3$. Аналогію можна распаўсюдзіць і на метрычныя паняцці.

Даўжынёй вектара $\mathbf{x} \in \mathbf{E}^n$ называецца велічыня

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}.$$

Адзначым некаторыя *ўласцівасці даўжыні:*

1) $|\mathbf{x}| \geqslant 0$, $|\mathbf{x}| = 0$ *толькі пры* $\mathbf{x} = 0$;

2) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ *для кожных* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}^n$.

Апошняя ўласцівасць называецца няроўнасцю трохвугольніка і яе можна даказаць з дапамогай няроўнасці Кашы — Бунякоўскага (гл. тэарэму 5.6).

Вуглом $(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}})$ *паміж ненулявымі вектарамі* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}^n$ называецца вугал, які вызначаецца формулай

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^2}}, \quad 0 \leqslant (\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) \leqslant \pi.$$

Калі сярод вектараў $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ёсць хоць адзін нулявы, то вугал паміж такімі вектарамі лічыцца нявызначаным.

Няроўнасць Кашы — Бунякоўскага дазваляе сцвярджаць, што выраз, які задае значэнне косінуса вугла паміж вектарамі, па модулі не перавышае адзінкі. Таму вугал паміж ненулявымі вектарамі існуе і вызначаецца адзіным чынам.

Акрамя артаганальных вектараў эўклідавай прасторы, будзем разглядаць і артаганальныя мноствы вектараў.

Два мноствы $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ вектараў з $\mathbf{E}$ называюцца *артаганальнымі*, калі ўсякі вектар з мноства $\mathbf{V}$ з'яўляецца артаганальным кожнаму вектару з мноства $\mathbf{W}$. Артаганальнасць $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ абазначаюць $\mathbf{V} \perp \mathbf{W}$.

Калі $\mathbf{W}$ ёсць мноства ўсіх вектараў з $\mathbf{E}$, такіх, што $\mathbf{W} \perp \mathbf{V}$, то $\mathbf{W}$ называецца *артаганальным дапаўненнем* $\mathbf{V}$ і абазначаецца $\mathbf{V}^{\perp}$. Незалежна ад мноства $\mathbf{V}$ артаганальнае дапаўненне $\mathbf{V}^{\perp}$ ёсць падпрастора прасторы $\mathbf{E}$. Сапраўды, калі два вектары $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ належаць $\mathbf{V}^{\perp}$, то для ўсякага вектара $\mathbf{b}$ з мноства $\mathbf{V}$ маем $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = 0$. У гэтым выпадку для ўсякіх рэчаісных лікаў α_1, α_2 выконваецца роўнасць $(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = 0$, г. зн. $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2$ ёсць вектар мноства $\mathbf{V}^{\perp}$.

Тэарэма 5.9. *Эўклідава прастора* $\mathbf{E}$ *ёсць прамая сума*

адвольнай падпрасторы $\mathbf{V}$ *і яе артаганальнага дапаўнення* $\mathbf{V}^{\perp}$.

□ Няхай $\dim \mathbf{V}=k$, $\dim \mathbf{V}^{\perp}=m$. Зафіксуем у падпрасторах $\mathbf{V}$ і $\mathbf{V}^{\perp}$ ортаўнармаваныя базісы адпаведна $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k\}$ і $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, ..., \mathbf{i}_m\}$. Згодна з тэарэмай 5.8, такія базісы існуюць.

Разгледзім сістэму вектараў

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, ..., \mathbf{i}_m. \tag{5.16}$$

Відавочна, што яна з'яўляецца ортаўнармаванай, а значыць, на падставе тэарэмы 5.7 лінейна незалежнай. Пакажам, што сістэма (5.16) ёсць базіс прасторы $\mathbf{E}$. Зробім гэта метадам ад процілеглага. Дапусцім, што гэта не так. Тады ў прасторы $\mathbf{E}$ знойдзецца ненулявы вектар $\mathbf{e}$, які разам з вектарамі (5.16) утварае ортаўнармаваную сістэму вектараў. Значыць, вектар $\mathbf{e}$ належыць як да падпрасторы $\mathbf{V}$, так і да $\mathbf{V}^{\perp}$, адкуль $(\mathbf{e}, \mathbf{e})=0$. Апошняе супярэчыць таму факту, што $\mathbf{e}$ ёсць ненулявы вектар. Такім чынам, сістэма (5.16) ёсць базіс прасторы $\mathbf{E}$ і $\mathbf{V}\cap\mathbf{V}^{\perp}=\varnothing$. Зыходзячы з гэтага, атрымліваем $\mathbf{E}=\mathbf{V}\oplus\mathbf{V}^{\perp}$. ■

3°. Сувязь паміж матрыцамі Грама. Артаганальная матрыца. Будзем разглядаць два розныя базісы $\mathbf{B}_1=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$, $\mathbf{B}_2=\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_n\}$ эўклідавай прасторы $\mathbf{E}^n$ і матрыцу перахода

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

ад базіса $\mathbf{B}_1$ да базіса $\mathbf{B}_2$. Высветлім сувязь паміж матрыцамі Грама

$$G=\begin{bmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix},$$

$$G'=\begin{bmatrix} (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_1) & (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) & \dots & (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_n) \\ (\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1) & (\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2) & \dots & (\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{e}'_n, \mathbf{e}'_1) & (\mathbf{e}'_n, \mathbf{e}'_2) & \dots & (\mathbf{e}'_n, \mathbf{e}'_n) \end{bmatrix},$$

якія вызначаюць скалярныя здабыткі вектараў адпаведна ў базісах $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$. На падставе формул (5.12) для элементаў матрыц G і G' справядлівыя наступныя стасункі:

$$(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} p_{ki}\mathbf{e}_k, \sum_{l=1}^{n} p_{lj}\mathbf{e}_l \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} p_{ki}p_{lj}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l).$$

Лёгка праверыць, што матрычная форма гэтых роўнасцяў будзе мець выгляд

$$G' = P^T G P. \tag{5.17}$$

Формула (5.17) вызначае сувязь паміж матрыцамі Грама ў дачыненні да розных базісаў адной і той жа эўклідавай прасторы $\mathbf{E}^n$.

Калі лічыць, што $\mathbf{B}_1$ ёсць ортаўнармаваны базіс, то матрыца G роўная адзінкавай матрыцы $\mathbf{E}$, і таму на падставе формулы (5.17) будзем мець

$$G' = P^T P.$$

Вызначнік матрыцы Грама G' праўдзіць роўнасць

$$\det G' = \det(P^T P) = (\det P)^2.$$

Паколькі базіс $\mathbf{B}_2$ ёсць адвольны базіс эўклідавай прасторы $\mathbf{E}^n$, то з улікам апошняй роўнасці даказана

Тэарэма 5.10. *Вызначнік матрыцы Грама кожнага базіса эўклідавай прасторы* $\mathbf{E}^n$ *ёсць велічыня дадатная.*

Няхай цяпер абодва базісы $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_2$ з'яўляюцца ортаўнармаванымі. У гэтым выпадку матрыцы Грама G, G' ёсць адзінкавыя, а таму для матрыцы пераходу P выконваецца роўнасць

$$P^T P = \mathbf{E}.$$

Матрыца, якая праўдзіць гэтую роўнасць, называецца *артаганальнай.*

Памножым апошнюю матрычную роўнасць на P^{-1} справа, атрымаем $P^T = P^{-1}$. Адсюль з улікам уласцівасцяў адваротнай матрыцы вынікае $PP^T = \mathbf{E}$. Гэта азначае, што P^T ёсць таксама артаганальная матрыца. Паколькі вызначнікі матрыц P і P^T з'яўляюцца роўнымі, то $(\det P)^2 = 1$, адкуль атрымаем, што *вызначнік артаганальнай матрыцы роўны* ± 1.

4°. Унітарныя прасторы. У папярэдніх пунктах гэтага параграфа мы пашырылі метрычныя паняцці геаметрыч-

най прасторы на рэчаісныя эўклідавы прасторы. Аналагічныя вынікі можна атрымаць, калі азначыць скалярны здабытак вектараў у камплекснай лінейнай прасторы.

Азначэнне 5.7. *Камплексная лінейная прастора* $\mathbf{U}$ *называецца унітарнай ці эрмітавай прасторай, калі кожнай пары вектараў* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$ *ставіцца ў адпаведнасць камплексны лік* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, *які называецца скалярным здабыткам, прычым гэты лік падпарадкоўваецца наступным аксіёмам:*

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$;
2) $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
3) $(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$;
4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ *пры* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$,

дзе $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ *ёсць адвольныя вектары з* $\mathbf{U}$; λ — *адвольны камплексны лік.*

Рыса ў першай аксіёме паказвае камплекснае спалучэнне, і гэта адзінае адрозненне ад аксіём эўклідавай прасторы. Яно не нясе за сабой істотнай розніцы паміж уласцівасцямі эўклідавай і унітарнай прастор, але памятаць пра гэта ўсё ж такі трэба. Напрыклад, калі ў эўклідавай прасторы мае месца роўнасць $(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, то ва унітарнай прасторы маем $(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \overline{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Для вектараў унітарнай прасторы, як і для вектараў эўклідавай прасторы, праўдзіцца няроўнасць Кашы — Бунякоўскага

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Доказ гэтай няроўнасці аналагічны доказу тэарэмы 5.6.

Як і для вектараў эўклідавай прасторы, пад даўжынёй вектара $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ будзем разумець велічыню $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Згодна з аксіёмамі скалярнага здабытку ва ўнітарнай прасторы, даўжыня ненулявога вектара ёсць велічыня дадатная, даўжыня нулявога вектара роўная нулю.

Для унітарнай прасторы паняцце вугла паміж вектарамі, як правіла, не разглядаюць. Вылучаюць толькі выпадак, калі вектары $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ з'яўляюцца артаганальнымі. Тады скалярны здабытак $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Відавочна, што $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$.

Па сутнасці, усе вынікі эўклідавых прастораў, якія разглядаліся вышэй, без змены азначэнняў і схем доказаў пераносяцца на унітарныя прасторы.

Адзначым толькі, што тыповым прыкладам унітарнай прасторы з'яўляецца лінейная прастора матрыц-слупкоў

або радкоў памераў n, элементы якіх ёсць камплексныя лікі, дзе скалярны здабытак вектараў $\mathbf{x}=(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$, $\mathbf{y}=(\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_n)$ роўны $(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\beta_j$. Гэтая прастора называецца *арыфметычнай унітарнай прасторай* і абазначаецца $\mathbf{C}^n$.

5.3. АФІННЫЯ ПРАСТОРЫ

1°. Паняцце афіннай прасторы. Няхай A ёсць непустое мноства, элементы якога будзем называць пунктамі і абазначаць вялікімі лацінскімі літарамі.

Азначэнне 5.8. *Мноства* A *называецца афіннай прасторай, звязанай з лінейнай прасторай* $\mathbf{L}$, *калі маюць месца наступныя аксіёмы:*

1) *кожнай пары* $(M; \mathbf{a})$, $M\in A$, $\mathbf{a}\in\mathbf{L}$, *адпавядае пункт з* A, *які абазначаецца* $M+\mathbf{a}$;

2) $M+(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(M+\mathbf{a})+\mathbf{b}$ *для кожнага вектара* $\mathbf{b}\in\mathbf{L}$;

3) $M+\mathbf{0}=M$, *дзе* $\mathbf{0}$ — *нулявы вектар* $\mathbf{L}$;

4) *для ўсякіх пунктаў* M, N *існуе адзіны вектар* $\mathbf{a}$, *такі, што* $M+\mathbf{a}=N$. *Такі вектар* $\mathbf{a}$ *абазначаецца* $\overrightarrow{MN}$.

Калі лінейная прастора $\mathbf{L}$ ёсць n-мерная, то і афінная прастора называецца *n-мернай* і абазначаецца A^n.

Калі ў афіннай прасторы A зафіксаваць некаторы пункт O, то кожнаму пункту $M\in A$ адпавядае адзіны вектар $\overrightarrow{OM}$, $O+\overrightarrow{OM}=M$, які называюць *радыусам-вектарам пункта* M. Наадварот, кожнаму вектару $\mathbf{a}\in\mathbf{L}$ адпавядае пункт $M=O+\mathbf{a}$ з A. Такім чынам, пры фіксаваным пункце O мноства радыусаў-вектараў пунктаў афіннай прасторы A супадае з мноствам вектараў лінейнай прасторы $\mathbf{L}$.

Для ўсякіх трох пунктаў O, M, N з A мае месца *правіла трохвугольніка*

$$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}.$$

Сапраўды, згодна з аксіёмай 2, левая частка вектарнай роўнасці прыме выгляд

$$O+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN})=(O+\overrightarrow{OM})+\overrightarrow{MN}=M+\overrightarrow{MN}=N,$$

а правая частка будзе роўная $O+\overrightarrow{ON}=N$. З гэтага правіла атрымаем $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Разгледзім некаторыя прыклады афінных прастораў.

1. Геаметрычная прастора, якая разглядалася ў раздзеле «Аналітычная геаметрыя», ёсць трохмерная афінная прастора.

2. Няхай вектары лінейнай прасторы $\mathbf{L}$ называюцца пунктамі, г. зн. $\boldsymbol{A}=\mathbf{L}$. Складанне пунктаў (яны ёсць і вектары $\mathbf{L}$) з вектарамі $\mathbf{L}$ азначым, як складанне вектараў у прасторы $\mathbf{L}$. Аксіёмы 1—4 афіннай прасторы выконваюцца. Значыць, такое мноства ёсць афінная прастора. Яна называецца *кананічнай афіннай прасторай*, звязанай з лінейнай прасторай $\mathbf{L}$, і абазначаецца $\boldsymbol{A}(\mathbf{L})$.

3. Будзем называць вектарам кожны радок выгляду

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, 0), \tag{5.18}$$

а пунктам — радок выгляду

$$(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, 1), \tag{5.19}$$

дзе α_i, β_i, $i=\overline{1, n}$, ёсць адвольныя камплексныя лікі.

Аперацыі з вектарамі і пунктамі вызначым роўнасцямі:

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, 0)+(\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_n', 0)=(\alpha_1+\alpha_1', \alpha_2+\alpha_2', ..., \alpha_n+\alpha_n', 0),$$
$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, 0)=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n, 0),$$
$$(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, 1)+(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, 0)=(\beta_1+\alpha_1, \beta_2+\alpha_2, ..., \beta_n+\alpha_n, 1).$$

Згодна з азначэннямі лінейнай і афіннай прастораў, мноства вектараў (5.18) з'яўляецца n-мернай лінейнай прасторай $\mathbf{L}^n$, а мноства пунктаў (5.19) ёсць афінная прастора $\boldsymbol{A}^n$, якая звязана з лінейнай прасторай $\mathbf{L}^n$.

Сістэмай каардынат у прасторы $\boldsymbol{A}^n$ будзем называць сукупнасць

$$\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}, \tag{5.20}$$

у якую ўваходзяць пункт $O\in\boldsymbol{A}^n$ і базіс $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ лінейнай прасторы $\mathbf{L}^n$, што звязаная з $\boldsymbol{A}^n$.

Каардынаты пункта M у дачыненні да сістэмы (5.20) ёсць каэфіцыенты ў раскладзе радыуса-вектара па базісных вектарах: $\overrightarrow{OM}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+...+\alpha_n\mathbf{e}_n$. Лёгка пераканацца, што каардынаты пункта ў зададзеным базісе $\mathbf{L}^n$ вызначаюцца адзіным чынам.

Няхай, акрамя пункта M, мы разглядаем і пункт N, які мае каардынаты вектара $\overrightarrow{ON}=(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$.

Згодна з правілам трохвугольніка,

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(\beta_1-\alpha_1, \beta_2-\alpha_2, .., \beta_n-\alpha_n).$$

Такім чынам, *каардынаты вектара* $\overrightarrow{MN}$ *роўныя розніцы адпаведных каардынат пунктаў канца і пачатку вектара.*

Няхай разам з сістэмай каардынат (5.20) у прасторы $\boldsymbol{A}^n$ зафіксавана яшчэ адна сістэма

$$\{O';\ \mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}'_n\}. \qquad (5.21)$$

Абазначым праз α матрыцу-слупок памераў $n\times 1$, элементы якой ёсць каардынаты пункта O' у сістэме (5.20), а праз P — матрыцу пераходу ад базіса сістэмы (5.20) да базіса (5.21). Будзем лічыць, што

$$\alpha^T=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n),\quad P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} \cdots & p_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Няхай $\mathbf{x}$ і $\mathbf{x}'$ ёсць матрыцы-слупкі памераў $n\times\times 1$ з каардынат адвольнага пункта M адпаведна ў сістэмах (5.20), (5.21): $\mathbf{x}^T=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $\mathbf{x}'^T=(x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n)$. У гэтым выпадку на падставе вектарнай роўнасці $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$ атрымаем *формулы пераўтварэння каардынат* у выглядзе

$$\mathbf{x}=\alpha+P\mathbf{x}'. \qquad (5.22)$$

Каардынатны запіс гэтай роўнасці мае выгляд

$$x_i=\alpha_i+\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x'_j,\quad i=\overline{1,\ n}.$$

Матрыца пераходу P ёсць незвыродная. Памножым стасунак (5.22) на P^{-1} злева, атрымаем *формулы пераўтварэння каардынат пункта M пры пераходзе ад сістэмы каардынат* (5.21) *да сістэмы* (5.20):

$$\mathbf{x}'=-P^{-1}\alpha+P^{-1}\mathbf{x}.$$

2°. Прамыя і плоскасці. У раздзеле «Аналітычная геаметрыя» мы паказалі, што прамая і плоскасць у прасторы ёсць геаметрычнае месца пунктаў, якія праўдзяць адпаведна вектарныя раўнанні:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{a},\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t_1\mathbf{a}_1+t_2\mathbf{a}_2,$$

дзе $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0$ — радыусы-вектары адвольнага пункта M і пунк-

та M_0 прамой або плоскасці; $\mathbf{a}$ — кіроўны вектар прамой; $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ — кіроўныя вектары плоскасці.

Калі геаметрычную прастору разглядаць як прыватны выпадак афіннай прасторы, то раўнанні прамой і плоскасці можна запісаць у выглядзе:

$$M = M_0 + \mathbf{L}^1, \ M = M_0 + \mathbf{L}^2,$$

дзе $\mathbf{L}^1 = \{t\mathbf{a} \mid t \in \mathbf{R}\}$, $\mathbf{L}^2 = \{t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 \mid t_1, \ t_2 \in \mathbf{R}\}$ ёсць адпаведна аднамерная і двухмерная рэчаісныя падпрасторы лінейнай прасторы $\mathbf{R}^3$. Скарыстоўваючы гэтыя раўнанні, азначым прамую і плоскасць у абстрактнай афіннай прасторы $\boldsymbol{A}^n$, звязанай з лінейнай прасторай $\mathbf{L}^n$.

Няхай M_0 ёсць некаторы пункт прасторы $\boldsymbol{A}^n$, $\mathbf{L}^m$ — падпрастора прасторы $\mathbf{L}^n$, $m < n$.

Мноства пунктаў

$$M_0 + \mathbf{L}^m = \{M_0 + \mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathbf{L}^m\} \tag{5.23}$$

называецца *m-мернай плоскасцю*, якая праходзіць праз пункт M_0. Падпрастора $\mathbf{L}^m$ называецца *кіроўнай прасторай плоскасці*.

Аднамерную плоскасць будзем называць прамой, а $(n-1)$-мерную — *гіперплоскасцю*. Відавочна, што $M_0 + \{0\}$ ёсць нульмерная плоскасць, якой належыць толькі пункт M_0. Адзінай n-мернай плоскасцю з'яўляецца сама прастора $\boldsymbol{A}^n$.

Адзначым простую ўласцівасць плоскасці (5.23): калі замест пункта M_0 узяць іншы пункт плоскасці N, то мае месца роўнасць

$$M_0 + \mathbf{L}^m = N + \mathbf{L}^m. \tag{5.24}$$

Тэарэма 5.11. *Плоскасць (5.23) ёсць m-мерная афінная прастора, звязаная з кіроўнай прасторай* $\mathbf{L}^m$.

□ Праверым выкананне аксіём з азначэння афіннай прасторы. Для адвольнага пункта M плоскасці (5.23) яе можна паказаць у выглядзе $M + \mathbf{L}^m$. Значыць, для кожнага вектара $\mathbf{a}$ з $\mathbf{L}^m$ пункт $M + \mathbf{a}$ належыць плоскасці (5.23), што паказвае выкананне аксіёмы 1. Відавочна, што маюць месца аксіёмы 2, 3. Няхай M і N — адвольныя пункты плоскасці. На падставе (5.24) у прасторы $\mathbf{L}^m$ існуе адзіны вектар $\mathbf{a}$, такі, што $M = N + \mathbf{a}$, а значыць, выконваецца і аксіёма 4. ■

Плоскасць (5.23) будзем абазначаць $\boldsymbol{A}^m$. На падставе яе азначэння вектарнае раўнанне $\boldsymbol{A}^m$ мае выгляд

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \ldots + t_m\mathbf{a}_m,$$

дзе $\mathbf{r}_0$ ёсць радыус-вектар некаторага пункта M_0 плоскасці, а $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ — базіс прасторы $\mathbf{L}^m$.

Калі пачатак сістэмы каардынат афіннай прасторы $\boldsymbol{A}^n$ належыць плоскасці, то $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ і вектарнае раўнанне мае выгляд

$$\mathbf{r} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \ldots + t_m\mathbf{a}_m,$$

што паказвае супадзенне плоскасці $\boldsymbol{A}^m$ з падпрасторай $\mathbf{L}^m$. У іншым выпадку плоскасць $\boldsymbol{A}^m$ не з'яўляецца падпрасторай.

Няхай

$$M_0, M_1, \ldots, M_k \tag{5.25}$$

ёсць адвольныя пункты прасторы $\boldsymbol{A}^n$. Знойдзем плоскасць найменшай памернасці k, якой належыць кожны пункт сукупнасці (5.25).

Калі $k=0$, то такая плоскасць ёсць $M_0+\{\mathbf{0}\}$, яе памернасць роўная 0. Калі $k>0$, то вылучым адзін з пунктаў (5.25), напрыклад M_0, і разгледзім лінейную абалонку $\mathbf{L}(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_k})$. Яна з'яўляецца лінейнай падпрасторай $\mathbf{L}^n$ некаторай памернасці m, $m \leqslant k$. Абазначым гэтую падпрастору $\mathbf{L}^m$. Плоскасці

$$\boldsymbol{A}^m = M_0 + \mathbf{L}^m \tag{5.26}$$

належыць кожны пункт сукупнасці (5.25), паколькі

$$M_i = M_0 + \overrightarrow{M_0M_i}.$$

Няхай $\boldsymbol{A}^l$ ёсць яшчэ адна l-мерная плоскасць, якой належаць пункты (5.25). У такім выпадку кіроўная прастора (5.26) з'яўляецца падпрасторай $\mathbf{L}^l$, адкуль вынікае няроўнасць $m \leqslant l$. Значыць, $\boldsymbol{A}^m$ з'яўляецца плоскасцю найменшай памернасці, якой належаць пункты (5.25).

Плоскасць (5.26) называецца *плоскасцю, нацягнутай на пункты (5.25)*.

Пры $k>0$ пункты (5.25) называюцца *пунктамі агульнага становішча*, калі нацягнутая на іх плоскасць ёсць k-мерная.

На падставе азначэння плоскасці (5.26) прыходзім да высновы, што $k+1$ пунктаў агульнага становішча вызначаюць адзіную k-мерную плоскасць, нацягнутую на гэтыя пункты. У прыватнасці, прамая вызначаецца двума рознымі пунктамі, а гіперплоскасць — n пунктамі агульнага становішча ў прасторы $\boldsymbol{A}^n$.

3°. Пунктавыя эўклідавы (унітарныя) прасторы.

Афінную прастору A^n будзем называць *пунктавай эўклідавай (унітарнай) прасторай*, калі яна звязана з эўклідавай (унітарнай) прасторай E^n (U^n).

Паколькі пасля азначэння скалярнага здабытку вектараў кожная лінейная прастора з'яўляецца эўклідавай або унітарнай, то ўсякую афінную прастору можна лічыць пунктавай эўклідавай або унітарнай прасторай.

Далей будзем разглядаць толькі пунктавую эўклідаву прастору, паколькі асноўныя яе ўласцівасці можна перанесці і на пунктавую унітарную прастору.

Няхай A^n ёсць пунктавая эўклідава прастора і $A^m = M + E^m$ ёсць некаторая m-мерная плоскасць з A^n.

Кожная плоскасць, кіроўная прастора якой ёсць $E^{m^\perp}$, называецца *артаганальным дапаўненнем плоскасці* A^m і абазначаецца $A^{m^\perp}$.

З папярэдняга параграфа мы ведаем, што $E^n \sim \sim E^m \oplus E^{m^\perp}$, а таму памернасць кіроўнай прасторы $E^{m^\perp}$ вызначаецца лікам $n-m$. З гэтага паводле тэарэмы 5.11 прыходзім да высновы, што артаганальнае дапаўненне $A^{m^\perp}$ з'яўляецца $(n-m)$-мернай афіннай прасторай.

Калі $m=0$, то $A^0 = M + \{0\}$ ёсць пункт, $A^{0^\perp} = A^n$, калі $m=n$, то $A^{n^\perp}$ — пункт прасторы A^n. Артаганальным дапаўненнем гіперплоскасці з'яўляецца прамая.

Няхай у прасторы A^n зафіксавана некаторая сістэма каардынат

$$\{O;\ \mathbf{i}_1,\ \mathbf{i}_2,\ \dots,\ \mathbf{i}_n\} \tag{5.27}$$

з артаўнармаваным базісам. Тады кіроўная прастора $E^{m^\perp}$ супадае з прасторай развязкаў аднароднай сістэмы лінейных раўнанняў

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{in}x_n = 0,\quad i = \overline{1,\ m},$$

дзе $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$ ёсць каардынаты базіснага вектара $\mathbf{e}_i$ прасторы E^m. Цяпер, прымаючы пад увагу тэарэму 2.22, атрымаем, што плоскасць $A^{m^\perp}$ ёсць мноства развязкаў сістэмы раўнанняў

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{in}x_n = b_i, \tag{5.28}$$

дзе лікі b_i вызначаюцца роўнасцямі

$$b_i = \alpha_{i1}\beta_1 + \alpha_{i2}\beta_2 + \ldots + \alpha_{in}\beta_n$$

пры ўмове, што $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — каардынаты некаторага пункта плоскасці $A^{m^\perp}$.

Сістэму (5.28) можна разглядаць як раўнанне плоскасці $A^{m^\perp}$. У прыватнасці, *раўнанне гіперплоскасці* мае выгляд

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = b.$$

Вектар $\mathbf{n} = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$ называецца *нармальным вектарам гіперплоскасці.* Ён з'яўляецца артаганальным дапаўненнем кіроўнай прасторы гіперплоскасці.

Тэарэма 5.12. *Для ўсякага цэлага m, $0 \leqslant m \leqslant n$, плоскасць A^m і яе артаганальнае дапаўненне $A^{m^\perp}$ перасякаюцца ў адзіным пункце.*

□ Няхай N ёсць адвольны пункт $A^{m^\perp}$. Тады, згодна з азначэннем плоскасці (5.23), маем $A^{m^\perp} = N + \mathbf{E}^{m^\perp}$. Пакажам, што перасячэнне A^m і $A^{m^\perp}$ непустое. Няхай гэта не так. Тады для ўсіх вектараў $\mathbf{a} \in \mathbf{E}^m$ і $\mathbf{b} \in \mathbf{E}^{m^\perp}$ не выконваецца роўнасць $M + \mathbf{a} = N + \mathbf{b}$. Апошняе азначае, што вектар $\overrightarrow{MN}$ не належыць суме падпрастораў $\mathbf{E}^m$ і $\mathbf{E}^{m^\perp}$. Паколькі $\overrightarrow{MN} \in \mathbf{E}^n$, а $\mathbf{E}^m \oplus \mathbf{E}^{m^\perp} = \mathbf{E}^n$, то прыходзім да супярэчнасці. Такім чынам, $A^m \cap A^{m^\perp} \neq \varnothing$.

Няхай гэтаму перасячэнню належаць два пункты N_1 і N_2. Тады на падставе тэарэмы 5.11 вектар $\overrightarrow{N_1N_2}$ належыць як прасторы $\mathbf{E}^m$, так і прасторы $\mathbf{E}^{m^\perp}$. Паколькі ў перасячэнне гэтых прастораў уваходзіць толькі нулявы вектар, то $N_1 = N_2$. ■

Разгледзім метрычныя паняцці ў пунктавай эўклідавай прасторы.

Адлегласцю $\rho(M, N)$ паміж пунктамі M і N будзем называць даўжыню вектара $\overrightarrow{MN}$. З гэтага азначэння вынікае, што

$$\rho(M, N) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN}\right)^{1/2}.$$

Калі пункты M і N у сістэме каардынат (5.27) маюць каардынаты $M(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$, $N(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n)$, то

$$\rho(M, N) = \left[\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)^2\right]^{1/2}.$$

Азначым адлегласць ад пункта M да плоскасці $\boldsymbol{A}^m = N + \mathbf{E}^m$, $0 \leqslant m \leqslant n$. Няхай P ёсць пункт перасячэння плоскасці $\boldsymbol{A}^m$ з артаганальным дапаўненнем $\boldsymbol{A}^{m^\perp}$, якому належыць пункт M. На падставе тэарэмы 5.12 такі пункт адзіны. Калі Q — адвольны пункт плоскасці $\boldsymbol{A}^m$, то, згодна з правілам трохвугольніка, мае месца вектарная роўнасць $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ}$. Знойдзем скалярны квадрат левай і правай частак апошняй роўнасці, атрымаем

$$\rho^2(M, P) + 2\left(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{PQ}\right) + \rho^2(P, Q) = \rho^2(M, Q). \quad (5.29)$$

Паколькі вектары $\overrightarrow{MP}$ і $\overrightarrow{PQ}$ належаць артаганальным прасторам $\mathbf{E}^{m^\perp}$ і $\mathbf{E}^m$, то $\left(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{PQ}\right) = 0$. Значыць, роўнасць (5.29) мае выгляд

$$\rho^2(M, P) + \rho^2(P, Q) = \rho^2(M, Q),$$

адкуль вынікае няроўнасць $\rho(M, P) \leqslant \rho(M, Q)$ для кожнага пункта Q плоскасці $\boldsymbol{A}^m$. Гэта дае падставу называць адлегласцю ад пункта M да плоскасці $\boldsymbol{A}^m$ велічыню $\rho(M, P)$.

Скарыстаем гэтае азначэнне для знаходжання яўнай формулы адлегласці пункта M да гіперплоскасці $\boldsymbol{A}^{n-1}$, якая падаецца раўнаннем

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + b = 0, \quad (5.30)$$

дзе $\mathbf{n} = (\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n)$ — нармальны вектар гіперплоскасці.

Лік $\mu = 1/\left(\pm\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}\right)$, узяты са знакам, процілеглым знаку b, называецца *нармоўным множнікам раўнання (5.30)*. Калі памножыць абедзве часткі раўнання (5.30) на множнік μ, то атрымаем *нармальнае раўнанне гіперплоскасці*

$$\alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \ldots + \alpha_n' x_n - p = 0, \quad (5.31)$$

дзе $\mathbf{n}^0 = (\alpha_1';\ \alpha_2';\ \ldots;\ \alpha_n')$ — адзінкавы нармальны вектар.

Няхай у сістэме (5.27) пункт M мае каардынаты $(\beta_1;\ \beta_2;\ \ldots;\ \beta_n)$. Тады параметрычныя раўнанні прамой, якая праходзіць праз пункт M і з'яўляецца артаганальным дапаўненнем плоскасці $\boldsymbol{A}^{n-1}$, маюць выгляд

$$x_i = \beta_i + t\alpha_i', \quad i = \overline{1, n}.$$

Будзем лічыць, што пункту P адпавядае значэнне $t=t_0$. Паколькі пункт P належыць і гіперплоскасці, то яго каардынаты праўдзяць раўнанне (5.31):

$$\alpha_1'(\beta_1+\alpha_1't_0)+\alpha_2'(\beta_2+\alpha_2't_0)+\ldots+\alpha_n'(\beta_n+\alpha_n't_0)-p=0,$$

адкуль

$$t_0=p-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'\beta_i.$$

Такім чынам, *адлегласць ад пункта M да гіперплоскасці вызначыцца формулай:*

$$\rho(M;\ P)=|t_0\mathbf{n}^0|=|t_0|=\left|p-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'\beta_i\right|.$$

У прыватнасці, адлегласць ад пачатку сістэмы каардынат (5.27) да гіперплоскасці (5.31) раўняецца p.

4°. Аб'ём n-мернага паралелепіпеда. Зафіксуем у пунктавай эўклідавай прасторы $\boldsymbol{A}^n$ некаторы пункт M_0, а ў эўклідавай прасторы $\mathbf{E}^n$ лінейна незалежную сістэму вектараў $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k,\ k\leqslant n$.

Мноства пунктаў з $\boldsymbol{A}^n$

$$M=M_0+t_1\mathbf{a}_1+t_2\mathbf{a}_2+\ldots+t_k\mathbf{a}_k,$$

дзе $0\leqslant t_i\leqslant 1,\ i=\overline{1,\ k}$, называецца *$k$-мерным паралелепіпедам з вяршыняй M_0*.

Адзначым, што калі $\boldsymbol{A}^3$ ёсць геаметрычная прастора, то аднамерны паралелепіпед ёсць адрэзак, двухмерны паралелепіпед — паралелаграм, пабудаваны на вектарах $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2$, трохмерны паралелепіпед — паралелепіпед, пабудаваны на вектарах $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3$.

Разгледзім рэкурэнтны спосаб вызначэння аб'ёма V_k k-мернага паралелепіпеда. Будзем лічыць, што $V_1=|\mathbf{a}_1|$, далей, калі вядома значэнне $V_i,\ i<k$, то

$$V_{i+1}=V_i|\overrightarrow{P_iM}_{i+1}|,$$

дзе $M_{i+1}=M_0+\mathbf{a}_{i+1}$, а пункт P_i ёсць перасячэнне плоскасцяў $\boldsymbol{A}^i=M_0+\mathbf{L}(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_i)$, $\boldsymbol{A}^{i^\perp}=M_{i+1}+$ $+\mathbf{L}^\perp(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_i)$. Абазначым $\overrightarrow{P_iM}_{i+1}=\mathbf{h}_{i+1}$. Тады з азначэння аб'ёма маем

$$V_k=|\mathbf{a}_1|\,|\mathbf{h}_2|\,|\mathbf{h}_3|\cdots|\mathbf{h}_k|. \qquad (5.32)$$

Згодна з правілам трохвугольніка, атрымліваем $\overrightarrow{P_iM}_{i+1}=\overrightarrow{P_iM_0}+\overrightarrow{M_0M}_{i+1}$, пры гэтым $\overrightarrow{M_0M}_{i+1}=\mathbf{a}_{i+1}$, $\overrightarrow{P_iM_0}$ належыць лінейнай абалонцы $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i)$. Значыць,

$$\mathbf{h}_{i+1}=t_1\mathbf{a}_1+t_2\mathbf{a}_2+\ldots+t_i\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_{i+1}. \qquad (5.33)$$

Паколькі вектар $\mathbf{h}_{i+1}$ належыць артаганальнаму дапаўненню прасторы $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i)$, то для скалярных здабыткаў праўдзяцца роўнасці $(\mathbf{h}_{i+1}, \mathbf{a}_s)=0$, $s=\overline{1, i}$, адкуль на падставе роўнасці (5.33) вынікае

$$(\mathbf{h}_{i+1}, \mathbf{h}_s)=0,\ s=\overline{1, i},\ (\mathbf{h}_{i+1}, \mathbf{a}_1)=0,\ i=\overline{1, k-1}.$$

Скарыстоўваючы гэтыя стасункі і роўнасць (5.32), атрымаем:

$$V_k^2=\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{h}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{h}_k) \\ (\mathbf{h}_2, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_2) & \ldots & (\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mathbf{h}_k, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{h}_k, \mathbf{h}_2) & \ldots & (\mathbf{h}_k, \mathbf{h}_k) \end{vmatrix}=|G(\mathbf{a}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k)|,$$

дзе $G(\mathbf{a}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k)$ ёсць матрыца Грама сістэмы вектараў $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k\}$.

Далей, разгледзім дзве патрэбныя нам уласцівасці вызначніка матрыцы Грама.

1. *Калі сістэма вектараў* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k\}$ *утворана з сістэмы* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ *па формулах (5.33), то мае месца роўнасць*

$$|G(\mathbf{a}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k)|=|G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)|.$$

□ Сапраўды, аналізуючы выразы

$$(\mathbf{h}_i, \mathbf{a}_j)=\sum_{s=1}^{i-1} t_s(\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_j)+(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j),\quad i,\ j=\overline{2, k},$$

прыходзім да высновы, што замена першага множніка $\mathbf{a}_i$ у скалярным здабытку $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ на $\mathbf{h}_i$ раўназначная дадаванню да радка з нумарам i вызначніка

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_k) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k) \end{vmatrix}$$

некаторай лінейнай камбінацыі папярэдніх радкоў; як мы ведаем, ад гэтага вызначнік не зменіцца. Аналагічна замена другога множніка $\mathbf{a}_j$ у скалярным здабытку $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ на $\mathbf{h}_j$ дадае да слупка з нумарам j лінейную камбінацыю папярэдніх слупкоў. ■

2. *Вызначнік матрыцы* $G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ *роўны нулю, калі і толькі калі сістэма вектараў* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ *з'яўляецца лінейна залежнай.*

□ Няхай $|G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)|=0$. Тады сістэма

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)+\alpha_2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)+\ldots+\alpha_k(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_k)=0,\\ \alpha_1(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1)+\alpha_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2)+\ldots+\alpha_k(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_k)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_1(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_1)+\alpha_2(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_2)+\ldots+\alpha_k(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k)=0\end{array}\right\} \quad (5.34)$$

мае нетрывіяльны развязак $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Роўнасці (5.34) можна запісаць у выглядзе

$$\left(\mathbf{a}_1, \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{a}_i\right)=0,$$

$$\left(\mathbf{a}_2, \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{a}_i\right)=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\mathbf{a}_k, \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{a}_i\right)=0.$$

Калі памножыць іх паслядоўна на $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ і скласці, то атрымаем

$$|\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{a}_k|^2=0,$$

адкуль вынікае, што

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{a}_k=\mathbf{0},$$

дзе сярод лікаў $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ знаходзяцца ненулявыя.

Наадварот, няхай мае месца апошняя роўнасць, дзе хоць бы адзін з лікаў $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ няроўны нулю. Тады, памнажаючы паслядоўна абедзве часткі гэтай роўнасці злева скалярна на вектары $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, атрымаем, што сістэма (5.34) мае нетрывіяльны развязак. Значыць, вызначнік матрыцы $G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ сістэмы роўны нулю.

На падставе ўласцівасці 1 атрымаем $V_k^2=|G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)|$, прычым аб'ём k-мернага паралелепіпеда роўны

нулю, калі вектары $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ з'яўляюцца лінейна залежнымі (уласцівасць 2).

Разгледзім вызначэнне аб'ёма n-мернага паралелепіпеда афіннай прасторы A^n. Няхай $\mathbf{B}=\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n\}$ ёсць некаторы ортаўнармаваны базіс прасторы $\mathbf{E}^n$. Абазначым праз $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ каардынаты вектара $\mathbf{a}_j$ у базісе $\mathbf{B}$. Калі сістэма вектараў $\mathbf{B}_1=\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ з'яўляецца лінейна незалежнай, то $\mathbf{B}_1$ ёсць базіс прасторы $\mathbf{E}^n$. У гэтым выпадку матрыца $A=[a_{ij}]$ ёсць матрыца пераходу ад базіса $\mathbf{B}$ да $\mathbf{B}_1$. Тады на падставе вынікаў, атрыманых у пункце 3° з § 5.2, прыходзім да высновы, што $V_n=||A||$.

5.4. ЛІНЕЙНЫЯ АПЕРАТАРЫ

1°. Паняцце лінейнага аператара. Перш чым перайсці да азначэння лінейнага аператара, разгледзім больш агульныя паняцці адлюстравання і аператара.

Няхай X і Y ёсць два адвольныя непустыя мноствы. Калі кожнаму элементу x з мноства X паводле некаторага правіла f адпавядае пэўны элемент y з мноства Y, то кажуць, што вызначана *адлюстраванне* f *мноства* X *у мноства* Y, і абазначаюць гэта $f\colon X\to Y$. Элемент y з Y, які адпавядае элементу x з X, называюць *вобразам* x і абазначаюць $f(x)$, элемент x называецца *правобразам*. Вобраз $f(x)$ вызначаецца адзіным чынам, але x зусім неабавязкова ёсць адзіны элемент, які з'яўляецца правобразам $f(x)$.

Мноства $\{f(x)|x\in X\}$ вобразаў усіх элементаў з X абазначаецца $f(X)$ і называецца *мноствам значэнняў адлюстравання*. Аналагічна для кожнага падмноства A мноства X азначаецца $f(A)=\{f(x)|x\in A\}$.

Адлюстраванне $f\colon X\to Y$ называецца *сюр'ектыўным* або адлюстраваннем з X на Y, калі кожны элемент з Y мае хоць бы адзін правобраз, г. зн. $f(X)=Y$.

Адлюстраванне $f\colon X\to Y$ называецца *ін'ектыўным* або *ўзаемна адназначным*, калі кожны вобраз $f(x)$ мае адзіны правобраз x.

Калі адлюстраванне $f\colon X\to Y$ з'яўляецца сюр'ектыўным і ін'ектыўным, то яно называецца *біектыўным*. У гэтым выпадку існуе адваротнае адлюстраванне $f^{-1}\colon Y\to X$, якое кожнаму элементу y з Y ставіць у адпаведнасць той элемент x з X, вобраз якога ёсць y.

Калі мноствы X і Y ёсць лінейныя прасторы, то кожнае адлюстраванне $\mathbf{A}\colon X\to Y$ называецца *аператарам*.

Няхай $\mathbf{L}$ і $\tilde{\mathbf{L}}$ ёсць увогуле розныя прасторы, абедзве рэчаісныя або абедзве камплексныя.

Азначэнне 5.9. *Аператар* $\mathbf{A}: \mathbf{L} \to \tilde{\mathbf{L}}$ *называецца лінейным, калі для ўсякіх двух вектараў* $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ з $\mathbf{L}$ і *кожнага ліку* λ *выконваюцца ўласцівасці:*

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{A}(\mathbf{x})+\mathbf{A}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x})=\lambda\mathbf{A}(\mathbf{x}).$$

Пералічым некалькі прыкладаў лінейных аператараў.

1. Няхай кожнаму вектару $\mathbf{x}$ з прасторы $\mathbf{L}$ адпавядае нулявы вектар з прасторы $\tilde{\mathbf{L}}$. Атрымалі нулявы аператар.

2. Няхай $\mathbf{L}$ ёсць n-мерная арыфметычная прастора $\mathbf{R}^n$ (прастора матрыц-слупкоў памеру $n\times 1$), A — прамавугольная матрыца памераў $m\times n$. Кожнаму слупку a з $\mathbf{R}^n$ будзем ставіць у адпаведнасць матрыцу-слупок Aa. Гэты слупок мае памер $m\times 1$. Такім чынам, вызначым аператар $\mathbf{A}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. З улікам азначэння множання матрыц гэты аператар з'яўляецца лінейным.

3. У рэчаіснай прасторы $\mathbf{L}^n$ зафіксуем некаторы базіс. Тады кожны вектар $\mathbf{a}$ з $\mathbf{L}^n$ будзе вызначаны сваімі каардынатамі $\mathbf{a}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, г. зн. зададзены аператар $\mathbf{A}: \mathbf{L}^n \to \mathbf{R}^n$. Ён з'яўляецца лінейным. Больш таго, калі вектару $\mathbf{a}$ ставіцца ў адпаведнасць, напрыклад, другая каардыната α_2, то атрымаем аператар $\mathbf{A}: \mathbf{L}^n \to \mathbf{R}$.

Непасрэдна з азначэння лінейнага аператара вынікае, што вобраз лінейнай камбінацыі вектараў ёсць тая ж лінейная камбінацыя вобразаў гэтых вектараў, вобраз нулявога вектара прасторы $\mathbf{L}$ ёсць нулявы элемент прасторы $\tilde{\mathbf{L}}$. На падставе гэтых меркаванняў можна сцвярджаць, што ў выпадку канцамерных прастораў $\mathbf{L}^n$ і $\tilde{\mathbf{L}}^m$ лінейны аператар $\mathbf{A}: \mathbf{L}^n \to \tilde{\mathbf{L}}^m$ мае наступныя ўласцівасці.

1. *Для кожнай падпрасторы* $\mathbf{L}_*$ *прасторы* $\mathbf{L}^n$ *мноства* $\mathbf{A}(\mathbf{L}_*)$ *ёсць падпрастора прасторы* $\tilde{\mathbf{L}}^m$, *прычым* $\dim \mathbf{A}(\mathbf{L}_*) \leqslant \dim \mathbf{L}_*$.

2. *Мноства вектараў з* $\mathbf{L}^n$, *вобраз якіх ёсць нулявы вектар з* $\tilde{\mathbf{L}}^m$, *з'яўляецца падпрасторай прасторы* $\mathbf{L}^n$.

З першай уласцівасці вынікае, што мноства $\mathbf{A}(\mathbf{L}^n)$ значэнняў лінейнага аператара ёсць падпрастора $\tilde{\mathbf{L}}^m$.

Памернасць мноства $\mathbf{A}(\mathbf{L}^n)$ называецца *рангам лінейнага аператара* і абазначаецца $r(\mathbf{A})$.

Падпрастора вектараў, вобраз якіх ёсць нулявы вектар, называецца *ядром лінейнага аператара* і абазначаецца $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$. Ядро аператара ёсць непустое мноства, паколькі яму належыць нулявы вектар. Калі ядру належыць хоць адзін ненулявы вектар, то ў прасторы $\tilde{\mathbf{L}}^m$ існуюць вектары, якія маюць не менш за два правобразы (у прыватнасці, такі вектар нулявы). Мае месца і адва-

ротнае: калі ёсць вектар $\mathbf{a}$ з $\tilde{\mathbf{L}}^m$, які мае два розныя правобразы, г. зн. $\mathbf{A}(\mathbf{a}_1)=\mathbf{A}(\mathbf{a}_2)=\mathbf{a}$, то ядру лінейнага аператара $\mathbf{A}$ належыць ненулявы вектар $\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$ (паколькі $\mathbf{A}(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)=\mathbf{A}(\mathbf{a}_1)-\mathbf{A}(\mathbf{a}_2)=\mathbf{0}$). З гэтых меркаванняў вынікае наступная ўласцівасць.

3. *Лінейны аператар* $\mathbf{A}$: $\mathbf{L}^n\to\tilde{\mathbf{L}}^m$ *з'яўляецца ін'ектыўным у тым і толькі тым выпадку, калі яго ядро ёсць нулявая падпрастора, г. зн.* $\operatorname{Ker}\mathbf{A}=\{\mathbf{0}\}$.

2°. **Матрыца лінейнага аператара.** Няхай мы разглядаем лінейны аператар $\mathbf{A}$: $\mathbf{L}^n\to\tilde{\mathbf{L}}^m$ і $\mathbf{B}=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ёсць базіс прасторы $\mathbf{L}^n$. Тады вобраз адвольнага вектара $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{e}_n$ мае выгляд

$$\mathbf{A}(\mathbf{a})=\alpha_1\mathbf{A}(\mathbf{e}_1)+\alpha_2\mathbf{A}(\mathbf{e}_2)+\ldots+\alpha_n\mathbf{A}(\mathbf{e}_n), \qquad (5.35)$$

і значыць, $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ цалкам вызначаны каардынатамі вектара $\mathbf{a}$ і вектарамі $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_2)$, …, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_n)$ з $\tilde{\mathbf{L}}^m$, якія з'яўляюцца вобразамі вектараў базіса $\mathbf{B}$.

Зафіксуем у прасторы $\tilde{\mathbf{L}}^m$ базіс $\tilde{\mathbf{B}}=\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_m\}$. Кожны з вектараў $\mathbf{A}(\mathbf{e}_i)$ мы можам раскласці па гэтым базісе

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_i)=\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\tilde{\mathbf{e}}_j, \quad i=\overline{1, n}.$$

Цяпер, калі каардынаты вектара $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ у базісе $\tilde{\mathbf{B}}$ пазначыць праз $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_m$, то роўнасць (5.35) можна запісаць у выглядзе

$$\sum_{j=1}^{m}\tilde{\alpha}_j\tilde{\mathbf{e}}_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\tilde{\mathbf{e}}_j,$$

адкуль

$$\tilde{\alpha}_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\alpha_i, \quad j=\overline{1, m}. \qquad (5.36)$$

Калі мы скарыстаем матрыцу

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (5.37)$$

і матрыцы-слупкі

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad \tilde{\alpha}=\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_1\\ \tilde{\alpha}_2\\ \vdots\\ \tilde{\alpha}_m\end{pmatrix},$$

то роўнасці (5.36) у матрычнай форме будуць мець выгляд

$$\tilde{\alpha}=A\alpha. \tag{5.38}$$

Апошняе азначае, што каардынатны слупок вобраза $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ роўны здабытку матрыцы A памераў $m\times n$ і каардынатнага слупка вектара $\mathbf{a}$.

Матрыца (5.37) называецца *матрыцай лінейнага аператара* $\mathbf{A}$: $\mathbf{L}^n\to\tilde{\mathbf{L}}^m$ у базісах $\mathbf{B}$, $\tilde{\mathbf{B}}$. Слупкі гэтай матрыцы ёсць каардынатныя слупкі вектараў $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_2)$, ..., $\mathbf{A}(\mathbf{e}_n)$ у базісе $\mathbf{B}$.

Калі зафіксаваць базісы $\mathbf{B}$ і $\tilde{\mathbf{B}}$ адпаведна ў прасторах $\mathbf{L}^n$ і $\tilde{\mathbf{L}}^m$, то кожны лінейны аператар $\mathbf{A}$: $\mathbf{L}^n\to\tilde{\mathbf{L}}^m$ вызначае адзіным чынам некаторую матрыцу памераў $m\times n$. Прыклад 2 з пункта 1° паказвае, што кожная матрыца памераў $m\times n$ вызначае пэўны лінейны аператар $\mathbf{A}$: $\mathbf{L}^n\to\tilde{\mathbf{L}}^m$. Аналізуючы гэты факт, прыходзім да высновы, што паміж мноствам усіх матрыц памераў $m\times n$ і мноствам усіх лінейных аператараў $\mathbf{A}$: $\mathbf{L}^n\to\tilde{\mathbf{L}}^m$ існуе біектыўнае адлюстраванне. Гэтая акалічнасць дазваляе на мностве лінейных аператараў вызначыць аперацыі, аналагічныя аперацыям на мностве матрыц.

Няхай $\mathbf{A}$: $\mathbf{L}^n\to\tilde{\mathbf{L}}^m$, $\mathbf{B}$: $\mathbf{L}^n\to\tilde{\mathbf{L}}^m$ ёсць два лінейныя аператары. Сумай аператараў $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ называецца аператар $\mathbf{C}$: $\mathbf{L}^n\to\tilde{\mathbf{L}}^m$ (абазначаецца $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$), які кожнаму вектару $\mathbf{a}$ з $\mathbf{L}^n$ ставіць у адпаведнасць вектар $\mathbf{C}(\mathbf{a})=\mathbf{A}(\mathbf{a})+\mathbf{B}(\mathbf{a})$ з $\tilde{\mathbf{L}}^m$. Калі ў прасторах $\mathbf{L}^n$ і $\tilde{\mathbf{L}}^m$ зафіксаваныя базісы, то няцяжка пераканацца, што $\mathbf{C}$ з'яўляецца лінейным аператарам і яго матрыца роўная суме матрыц аператараў $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$.

Здабыткам лінейнага аператара $\mathbf{A}$: $\mathbf{L}^n\to\tilde{\mathbf{L}}^m$ *і ліку* λ называецца аператар $\mathbf{B}$: $\mathbf{L}^n\to\tilde{\mathbf{L}}^m$, які кожнаму вектару $\mathbf{a}$ з $\mathbf{L}^n$ ставіць у адпаведнасць вектар $\lambda\mathbf{A}(\mathbf{a})$, абазначаецца аператар $\mathbf{B}$ праз $\lambda\mathbf{A}$. Матрыца аператара $\lambda\mathbf{A}$ будзе роўная здабытку матрыцы аператара $\mathbf{A}$ і ліку λ.

Вынік паслядоўнага скарыстання двух лінейных апе-

ратараў **A**: $\mathbf{L}^n \to \tilde{\mathbf{L}}^m$, **B**: $\tilde{\mathbf{L}}^m \to \bar{\mathbf{L}}^s$ называецца іх *здабыткам* і абазначаецца $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ (аператар, які выконваецца першым, запісваецца з правага боку). Калі ў прасторах $\mathbf{L}^n$, $\tilde{\mathbf{L}}^m$ і $\bar{\mathbf{L}}^s$ — зафіксаваныя базісы, то праз A абазначым матрыцу аператара **A**, а праз B — матрыцу аператара **B**. Матрыца $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ у базісах прасторы $\mathbf{L}^n$ і $\bar{\mathbf{L}}^s$ будзе мець памеры $s \times n$. Яна роўная здабытку матрыц B і A.

Існаванне біектыўнага адлюстравання паміж мноствам лінейных аператараў **A**: $\mathbf{L}^n \to \tilde{\mathbf{L}}^m$ і мноствам матрыц памераў $m \times n$ дазваляе даказаць яшчэ чатыры *ўласцівасці лінейнага аператара.*

4. *Ранг матрыцы лінейнага аператара роўны рангу аператара.*

□ Няхай нумары слупкоў, якія ўтвараюць базісны мінор матрыцы, ёсць $j_1, j_2, \ldots, j_r$. У гэтым выпадку вектары $\mathbf{A}(\mathbf{e}_{j_1}), \mathbf{A}(\mathbf{e}_{j_2}), \ldots, \mathbf{A}(\mathbf{e}_{j_r})$ з'яўляюцца лінейна незалежнымі і кожны вектар $\mathbf{A}(\mathbf{e}_j)$, $j = \overline{1, n}$, ёсць лінейная камбінацыя вектараў $\mathbf{A}(\mathbf{e}_{j_k})$, $k = \overline{1, r}$. Значыць, згодна з роўнасцю (5.35), вобраз адвольнага вектара **a** з $\mathbf{L}^n$ можна раскласці па вектарах $\mathbf{A}(\mathbf{e}_{j_1}), \mathbf{A}(\mathbf{e}_{j_2}), \ldots, \mathbf{A}(\mathbf{e}_{j_r})$. Такім чынам, гэтыя вектары ўтвараюць базіс у падпрасторы $\mathbf{A}(\mathbf{L}^n)$ і яе памернасць роўная r. ■

У прыватнасці, з гэтай уласцівасці вынікае, што *ранг здабытку аператараў не перавышае рангаў множнікаў.*

5. *Для аператара* **A**: $\mathbf{L}^n \to \tilde{\mathbf{L}}^m$ *мае месца роўнасць* $r(\mathbf{A}) + \dim(\mathrm{Ker}\ \mathbf{A}) = n$.

□ Згодна з азначэннем, Ker **A** ёсць мноства развязкаў сістэмы лінейных раўнанняў $A\mathbf{x} = 0$, дзе A ёсць матрыца лінейнага аператара, а $\mathbf{x}$ — матрыца-слупок зменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. З папярэдняй уласцівасці вынікае, што ранг r матрыцы сістэмы роўны $r(\mathbf{A})$. Цяпер, калі ўлічыць, што памернасць мноства развязкаў сістэмы лінейных аднародных раўнанняў роўная $n - r$, атрымаем уласцівасць 4. ■

У прыватнасці, калі $r = n$, то $\mathrm{Ker}\ \mathbf{A} = \{0\}$. Апошняе азначае, што аператар **A**: $\mathbf{L}^n \to \tilde{\mathbf{L}}^m$ з'яўляецца ін'ектыўным. Больш таго, пры $n = m$ ён будзе і сюр'ектыўным, а значыць, мае месца наступная ўласцівасць.

6. *Аператар* **A**: $\mathbf{L}^n \to \tilde{\mathbf{L}}^m$ *ёсць біектыўны аператар, калі і толькі калі памернасці прастораў* $\mathbf{L}^n$ *і* $\tilde{\mathbf{L}}^m$ *супадаюць і роўныя рангу* **A**.

Прасторы $\mathbf{L}$ і $\tilde{\mathbf{L}}$ называюцца *ізаморфнымі*, калі існуе біектыўны аператар $\mathbf{A}: \mathbf{L} \to \tilde{\mathbf{L}}$.

7. *Дзве лінейныя прасторы* $\mathbf{L}$ *і* $\tilde{\mathbf{L}}$ *з'яўляюцца ізаморфнымі, калі і толькі калі памернасці прастораў роўныя.*

□ Сапраўды, неабходнасць уласцівасці 7 вынікае з уласцівасці 6. Наадварот, калі маем дзве n-мерныя прасторы $\mathbf{L}$ і $\tilde{\mathbf{L}}$, то кожная незвыродная матрыца парадку n вызначае біектыўны аператар $\mathbf{A}: \mathbf{L} \to \tilde{\mathbf{L}}$ у дачыненні да фіксаваных базісаў $\mathbf{L}$ і $\tilde{\mathbf{L}}$. ■

Няхай мы маем ізаморфныя прасторы. Тады незалежна ад таго, з якіх элементаў складаецца кожная з іх (з матрыц-слупкоў, мнагаскладаў, развязкаў аднароднай сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў і г. д.), вывучэнне ўласцівасцяў можна ажыццяўляць толькі на адной прасторы, вынікі пераносяцца на астатнія. Таму надалей будзем лічыць, што для кожнай памернасці існуе толькі адна лінейная прастора.

Няхай $\mathbf{A}: \mathbf{L}^n \to \tilde{\mathbf{L}}^m$ ёсць некаторы лінейны аператар, $\mathbf{A}$ — матрыца гэтага аператара ў дачыненні да базісаў B і $\tilde{\mathbf{B}}$ адпаведна прастораў $\mathbf{L}^n$ і $\tilde{\mathbf{L}}^m$. Калі мы будзем разглядаць другую пару базісаў $\mathbf{B}'$ і $\tilde{\mathbf{B}}'$, то матрыца аператара A' увогуле не супадае з матрыцай A. Знойдзем сувязь паміж матрыцамі A і A' аднаго і таго ж аператара ў розных парах базісаў. Няхай P і R — матрыцы пераходу адпаведна ад базіса $\mathbf{B}$ да $\mathbf{B}'$ і ад $\tilde{\mathbf{B}}$ да $\tilde{\mathbf{B}}'$. Матрыца P ёсць незвыродная матрыца парадку n, і матрыца R — незвыродная матрыца парадку m. Абазначым праз α, α' і $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}'$ матрыцы-слупкі з каардынат вектара $\mathbf{a}$ у базісах $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ і вектара $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ у базісах $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{B}}'$. Тады, згодна з формулай (5.11), выконваецца $\alpha = P\alpha'$, $\tilde{\alpha} = R\tilde{\alpha}'$. Падстаўляючы гэтыя выразы ў формулу (5.38), атрымаем $R\tilde{\alpha}' = AP\alpha'$. Паколькі матрыца пераходу заўсёды мае адваротную, то $\tilde{\alpha}' = R^{-1}AP\alpha'$. Згодна з азначэннем матрыцы A', $\tilde{\alpha}' = A'\alpha'$. З улікам апошніх дзвюх роўнасцяў атрымаем аналітычнае выяўленне сувязі паміж матрыцамі A і A':

$$A' = R^{-1}AP. \tag{5.39}$$

Узнікае пытанне, як падабраць базісы ў прасторах $\mathbf{L}^n$ і $\tilde{\mathbf{L}}^m$, каб матрыца A мела просты выгляд.

Тэарэма 5.13. *Для кожнага лінейнага аператара* $\mathbf{A}: \mathbf{L}^n \to \tilde{\mathbf{L}}^m$ *ранга* r *базісы ў прасторах* $\mathbf{L}^n$ і $\tilde{\mathbf{L}}^m$ *можна падабраць такім чынам, што матрыца аператара будзе мець кананічны выгляд:*

$$A=\left[\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right],$$

дзе E_r ёсць адзінкавая матрыца парадку r.

□ Базіс $\mathbf{B}=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ прасторы $\mathbf{L}^n$ падбярэм наступным чынам. Вектары $\mathbf{e}_{r+1}, \mathbf{e}_{r+2}, \ldots, \mathbf{e}_n$ возьмем з падпрасторы Ker **A**, яе памернасць роўная $n-r$, а ў якасці $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_r$ возьмем адвольную сістэму лінейна незалежных вектараў з $\mathbf{L}^n$, якія не належаць Ker **A**. Цяпер незалежна ад таго, які выбраны базіс у $\tilde{\mathbf{L}}^m$, апошнія $n-r$ слупкоў матрыцы аператара A будуць нулявымі. Паколькі ранг аператара роўны r, то першыя r слупкоў матрыцы A з'яўляюцца лінейна незалежнымі. Гэта адпавядае таму, што вобразы $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1), \mathbf{A}(\mathbf{e}_2), \ldots, \mathbf{A}(\mathbf{e}_r)$ вектараў $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_r$ утвараюць базіс падпрасторы $\mathbf{A}(\mathbf{L}^n)$. Згодна з тэарэмай 5.4, яго можна дапоўніць вектарамі з $\tilde{\mathbf{L}}^m$ да базіса $\tilde{\mathbf{B}}$ прасторы $\tilde{\mathbf{L}}^m$. Матрыца аператара $\mathbf{A}\colon \mathbf{L}^n \to \tilde{\mathbf{L}}^m$ у дачыненні да базісаў $\mathbf{B}$ і $\tilde{\mathbf{B}}$ будзе мець патрэбны нам выгляд. ■

3°. Лінейныя пераўтварэнні. Лінейны аператар $\mathbf{A}\colon \mathbf{L}\to\mathbf{L}$, які кожнаму вектару $\mathbf{a}$ з $\mathbf{L}$ ставіць у адпаведнасць некаторы вектар $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ той жа прасторы $\mathbf{L}$, называецца *лінейным пераўтварэннем прасторы* $\mathbf{L}$.

Зразумела, што большасць вынікаў папярэдніх пунктаў, якія маюць месца для лінейных аператараў, праўдзяцца і для лінейных пераўтварэнняў, аднак тут ёсць і свае асаблівасці. Напрыклад, пры вызначэнні матрыцы лінейнага пераўтварэння $\mathbf{A}\colon \mathbf{L}^n\to\mathbf{L}^n$ нам дастаткова разглядаць толькі адзін базіс $\mathbf{L}^n$, паколькі ў гэтым жа базісе разглядаюцца і вобразы вектараў.

Матрыцай лінейнага пераўтварэння $\mathbf{A}\colon \mathbf{L}^n\to\mathbf{L}^n$ у базісе $\mathbf{B}=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ называецца матрыца A парадку n, слупкі якой складаюцца з каардынат вобразаў $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1), \mathbf{A}(\mathbf{e}_2), \ldots, \mathbf{A}(\mathbf{e}_n)$ у базісе $\mathbf{B}$.

Калі A' ёсць матрыца гэтага ж лінейнага пераўтварэння ў другім базісе $\mathbf{B}'=\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$, то сувязь паміж A і A', згодна з формулай (5.39), вызначаецца роўнасцю

$$A'=P^{-1}AP, \tag{5.40}$$

дзе P — матрыца пераходу ад базіса $\mathbf{B}$ да $\mathbf{B}'$.

Азначэнне 5.10. *Падпрастора* $\mathbf{L}^m$ *прасторы* $\mathbf{L}^n$ *называецца інварыянтавай у дачыненні да пераўтварэння* $\mathbf{A}$, *калі* $\mathbf{A}(\mathbf{L}^m)\subset\mathbf{L}^m$.

Напрыклад, нулявая падпрастора заўсёды пераходзіць у нулявы вектар або ядро пераўтварэння ёсць падпрастора, якая пераходзіць у нулявы вектар.

Калі падпрастора $\mathbf{L}^m$ *ёсць інварыянтавая, то ў прасторы* $\mathbf{L}^n$ *можна выбраць базіс* $\mathbf{B}=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, *такі, што матрыца A лінейнага пераўтварэння будзе мець выгляд*

$$A=\left[\begin{array}{c|c} A_m & A_{m\times(n-m)} \\ \hline O_{(n-m)\times m} & A_{n-m} \end{array}\right], \tag{5.41}$$

дзе $O_{(n-m)\times m}$ *— нулявая матрыца памераў* $(n-m)\times m$; $A_{m\times(n-m)}$ *— матрыца памераў* $m\times(n-m)$; A_m, A_{n-m} *— матрыцы парадкаў* m, $n-m$.

Сапраўды, возьмем першыя m вектараў базіса $\mathbf{B}$ у падпрасторы $\mathbf{L}^m$. Тады каардынатныя слупкі $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_2)$, ..., $\mathbf{A}(\mathbf{e}_m)$ у апошніх $n-m$ радках будуць мець нулявыя элементы. Паколькі $\mathbf{A}(\mathbf{e}_i)$ належаць $\mathbf{L}^m$, то

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_i)=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\mathbf{e}_j, \quad i=\overline{1, m},$$

адкуль вынікае, што матрыца A падаецца ў выглядзе (5.41).

Мае месца і адваротнае сцверджанне: *калі ў некаторым базісе* $\mathbf{B}$ *матрыца лінейнага пераўтварэння A мае выгляд (5.41), то лінейная абалонка* $\mathbf{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m)$ *ёсць інварыянтавая падпрастора ў дачыненні да пераўтварэння* $\mathbf{A}$. У наступным пункце мы разгледзім важкія выпадкі інварыянтавых падпрастораў, якія дазваляюць істотна спрасціць даследаванне лінейных пераўтварэнняў.

4°. Уласныя вектары і ўласныя значэнні. Няхай $\mathbf{A}$: $\mathbf{L}^n\to\mathbf{L}^n$ ёсць лінейнае пераўтварэнне, якое некатораму ненулявому вектару $\mathbf{a}\in\mathbf{L}^n$ ставіць у адпаведнасць калініярны вектар, г. зн.

$$\mathbf{A}(\mathbf{a})=\lambda\mathbf{a}. \tag{5.42}$$

У гэтым выпадку на падставе азначэння лінейнага аператара для вобраза кожнага вектара $\mu\mathbf{a}$ маем $\mathbf{A}(\mu\mathbf{a})=\lambda(\mu\mathbf{a})$. Значыць, падпрастора $\mathbf{L}^1=\{\mu\mathbf{a}\,|\,\mu\in\mathbf{R}\}$ ёсць інварыянтавая падпрастора.

Азначэнне 5.11. *Ненулявы вектар* $\mathbf{a}$, *які задавальняе ўмову (5.42), называецца ўласным вектарам лінейнага*

пераўтварэння $\mathbf{A}$. *Лік* λ *у роўнасці (5.42) называецца ўласным значэннем пераўтварэння.*

Заўважым, што калі $\mathbf{a}$ ёсць уласны вектар, які адпавядае ўласнаму значэнню λ, то кожны вектар $\mu\mathbf{a}$ пры $\mu \neq 0$ з'яўляецца ўласным вектарам з тым жа ўласным значэннем. Больш таго, калі ўласнаму значэнню λ адпавядаюць два ўласныя вектары $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, то лінейная камбінацыя $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ ёсць уласны вектар з уласным значэннем λ. Нулявы вектар, згодна з азначэннем, не з'яўляецца ўласным, а таму мноства $\mathbf{L}_\lambda$ усіх вектараў, якія з'яўляюцца лінейнымі камбінацыямі зададзеных уласных вектараў з адным і тым жа λ, не ёсць падпрастора $\mathbf{L}^n$. Калі мы пашырым $\mathbf{L}_\lambda$, далучаючы да яго нулявы вектар, то $\mathbf{L}_\lambda$ ёсць інварыянтавая падпрастора ў дачыненні да пераўтварэння $\mathbf{A}$: $\mathbf{L}^n \to \mathbf{L}^n$. Яна называецца *ўласнай падпрасторай, якая адпавядае ўласнаму значэнню* λ.

Калі ў прасторы $\mathbf{L}^n$ зафіксаваць базіс, то роўнасць (5.42) набывае выгляд

$$A\alpha=\lambda\alpha, \tag{5.43}$$

дзе A ёсць матрыца лінейнага пераўтварэння $\mathbf{A}$; α — матрыца-слупок каардынат вектара $\mathbf{a}$. Апошнюю роўнасць можна таксама падаць у выглядзе

$$(A-\lambda E)\alpha=0$$

або ў каардынатнай форме

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda)\alpha_1+\quad a_{12}\alpha_2+\ldots+\quad a_{1n}\alpha_n=0,\\ \quad a_{21}\alpha_1+(a_{22}-\lambda)\alpha_2+\ldots+\quad a_{2n}\alpha_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \quad a_{n1}\alpha_1+\quad a_{n2}\alpha_2+\ldots+(a_{nn}\lambda)\alpha_n=0,\end{array}\right\} \tag{5.44}$$

дзе a_{ij} ёсць элементы матрыцы A парадку n, α_i — каардынаты вектара $\mathbf{a}$, $i,\ j=\overline{1,\ n}$; E — адзінкавая матрыца парадку n.

Роўнасці (5.44) можна разглядаць як сістэму лінейных алгебраічных раўнанняў для вызначэння каардынат α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ уласнага вектара $\mathbf{a}$. Паколькі вектар $\mathbf{a}$ з'яўляецца ненулявым вектарам, то аднародная сістэма (5.44) будзе мець ненулявы развязак толькі тады, калі

$$\det(A-\lambda E)=0. \tag{5.45}$$

Роўнасць (5.45) называецца *характарыстычным раў-*

наннем. Кожнае ўласнае значэнне λ лінейнага пераўтварэння ёсць развязак гэтага раўнання. Згодна з азначэннем вызначніка матрыцы парадку n, левая частка характарыстычнага раўнання з'яўляецца мнагаскладам ступені n у дачыненні да зменнай λ. Ён называецца *характарыстычным мнагаскладам* і для яго мае месца наступная ўласцівасць: калі A і A' ёсць матрыцы лінейнага пераўтварэння $\mathbf{A}: \mathbf{L}^n \to \mathbf{L}^n$ у розных базісах, то характарыстычныя мнагасклады гэтых матрыц супадаюць.

□ Сапраўды,

$$|A' - \lambda E| = |P^{-1}AP - \lambda E| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP| =$$
$$= |P^{-1}(A - \lambda E)P| = |A - \lambda E|\,|P^{-1}|\,|P| = |A - \lambda E|. \quad ■$$

На падставе гэтай уласцівасці можна сцвярджаць, што ўласныя значэнні і ўласныя вектары з'яўляюцца характарыстыкай лінейнага пераўтварэння і не залежаць ад выбару базіса прасторы $\mathbf{L}^n$.

Паколькі ў мностве камплексных лікаў характарыстычнае раўнанне n-й ступені, згодна з асноўнай тэарэмай алгебры, мае хоць адзін камплексны развязак, то ў камплекснай прасторы $\mathbf{L}^n$ кожнае лінейнае пераўтварэнне мае адно ўласнае значэнне λ, а значыць, адзіны ўласны вектар. Апошняе азначае, што лінейнае пераўтварэнне камплекснай прасторы мае хоць адну інварыянтную падпрастору.

Разгледзім некаторыя *ўласцівасці ўласных значэнняў і ўласных вектараў лінейнага пераўтварэння.*

1. *Сістэма ўласных вектараў* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, *якія адпавядаюць папарна розным уласным значэнням* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, *ёсць лінейна незалежная сістэма.*

□ Для доказу скарыстаем метад матэматычнай індукцыі і метад доказу ад процілеглага. Пры $m=1$ уласцівасць мае месца, паколькі, згодна з азначэннем, уласны вектар з'яўляецца ненулявым. Няхай уласцівасць выконваецца для кожнай сістэмы з $m-1$ уласных вектараў, але парушаецца для вектараў $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Тады гэтая сістэма вектараў з'яўляецца лінейна залежнай, г. зн.

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \qquad (5.46)$$

дзе хаця б адзін з лікаў α_i няроўны нулю. Будзем лічыць $\alpha_1 \neq 0$. Скарыстоўваючы да роўнасці (5.46) лінейнае пераўтварэнне, атрымаем

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_m\lambda_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

Памножым абедзве часткі стасунку (5.46) на λ_m і адымем іх ад адпаведных частак апошняй роўнасці, будзем мець

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)\mathbf{a}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m)\mathbf{a}_2 + \dots + \\ + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\mathbf{a}_{m-1} = 0.$$

Згодна з індукцыйным пагадненнем, з гэтага судачынення вынікае, што $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = 0$ пры $\alpha_1 \neq 0$. Значыць, $\lambda_1 = \lambda_m$, але гэта супярэчыць умове разгляданай уласцівасці. Такім чынам, атрымалі, што сістэма вектараў $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ з'яўляецца лінейна незалежнай. ■

На падставе гэтай уласцівасці вынікае ўмова, дастатковая для таго, каб базіс лінейнай прасторы з'яўлялся сістэмай уласных вектараў лінейнага пераўтварэння і матрыца пераўтварэння мела дыяганальны выгляд.

2. *Калі лінейнае пераўтварэнне* $\mathbf{A}: \mathbf{L}^n \to \mathbf{L}^n$ *мае п папарна розных уласных значэнняў, то існуе базіс* $\mathbf{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ *з уласных вектараў, і матрыца пераўтварэння ў гэтым базісе з'яўляецца дыяганальнай.*

□ Першая частка гэтай уласцівасці непасрэдна вынікае з папярэдняй.

Пакажам, што матрыца пераўтварэння ёсць дыяганальная. Калі вектар $\mathbf{e}_i$ з'яўляецца ўласным, то $\mathbf{A}(\mathbf{e}_i) = \lambda \mathbf{e}_i$ і, значыць, i-ы элемент каардынатнага слупка вектара $\mathbf{A}(\mathbf{e}_i)$ роўны λ_i, а астатнія элементы ёсць нулі. Паколькі матрыца лінейнага пераўтварэння ўтвараецца з каардынатных слупкоў $\mathbf{A}(\mathbf{e}_i)$, $i = \overline{1, n}$, то яна з'яўляецца дыяганальнай, прычым уласныя значэнні пераўтварэння знаходзяцца на галоўнай дыяганалі матрыцы A. ■

3. *Лінейнае пераўтварэнне* $\mathbf{A}: \mathbf{L}^n \to \mathbf{L}^n$ *мае ўласнае значэнне, роўнае нулю, калі і толькі калі яно не з'яўляецца біектыўным.*

□ Для ўласнага вектара $\mathbf{a}$, якому адпавядае нулявое ўласнае значэнне, мае месца $\mathbf{A}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Гэта азначае, што $\operatorname{Ker} \mathbf{A} \neq \{\mathbf{0}\}$, а значыць, згодна з уласцівасцю 6 з пункта 2°, пераўтварэнне $\mathbf{A}: \mathbf{L}^n \to \mathbf{L}^n$ не з'яўляецца біектыўным.

Наадварот, калі пераўтварэнне $\mathbf{A}$ прасторы $\mathbf{L}^n$ не з'яўляецца біектыўным, то для некаторага ненулявога вектара $\mathbf{a}$ маем $\mathbf{A}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Такім чынам, вызначнік матрыцы сістэмы (5.44) роўны нулю пры $\lambda = 0$. ■

У выпадку, калі ўласныя значэнні не з'яўляюцца папарна рознымі, у лінейнай прасторы $\mathbf{L}^n$ можа ўвогуле не існаваць базіс, у якім матрыца лінейнага пераўтварэння мае просты выгляд.

Напрыклад, лінейнае пераўтварэнне двухмернай прасторы, якое падаецца матрыцай $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, мае ўласныя значэнні $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ і толькі адзін уласны вектар $\mathbf{a} = (1;\ 0)$, які вызначаецца сістэмай (5.44). Значыць, у кожным базісе прасторы $\mathbf{L}^2$ матрыца пераўтварэння не можа быць дыяганальнай.

5°. Лінейныя пераўтварэнні эўклідавай прасторы. Зразумела, што для лінейных пераўтварэнняў эўклідавай прасторы $\mathbf{A}\colon \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ маюць месца ўсе вынікі папярэдняга пункта. Аднак паняцце скалярнага здабытку вектараў дазваляе азначыць іншыя важныя класы лінейных пераўтварэнняў. Іх вывучэнню прысвечаны гэты пункт параграфа.

Азначэнне 5.12. *Лінейнае пераўтварэнне* $\mathbf{A}^*$ *эўклідавай прасторы называецца спалучаным у дачыненні да лінейнага пераўтварэння* $\mathbf{A}$, *калі для кожнай пары вектараў* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *з* $\mathbf{E}^n$ *выконваецца роўнасць скалярных здабыткаў*

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}),\ \mathbf{y}) = (\mathbf{x},\ \mathbf{A}^*(\mathbf{y})). \tag{5.47}$$

Абазначым праз A, A^* матрыцы вызначаных лінейных пераўтварэнняў у некаторым базісе $\mathbf{B}$ эўклідавай прасторы $\mathbf{E}^n$. Высветлім, якая сувязь існуе паміж гэтымі матрыцамі. Калі $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — каардынатныя слупкі вектараў $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ адпаведна, то, згодна з формулай (5.12), роўнасць (5.47) будзе мець выгляд

$$(A\mathbf{x})^T G\mathbf{y} = \mathbf{x}^T G A^* \mathbf{y},$$

дзе G ёсць матрыца Грама базіса $\mathbf{B}$. Простыя пераўтварэнні гэтай роўнасці даюць

$$\mathbf{x}^T(A^T G - G A^*)\mathbf{y} = 0,$$

адкуль у выніку адвольнасці выбару вектараў $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ атрымаем роўнасць

$$A^T G - G A^* = O, \tag{5.48}$$

дзе O ёсць нулявая матрыца парадку n.

Роўнасць (5.48) паказвае сувязь паміж матрыцамі лінейнага пераўтварэння A і спалучанага з ім пераўтварэння A^*. Калі $\mathbf{B}$ ёсць ортаўнармаваны базіс, то матрыца Грама G супадае з адзінкавай матрыцай, і таму формула (5.48) набывае выгляд

$$A^* = A^T. \tag{5.49}$$

Маюць месца наступныя ўласцівасці.

1. *Для кожнага лінейнага пераўтварэння* **A** *эўклідавай прасторы існуе адзінае спалучанае пераўтварэнне.*

□ Зафіксуем у эўклідавай прасторы $\mathbf{E}^n$ ортаўнармаваны базіс. Няхай A — матрыца пераўтварэння ў гэтым базісе. Разгледзім лінейнае пераўтварэнне $\mathbf{A}_1$: $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$, якое мае матрыцу $\mathbf{A}^T$. Тады ўмова (5.47) будзе раўназначная роўнасці $(A\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T(A^T\mathbf{y})$. Значыць, $\mathbf{A}_1$ ёсць спалучанае пераўтварэнне ў дачыненні да **A**. Калі існуе іншае спалучанае пераўтварэнне, то яго матрыца ў фіксаваным базісе на падставе роўнасці (5.49) супадае з A^T. Значыць, яно само супадае з $\mathbf{A}_1$. ■

Паколькі $(A^T)^T = A$, то на падставе роўнасці (5.49) атрымаем $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$. Апошняе азначае, што **A** з'яўляецца спалучаным пераўтварэннем у дачыненні да $\mathbf{A}^*$.

2. *Калі некаторая падпрастора* $\mathbf{E}^m$ *эўклідавай прасторы* $\mathbf{E}^n$ *з'яўляецца інварыянтавай у дачыненні да пераўтварэння* **A**, *то артаганальнае дапаўненне* $\mathbf{E}^{m^\perp}$ *будзе інварыянтавай падпрасторай у дачыненні да* $\mathbf{A}^*$.

□ Няхай **x** ёсць адвольны вектар $\mathbf{E}^m$. Тады з $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbf{E}^m$ вынікае, што для кожнага вектара $\mathbf{y} \in \mathbf{E}^{m^\perp}$ мае месца роўнасць $(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = 0$. З апошняй роўнасці на падставе азначэння спалучанага пераўтварэння $\mathbf{A}^*$ вынікае $(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\mathbf{y})) = 0$. Значыць, $\mathbf{A}^*(\mathbf{y}) \in \mathbf{E}^{m^\perp}$. ■

Паняцце спалучанага пераўтварэння прыводзіць да наступнага азначэння.

Азначэнне 5.13. *Лінейнае пераўтварэнне* $\mathbf{A}$: $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ *называецца самаспалучаным, калі яно супадае са сваім спалучаным пераўтварэннем.*

Непасрэдна з формулы (5.49) вынікае наступная ўласцівасць.

3. *Пераўтварэнне* $\mathbf{A}$: $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ *з'яўляецца самаспалучаным, калі і толькі калі яго матрыца* A *у кожным ортаўнармаваным базісе задавальняе роўнасць* $A = A^T$, *г. зн. з'яўляецца сіметрычнай.*

Тэарэма 5.14. *Калі* A *ёсць сіметрычная рэчаісная матрыца, то ўсе развязкі раўнання* $|A - \lambda E| = 0$ *з'яўляюцца рэчаіснымі.*

□ Няхай мае месца процілеглае, г. зн. раўнанне $|A - \lambda E| = 0$ мае камплексны развязак λ_0. Разгледзім сістэму лінейных раўнанняў (5.44) пры $\lambda = \lambda_0$. Гэтая сістэма мае нетрывіяльны развязак $(\alpha_1^0; \alpha_2^0; \ldots; \alpha_n^0)$, які ўвогуле можа мець камплексныя лікі α_i^0. Няхай α^0 ёсць матрыца-слупок з элементамі α_i^0, $i = \overline{1, n}$. Падстаўляючы α_i^0 у сістэ-

му (5.44), атрымліваем роўнасці, матрычная форма якіх мае выгляд

$$A\alpha^0=\lambda_0\alpha^0.$$

Левую і правую часткі гэтай матрычнай роўнасці памножым злева на матрыцу-радок $(\overline{\alpha^0})^T$, дзе $\overline{\alpha^0}$ ёсць матрыца-слупок з элементамі, камплексна-спалучанымі да элементаў α^0. У выніку атрымаем роўнасць лікаў

$$(\overline{\alpha^0})^T A\alpha^0=\lambda_0(\overline{\alpha^0})^T\alpha^0. \qquad (5.50)$$

Пакажам, што лік $\lambda=(\overline{\alpha^0})^T A\alpha^0$ з'яўляецца рэчаісным. Сапраўды,

$$\lambda=(\overline{\alpha^0})^T A\alpha^0=((\overline{\alpha^0})^T A\alpha^0)^T=(\alpha^0)^T A^T\overline{\alpha^0},$$

$$\overline{\lambda}=(\alpha^0)^T\overline{A}\ \overline{\alpha^0}=(\alpha^0)^T A\,\overline{\alpha^0}=(\alpha^0)^T A^T\overline{\alpha^0},$$

адкуль $\lambda=\overline{\lambda}$. Правая частка роўнасці (5.50) з'яўляецца камплексным лікам, паколькі здабытак $(\overline{\alpha^0})^T\alpha^0=\sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha_i^0}\alpha_i^0$ ёсць рэчаісны лік, а λ_0 — камплексны лік.

У выніку атрымалі супярэчнасць, якая паказвае, што развязак мае рэчаіснае значэнне. ■

На падставе асноўнай тэарэмы алгебры і тэарэмы 5.14 прыходзім да высновы, што кожнае самаспалучанае пераўтварэнне эўклідавай прасторы мае ўласныя вектары.

Уласныя вектары і ўласныя значэнні самаспалучанага пераўтварэння маюць шэраг важкіх уласцівасцяў, якія мы пачнем разглядаць.

4. *Уласныя вектары самаспалучанага пераўтварэння, якія адпавядаюць розным уласным значэнням, з'яўляюцца артаганальнымі.*

□ Няхай для самаспалучанага пераўтварэння $\mathbf{A}$: $\mathbf{E}^n\to\mathbf{E}^n$ вектары **a** і **b** з'яўляюцца ўласнымі і адпавядаюць розным уласным значэнням λ і μ. Тады $\mathbf{A}(\mathbf{a})=\lambda\mathbf{a}$, $\mathbf{A}(\mathbf{b})=\lambda\mathbf{b}$. На падставе азначэння самаспалучанага пераўтварэння маем:

$$(\mathbf{A}(\mathbf{a}),\ \mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a},\ \mathbf{b})=(\mathbf{a},\ \mathbf{A}(\mathbf{b}))=\mu(\mathbf{a},\ \mathbf{b}).$$

Апошнія роўнасці пры $\lambda\neq\mu$ маюць месца толькі тады, калі $(\mathbf{a},\ \mathbf{b})=0$. ■

5. *Для кожнага самаспалучанага пераўтварэння* $\mathbf{A}$: $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ *у прасторы* $\mathbf{E}^n$ *існуе ортаўнармаваны базіс з уласных вектараў пераўтварэння.*

□ Для доказу гэтай уласцівасці скарыстаем метад матэматычнай індукцыі па памернасці прасторы n. Пры $n=1$ уласцівасць мае месца, паколькі самаспалучанае пераўтварэнне, згодна з тэарэмай 5.14, мае хоць адзін уласны вектар $\mathbf{a}_1$, які пасля ўнармавання будзе вектарам базіса $\mathbf{i}_1=\mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1|$. Няхай цяпер гэтая ўласцівасць мае месца для $n=t\geqslant 1$; дакажам яе для $n=t+1$. Падпрастора $\mathbf{E}^1=\{\mu\mathbf{i}_1|\mu\in\mathbf{R}\}$ ёсць інварыянтавая ў дачыненні да самаспалучанага пераўтварэння $\mathbf{A}$. Артаганальнае дапаўненне $\mathbf{E}^{1^\perp}$ на падставе тэарэмы 5.9 з'яўляецца падпрасторай памернасці t і, згодна з уласцівасцю 3,— інварыянтавая падпрастора ў дачыненні да $\mathbf{A}$. Значыць, $\mathbf{A}$: $\mathbf{E}^{1^\perp}\to\mathbf{E}^{1^\perp}$ ёсць самаспалучанае пераўтварэнне. На падставе пагаднення індукцыі ў прасторы $\mathbf{E}^{1^\perp}$ існуе ортаўнармаваны базіс $\{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, ..., \mathbf{i}_{t+1}\}$ з уласных вектараў пераўтварэння $\mathbf{A}$: $\mathbf{E}^{1^\perp}\to\mathbf{E}^{1^\perp}$. Паколькі $\mathbf{E}^1\oplus\mathbf{E}^{1^\perp}=\mathbf{E}^{t+1}$, то сістэма ўласных вектараў $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, ..., \mathbf{i}_{t+1}\}$ ёсць ортаўнармаваны базіс прасторы $\mathbf{E}^{t+1}$. ■

Даказаная ўласцівасць 5 абгрунтоўвае наступную ўласцівасць.

6. *Для кожнай рэчаіснай сіметрычнай матрыцы A парадку n існуе артаганальная матрыца P таго ж парадку, такая, што $P^{-1}AP$ ёсць дыяганальная матрыца.*

□ Сапраўды, матрыца A вызначае самаспалучанае пераўтварэнне $\mathbf{A}$: $\mathbf{E}^n\to\mathbf{E}^n$ у некаторым ортаўнармаваным базісе $\mathbf{B}=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$. Разам з гэтым базісам, згодна з уласцівасцю 5, існуе ортаўнармаваны базіс $\mathbf{B}'=\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, ..., \mathbf{i}_n\}$ з уласных вектараў пераўтварэння. Матрыца A' пераўтварэння ў гэтым базісе з'яўляецца дыяганальнай. Няхай P ёсць матрыца пераходу ад базіса $\mathbf{B}$ да $\mathbf{B}'$. Тады, згодна з формулай 5.40, $A'=P^{-1}AP$, прычым на падставе вынікаў пункта 3° з § 5.2 матрыца P з'яўляецца артаганальнай. ■

На дакончанне адзначым, што слупкамі матрыцы P будуць каардынатныя слупкі ўласных вектараў у базісе $\mathbf{B}$.

5.5. КВАДРАТЫЧНЫЯ ФОРМЫ

1°. Білінейныя формы. Перш чым даць азначэнне білінейнай і квадратычнай формаў, разгледзім паняцце функцыі на лінейнай прасторы $\mathbf{L}^n$.

Будзем казаць, што на мностве вектараў лінейнай прасторы вызначана *функцыя аднаго вектара (двух вектараў)*, калі кожнаму вектару **x** з $\mathbf{L}^n$ (кожнай упарадкаванай пары (**x**; **y**) вектараў) ставіцца ў адпаведнасць пэўны лік.

Лік, які функцыя f ставіць у адпаведнасць вектару **x** (пары вектараў (**x**; **y**)), называецца *значэннем функцыі* і абазначаецца $f(\mathbf{x})$ ($f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$).

Зараз можна сфармуляваць

Азначэнне 5.14. *Білінейнай формай на лінейнай прасторы* $\mathbf{L}^n$ *называецца функцыя* $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *двух вектараў, якая задавальняе аксіёмы:*

1) $b(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y})=b(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y})=\lambda b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
2) $b(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z})=b(\mathbf{x}, \mathbf{z})+b(\mathbf{y}, \mathbf{z})$;
3) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z})=b(\mathbf{x}, \mathbf{y})+b(\mathbf{x}, \mathbf{z})$,

для ўсякіх трох вектараў **x**, **y**, **z** *і кожнага ліку* λ.

Зафіксуем у прасторы $\mathbf{L}^n$ базіс $\mathbf{B}=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$. Калі $\mathbf{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{e}_i$, $y=\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j\mathbf{e}_j$, то для білінейнай формы маем:

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y})=b\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{n}\beta_j\mathbf{e}_j\right)=$$

$$=\sum_{i, j=1}^{n}\alpha_i\beta_j b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Формула паказвае, што значэнне $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ знаходзяць зыходзячы з каардынатаў вектараў **x**, **y** і значэнняў білінейнай формы на магчымых парах базісных вектараў. Лікі $a_{ij}=b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, $i, j=\overline{1, n}$, называюцца *каэфіцыентамі білінейнай формы*, а матрыца

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называецца *матрыцай білінейнай формы* $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Калі праз α, β абазначыць матрыцы-слупкі з каардынатаў вектараў **x**, **y**, то на падставе азначэння аперацый з матрыцамі атрымаем

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\alpha^T A\beta. \tag{5.51}$$

Абазначым праз A' матрыцу білінейнай формы ў базісе $\mathbf{B}'=\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'\}$. Зразумела, што пры пераходзе ад базіса $\mathbf{B}$ да базіса $\mathbf{B}'$ матрыца A білінейнай формы мяняецца і становіцца роўнай A'. Пакажам сувязь паміж матрыцамі A і A'. Вектары базіса $\mathbf{B}'$ можна раскласці па вектарах базіса $\mathbf{B}$, згодна з формуламі $\mathbf{e}_j'=\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\mathbf{e}_i$, $j=\overline{1, n}$, дзе p_{ij} — элементы матрыцы P пераходу ад $\mathbf{B}$ да $\mathbf{B}'$. Таму элементы матрыцы A' вызначаюцца роўнасцямі:

$$a_{ij}'=b(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j')=b\left(\sum_{s=1}^{n} p_{si}\mathbf{e}_s, \sum_{t=1}^{n} p_{tj}\mathbf{e}_t\right)=$$

$$=\sum_{s, t=1}^{n} p_{si}p_{tj}b(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t)=\sum_{s, t=1}^{n} p_{si}p_{tj}a_{st}, \ i, \ j=\overline{1, n}.$$

Згодна з азначэннямі аперацый з матрыцамі, апошнія роўнасці можна запісаць у выглядзе

$$A'=P^TAP. \tag{5.52}$$

Формулы (5.52) паказваюць сувязь паміж матрыцамі білінейнай формы ў розных базісах $\mathbf{B}$ і $\mathbf{B}'$.

Білінейная форма называецца *сіметрычнай*, калі выконваецца ўмова

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y})=b(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Калі білінейная форма з'яўляецца сіметрычнай, то $b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)=b(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$, а таму матрыца білінейнай формы задавальняе ўмову $A=A^T$. Значыць, A ёсць сіметрычная матрыца. Відавочна, што калі матрыца білінейнай формы ў некаторым базісе з'яўляецца сіметрычнай, то сама форма будзе сіметрычнай.

2°. Квадратычныя формы. Скарыстоўваючы паняцце білінейнай формы, дадзім

Азначэнне 5.15. *Квадратычнай формай на лінейнай прасторы $\mathbf{L}^n$ называецца функцыя $k(\mathbf{x})$ аднаго вектара, значэнне якой знаходзяць паводле роўнасці $k(\mathbf{x})=b(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, дзе $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ёсць сіметрычная білінейная форма.*

Па зададзенай квадратычнай форме можна вызначыць і адпаведную ёй білінейную форму. Сапраўды, згодна з азначэннямі 5.14 і 5.15, атрымаем:

$$k(\mathbf{x}+\mathbf{y})=b(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y})=b(\mathbf{x}, \mathbf{x})+b(\mathbf{x}, \mathbf{y})+b(\mathbf{y}, \mathbf{x})+$$
$$+b(\mathbf{y}, \mathbf{y})=b(\mathbf{x}, \mathbf{x})+2b(\mathbf{x}, \mathbf{y})+b(\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

З гэтага вынікае, што білінейная форма задавальняе роўнасць

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(k(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - k(\mathbf{x}) - k(\mathbf{y})),$$

а таму значэнне $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ на кожнай пары $(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ вектараў $\mathbf{L}^n$ знаходзяць зыходзячы са значэнняў квадратычнай формы. На падставе роўнасці (5.51) квадратычную форму $k(\mathbf{x})$ можна запісаць у выглядзе

$$k(\mathbf{x}) = \alpha^T A \alpha, \qquad (5.53)$$

дзе $\alpha^T = (\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_n)$ ёсць каардынаты вектара $\mathbf{x}$; A — матрыца білінейнай формы, якая адпавядае $k(\mathbf{x})$. Каардынатны запіс гэтай роўнасці дае формулу

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j.$$

Правая частка апошняй роўнасці мае падобныя складнікі $a_{ij}\alpha_i\alpha_j = a_{ij}\alpha_j\alpha_i$, $i \neq j$. Таму пасля спрашчэння квадратычную форму можна запісаць у выглядзе

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\alpha_i^2 + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\alpha_i\alpha_j.$$

Адзначым, што матрыца A з роўнасці (5.53) называецца *матрыцай квадратычнай формы*, а яе элементы — *каэфіцыентамі*.

3°. Спрашчэнне квадратычнай формы. Квадратычная форма, матрыца якой з'яўляецца дыяганальнай, называецца *формай кананічнага выгляду* або проста *кананічнай формай.*

Тэарэма 5.15. *Для кожнай квадратычнай формы $k(\mathbf{x})$ існуе базіс прасторы $\mathbf{L}^n$, у якім $k(\mathbf{x})$ з'яўляецца кананічнай формай.*

□ Няхай квадратычная форма $k(\mathbf{x})$ у зыходным базісе $\mathbf{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ прасторы $\mathbf{L}^n$ мае выгляд (5.53), прычым для кожнага вектара прасторы $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n$. Пакажам, што ў прасторы $\mathbf{L}^n$ можна падабраць базіс $\mathbf{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_n\}$, для якога $\mathbf{x} = \alpha'_1\mathbf{e}'_1 + \alpha'_2\mathbf{e}'_2 + ... + \alpha'_n\mathbf{e}'_n$, а значыць, і формулы пераўтварэння каардынат:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\alpha'_j, \ i = \overline{1,\, n},$$

такія, што матрыца

$$A' = P^T A P$$

квадратычнай формы $k(\mathbf{x})$ у базісе $\mathbf{B}'$ будзе з'яўляцца дыяганальнай. Матрыца $P=(p_{ij})_{n\times n}$ ёсць матрыца пераходу ад базіса $\mathbf{B}$ да $\mathbf{B}'$. Для доказу гэтай магчымасці скарыстаем метад матэматычнай індукцыі па колькасці каардынат α_i.

Пры $n=1$ форма мае кананічны выгляд $k(\mathbf{x})=a_{11}\alpha_1^2$. Пагодзімся, што тэарэма мае месца для кожнага $m<n$ і дакажам яе пры $m=n$. Спачатку будзем лічыць, што ў форме (5.53) хаця б адзін каэфіцыент a_{ii} няроўны нулю. Увогуле можна лічыць $a_{11}\neq 0$. У гэтым выпадку выраз $\frac{1}{a_{11}}(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n)^2$ з'яўляецца квадратычнай формай з n каардынатамі, у якой каэфіцыенты пры α_1 супадаюць з адпаведнымі каэфіцыентамі $k(\mathbf{x})$. Розніца гэтых формаў

$$k_1(\mathbf{x})=k(\mathbf{x})-\frac{1}{a_{11}}(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n)^2$$

ёсць таксама квадратычная форма з каардынатамі α_2, α_3, ..., α_n. На падставе індукцыйнай згоды для $k_1(\mathbf{x})$ існуюць формулы пераўтварэння каардынат:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2=p_{22}\alpha_2'+p_{23}\alpha_3'+\ldots+p_{2n}\alpha_n',\\ \alpha_3=p_{32}\alpha_2'+p_{33}\alpha_3'+\ldots+p_{3n}\alpha_n',\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_n=p_{n2}\alpha_2'+p_{n3}\alpha_3'+\ldots+p_{nn}\alpha_n'\end{array}\right\}\qquad(5.54)$$

з незвыроднай матрыцай каэфіцыентаў, якія форму $k_1(\mathbf{x})$ прыводзяць да кананічнага выгляду. У выніку атрымаем

$$k(\mathbf{x})=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n)^2+$$
$$+a_{22}'\alpha_2'^2+a_{33}'\alpha_3'^2+\ldots+a_{nn}'\alpha_n'^2.$$

Калі пазначыць $\alpha_1'=a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots a_{1n}\alpha_n$, $a_{11}'=1/a_{11}$, то форму $k(\mathbf{x})$ можна запісаць у выглядзе

$$k(\mathbf{x})=a_{11}'\alpha_1'^2+a_{22}'\alpha_2'^2+\ldots+a_{nn}'\alpha_n'^2.$$

Згодна з нашай заменай,

$$\alpha_1=\frac{1}{a_{11}}\alpha_1'-\frac{a_{12}}{a_{11}}\alpha_2-\ldots-\frac{a_{1n}}{a_{11}}\alpha_n.$$

Калі мы падставім у гэтую роўнасць выразы для α_i,

$i=\overline{2, n}$, са стасункаў (5.54), то атрымаем

$$a_1=p_{11}a_1'+p_{12}a_2'+\dots+p_{1n}a_n'.$$

З гэтай формулы (разам з сістэмай (5.54)) вынікаюць формулы пераўтварэння каардынат пры пераходзе ад базіса **B** да базіса **B**$'$, у якім квадратычная форма мае кананічны выгляд. Матрыца P каэфіцыентаў формул пераўтварэння каардынат мае выгляд

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ 0 & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Вызначнік матрыцы

$$|P|=\frac{1}{a_{11}}\begin{bmatrix} p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}\neq 0,$$

а значыць, матрыца P з'яўляецца незвыроднай і яе слупкі ёсць каардынаты вектараў базіса **B**$'$.

Застаецца разгледзець выпадак, калі ўсе дыяганальныя элементы матрыцы A формы (5.53) роўныя нулю. Тады сярод недыяганальных элементаў матрыцы існуюць ненулявыя, бо інакш $k(\mathbf{x})\equiv 0$. Няхай, напрыклад, $a_{12}\neq 0$. Тады пераўторым каардынаты паводле формул:

$$\left.\begin{aligned} a_1&=a_1'-a_2', \\ a_2&=a_1'+a_2', \\ a_i&=a_i', \ i=\overline{3, n} \end{aligned}\right\}$$

З незвыроднай матрыцай каэфіцыентаў

$$P_1=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad |P_1|=2$$

квадратычная форма $k(\mathbf{x})$ набывае выгляд

$$k(\mathbf{x})=2a_{12}\alpha_1'^2-2a_{12}\alpha_2'^2+k_2(\mathbf{x}),$$

дзе $k_2(\mathbf{x})$ ёсць квадратычная форма, у якой адсутнічаюць складнікі з $\alpha_1'^2$, $\alpha_2'^2$. Для гэтай квадратычнай формы можна паўтарыць усе тыя разважанні, што і ў выпадку $a_{11}\neq 0$. ■

Адзначым, што з доказу тэарэмы 5.15 вынікае *метад спрашчэння квадратычнай формы да кананічнага выгляду*. Праілюструем яго на наступным прыкладзе.

Прыклад 5.1. Спрасціць квадратычную форму да кананічнага выгляду

$$k(\mathbf{x})=4\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2-4\alpha_1\alpha_3+2\alpha_2\alpha_3-4\alpha_1\alpha_4-2\alpha_3\alpha_4.$$

▷ Паколькі $a_{11}=4\neq 0$, то:

$$k(\mathbf{x})=\frac{1}{4}(4\alpha_1-2\alpha_3-2\alpha_4)^2+2\alpha_2\alpha_3+\alpha_2^2,\ k_1(\mathbf{x})=\alpha_2^2+2\alpha_2\alpha_3.$$

У квадратычнай формы $k_1(\mathbf{x})$ каэфіцыент $a_{22}=1$, таму

$$k_1(\mathbf{x})=(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_3^2.$$

На падставе формул пераўтварэння каардынат:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1'&=4\alpha_1-2\alpha_3-2\alpha_4,\\ \alpha_2'&=\alpha_2+\alpha_3,\\ \alpha_3'&=\alpha_3,\\ \alpha_4'&=\alpha_4,\end{aligned}\right\}\qquad(5.55)$$

квадратычная форма $k(\mathbf{x})$ прыме кананічны выгляд

$$k(\mathbf{x})=\frac{1}{4}\alpha_1'^2+\alpha_2'^2-\alpha_3'^2.$$

Матрыца P пераходу ад базіса **B** да **B′** ёсць адваротная для матрыцы каэфіцыентаў формул (5.55), г. зн.

$$P=\begin{bmatrix}1/4 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Каардынаты вектараў кананічнага базіса **B′** ёсць слупкі матрыцы P. ◀

Пры пераходзе ад аднаго базіса да другога ў прасторы $\mathbf{L}^n$ матрыцы квадратычнай формы змяняюцца, але

для рангу матрыц справядлівая наступная ўласцівасць.

1. *Ранг матрыцы квадратычнай формы не залежыць ад базіса.*

□ Згодна з формулай (5.52), матрыцы A і A' квадратычнай формы ў розных базісах прасторы $\mathbf{L}^n$ звязаныя роўнасцю $A' = P^T A P$, дзе P ёсць незвыродная матрыца. Адсюль на падставе тэарэмы 2.14 вынікае $r(A') = r(A)$. ■

З даказанай уласцівасці вынікае, што колькасць няроўных нулю каэфіцыентаў у кананічных выглядах формы $k(\mathbf{x})$ ёсць велічыня сталая, роўная $r(A)$. Яна называецца *рангам* $k(\mathbf{x})$.

Будзем разглядаць адвольную рэчаісную квадратычную форму ў эўклідавай прасторы $\mathbf{E}^n$. Яе матрыца A у некаторым базісе з'яўляецца рэчаіснай сіметрычнай матрыцай. На падставе ўласцівасці 6 з § 5.4 існуе артаганальная матрыца P парадку n, такая, што $P^{-1}AP = \Lambda$ ёсць дыяганальная матрыца, у якой на галоўнай дыяганалі стаяць характарыстычныя значэнні матрыцы A. Паколькі кожная артаганальная матрыца ёсць матрыца пераходу паміж двума ортаўнармаванымі базісамі $\mathbf{E}^n$ і $P^{-1} = P^T$, то на падставе ўласцівасці 5 з пункта 5° § 5.4 і формулы (5.52) мае месца

Тэарэма 5.16. *Кожная рэчаісная квадратычная форма $k(\mathbf{x})$ у прасторы $\mathbf{E}^n$ з матрыцай A у некаторым ортаўнармаваным базісе* **B** *можа быць прыведзена да кананічнага выгляду*

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i'^2$$

шляхам пераходу ад базіса **B** *да ортаўнармаванага базіса* **B'**, *вектары якога ёсць уласныя вектары матрыцы A; лікі λ_i — характарыстычныя значэнні матрыцы A.*

Пераўтварэнне квадратычнай формы да кананічнага выгляду, згодна з тэарэмай 5.16, называецца *прывядзеннем квадратычнай формы да галоўных восяў.*

Няхай $\mathbf{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базіс прасторы $\mathbf{E}^n$, у якім рэчаісная квадратычная форма $k(\mathbf{x})$ мае кананічны выгляд. На падставе ўласцівасці 1 можна сцвярджаць, што

$$k(\mathbf{x}) = a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2 + \ldots + a_m\alpha_m^2 - a_{m+1}\alpha_{m+1}^2 - \ldots - a_r\alpha_r^2,$$

дзе $a_i > 0$, $i = \overline{1, r}$; r — ранг квадратычнай формы.

Колькасць $p = m$ дадатных і колькасць $q = r - m$ адмоўных каэфіцыентаў называюцца адпаведна *дадатным*

і *адмоўным індэксамі* $k(\mathbf{x})$. Розніца $\sigma = p - q$ называецца *сігнатурай*.

Мае месца наступная ўласцівасць, якая носіць назву *закона інэрцыі рэчаіснай квадратычнай формы.*

2. *Дадатны і адмоўны індэксы, а таксама і сігнатура, не залежаць ад базіса, у якім форма мае кананічны выгляд.*

☐ Няхай $\mathbf{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'\}$ ёсць яшчэ адзін базіс $\mathbf{E}^n$, у якім $k(\mathbf{x})$ мае кананічны выгляд:

$$k(\mathbf{x}) = a_1'\alpha_1'^2 + a_2'\alpha_2'^2 + \ldots + a_t'\alpha_t'^2 - a_{t+1}'\alpha_t'^2 - \ldots - a_r'\alpha_r'^2.$$

Будзем лічыць, што $m > t$. Няхай $P = (p_{ij})$ ёсць матрыца пераходу ад базіса $\mathbf{B}'$ да $\mathbf{B}$. Тады формулы пераўтварэння каардынат маюць выгляд

$$\alpha_i' = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\alpha_j, \quad i = \overline{1, n},$$

прычым матрыца P ёсць незвыродная. Калі падставім правыя часткі гэтых формул замест α_i' у $k(\mathbf{x})$, то атрымаем тоеснасць

$$a_1'\alpha_1'^2 + a_2'\alpha_2'^2 + \ldots + a_t'\alpha_t'^2 - a_{t+1}'\alpha_{t+1}'^2 - \ldots - a_r'\alpha_r'^2 \equiv$$
$$\equiv a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2 + \ldots + a_m\alpha_m^2 - a_{m+1}\alpha_{m+1}^2 - \ldots - a_r\alpha_r^2.$$

Разгледзім сістэму аднародных лінейных раўнанняў

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\alpha_j = 0, \quad i = \overline{1, t}.$$

Паколькі колькасць невядомых m больш за колькасць раўнанняў t, то сістэма мае нетрывіяльны развязак $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_m^*$. Будзем лічыць, што $\alpha_{m+1}^*, \alpha_{m+2}^*, \ldots, \alpha_r^*$ роўныя нулю. Калі падставіць гэтыя значэнні каардынат α_i у тоеснасць, то атрымаем

$$-\left(a_{t+1}'\alpha_{t+1}'^2 + a_{t+2}'\alpha_{t+2}'^2 + \ldots + a_r'\alpha_r'^2\right) \equiv$$
$$\equiv a_1\alpha_1^{*2} + a_2\alpha_2^{*2} + \ldots + a_m\alpha_m^{*2}.$$

Правая частка гэтай роўнасці ёсць велічыня дадатная, а левая частка — або адмоўная, або нуль. Такім чынам, атрымалі супярэчнасць таму факту, што $m > t$. Гэта азначае, што $m \leqslant t$. Аналагічна даказваецца няроўнасць $t \leqslant m$. Значыць, $m = t$. ■

4°. Дадатна вызначаныя і адмоўна вызначаныя квадратычныя формы. Даследуем патрэбныя нам квадратычныя формы.

Азначэнне 5.16. *Рэчаісная квадратычная форма* $k(\mathbf{x})$ *называецца дадатна вызначанай (адмоўна вызначанай), калі для кожнага ненулявога вектара* $\mathbf{x}$ *з прасторы* $\mathbf{E}^n$ *выконваецца ўмова* $k(\mathbf{x})>0$ $(k(\mathbf{x})<0)$. *Адпаведная матрыца A квадратычнай формы таксама называецца дадатна вызначанай (адмоўна вызначанай).*

Азначэнне 5.17. *Рэчаісная квадратычная форма* $k(\mathbf{x})$ *называецца неадмоўнай (недадатнай), калі для кожнага вектара* $\mathbf{x}$ *з прасторы* $\mathbf{E}^n$ *выконваецца ўмова* $k(\mathbf{x})\geqslant 0$ $(k(\mathbf{x})\leqslant 0)$. *Адпаведная матрыца A квадратычнай формы называецца дадатна паўвызначанай (адмоўна паўвызначанай).*

Мноства ўсіх дадатна вызначаных (адмоўна вызначаных) формаў з'яўляецца падмноствам мноства ўсіх неадмоўных (адпаведна недадатных) формаў.

Няхай $k(\mathbf{x})$ — неадмоўная квадратычная форма. Знойдзем базіс прасторы $\mathbf{E}^n$, у якім $k(\mathbf{x})$ мае кананічны выгляд:

$$k(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{r} a_i\alpha_i^2.$$

Усе каэфіцыенты a_i абавязаны быць дадатнымі велічынямі. Сапраўды, калі існуе $a_m<0$, $0<m\leqslant r$, то значэнне $k(\mathbf{x})$ для вектара $\mathbf{x}=(\underbrace{0;\ 0;\ \ldots;\ 0}_{m-1};\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ будзе адмоўнай велічынёй, што, згодна з азначэннем 5.17, немагчыма.

У выніку гэтых разважанняў маем, што для неадмоўнай квадратычнай формы дадатны індэкс p роўны рангу, адмоўны індэкс q роўны нулю.

Няхай цяпер $k(\mathbf{x})$ ёсць дадатна вызначаная квадратычная форма. Тады $k(\mathbf{x})$ — неадмоўная форма, а таму $p=r$. Больш таго, у гэтым выпадку $p=n$. Сапраўды, у выпадку $r<n$ значэнне $k(\mathbf{x})$ для ненулявога вектара $\mathbf{x}=(\underbrace{0;\ \ldots;\ 0}_{r};\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ роўнае нулю, што супярэчыць вызначэнню 5.16.

З гэтых разважанняў вынікае ўласцівасць.

1. *Квадратычная форма* $k(\mathbf{x})$ *у прасторы* $\mathbf{E}^n$ *з'яўляецца дадатна вызначанай формай, калі і толькі калі яе ранг і сігнатура супадаюць з памернасцю прасторы* $\mathbf{E}^n$.

Паколькі пры пераходзе ад аднаго базіса да другога знак вызначніка матрыцы квадратычнай формы не змяняецца (ён супадае са знакам здабытку каэфіцыентаў

кананічнага выгляду формы), то можна зрабіць наступную выснову.

2. *Вызначнік матрыцы дадатна вызначанай квадратычнай формы*

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j$$

ёсць велічыня дадатная.

Наступная тэарэма з'яўляецца крытэрам дадатнай вызначанасці квадратычнай формы. У літаратуры ён мае назву *крытэра Сільвэстра**.

Тэарэма 5.17. *Квадратычная форма $k(\mathbf{x})$ ёсць дадатна вызначаная форма, калі і толькі калі ў некаторым базісе* $\mathbf{B}$ *прасторы $\mathbf{E}^n$ галоўныя міноры матрыцы A формы $k(\mathbf{x})$ ёсць дадатныя велічыні.*

□ Неабходнасць. Будзем лічыць, што форма $k(\mathbf{x})$ з'яўляецца дадатна вызначанай. Возьмем некаторы базіс $\mathbf{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ прасторы $\mathbf{E}^n$ і абазначым праз $\mathbf{E}^n$ лінейную абалонку $\mathbf{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k)$, $k \leqslant n$. Разгледзім $k(\mathbf{x})$ на вектарах $\mathbf{x}$ з $\mathbf{E}^k$:

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{i,\, j=1}^{k} a_{ij}\alpha_i\alpha_j.$$

Форма $k(\mathbf{x})$ на падпрасторы $\mathbf{E}^k$ дадатна вызначаная, паколькі яна з'яўляецца такой на ўсёй прасторы $\mathbf{E}^n$. Значыць, на падставе ўласцівасці 2 вызначнік

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0.$$

Вызначнік Δ_k ёсць галоўны мінор парадку k матрыцы A. Неабходнасць даказана.

Дастатковасць. Няхай $\Delta_k > 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Зыходзячы з базіса $\mathbf{B}$, вызначым іншы базіс $\mathbf{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$, у якім форма $k(\mathbf{x})$ мае кананічны выгляд. З гэтай мэтай лічым

---

* *Сільвэстр Джэймс Джозэф* (Sylvester James Joseph, 1814—1897) — англійскі матэматык.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= p_{11}\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_2' &= p_{21}\mathbf{e}_1 + p_{22}\mathbf{e}_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_n' &= p_{n1}\mathbf{e}_1 + p_{n2}\mathbf{e}_2 + \dots + p_{nn}\mathbf{e}_n. \end{aligned}\right\} \quad (5.56)$$

Для таго каб $k(\mathbf{x})$ мела кананічны выгляд у базісе $\mathbf{B}'$, дастаткова, каб для кожнага $k=\overline{2, n}$ мелі месца роўнасці:

$$b(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_k') = a_{ik}' = 0, \ i = \overline{1, k-1},$$

дзе $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ёсць білінейная форма, адпаведная $k(\mathbf{x})$. На падставе азначэнняў вектараў $\mathbf{e}_i'$ маем:

$$b(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_k') = b(p_{i1}\mathbf{e}_1 + p_{i2}\mathbf{e}_2 + \dots + p_{ii}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k') = \sum_{j=1}^{i} p_{ij} b(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k') = 0.$$

Адсюль вынікае, што дастаткова, каб мелі месца роўнасці

$$b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k') = 0, \ i = \overline{1, k-1}, \ k = \overline{2, n}. \quad (5.57)$$

Цяпер вызначым каэфіцыенты p_{ij}. Для спрашчэння вызначэння p_{ij} да ўмоваў (5.57) далучыць роўнасць $b(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k') = 1$. Няхай $k=1$. Тады з умовы $b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1') = 1$ атрымаем $p_{11} = 1/a_{11}$. Калі лічыць $\Delta_0 = 1$, то $p_{11} = \Delta_0/\Delta_1$. Няхай мы ўжо вызначылі каэфіцыенты p_{ij}, якія ўваходзяць у першыя $k-1$ радкоў сістэмы (5.56). Тады для вызначэння каэфіцыентаў p_{kj}, $j = \overline{1, k}$, атрымліваем сістэму раўнанняў:

$$b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_k') = 0, \ b(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_k') = 0, \ \dots, \ b(\mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_k') = 0, \ b(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k') = 1.$$

Яе каардынатная форма запісу мае выгляд

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_{k1} + a_{12}p_{k2} + \dots + a_{1k}p_{kk} &= 0, \\ a_{21}p_{k1} + a_{22}p_{k2} + \dots + a_{2k}p_{kk} &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k-1\,1}p_{k1} + a_{k-1\,2}p_{k2} + \dots + a_{k-1\,k}p_{kk} &= 0, \\ a_{k1}p_{k1} + a_{k2}p_{k2} + \dots + a_{kk}p_{kk} &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (5.58)$$

Вызначнік матрыцы сістэмы $\Delta_k > 0$, а таму, згодна з правілам Крамэра, сістэма мае адзіны развязак, які вызначае патрэбныя нам каэфіцыенты.

Пакажам, што матрыца пераходу P з'яўляецца незвыроднай. Дзеля гэтага, згодна з правілам Крамэра, вылічым для сістэмы (5.58)

$$p_{kk}=\frac{1}{\Delta_k}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,k-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,k-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \dots & a_{k-1\,k-1} & 0 \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{k\,k-1} & 1 \end{vmatrix}=\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$

Паколькі матрыца P з'яўляецца трохвугольнай, то яе вызначнік

$$|P|=p_{11}p_{22}\cdots p_{nn}=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\,\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\cdots\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}=\frac{1}{\Delta_n}\neq 0.$$

Матрыца P^T ёсць матрыца пераходу ад базіса $\mathbf{B}$ да $\mathbf{B}'$, таму яе слупкі з'яўляюцца каардынатамі вектараў $\mathbf{e}'_i$, $i=\overline{1,\,n}$, у базісе $\mathbf{B}$. Знойдзем каэфіцыенты матрыцы квадратычнай формы ў базісе $\mathbf{B}'$:

$$a'_{kk}=b(\mathbf{e}'_k,\ \mathbf{e}'_k)=b\left(\sum_{j=1}^{k}p_{kj}\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}'_k\right)=\sum_{j=1}^{k}p_{kj}b(\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}'_k)=$$

$$=p_{kk}b(\mathbf{e}_k,\ \mathbf{e}'_k)=p_{kk}=\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k},\quad k=\overline{1,\,n}.$$

Значыць, у базісе $\mathbf{B}'$

$$k(\mathbf{x})=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\alpha_1'^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\alpha_2'^2+\dots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\alpha_n'^2.$$

Паколькі ўсе $\Delta_k>0$, $k=\overline{0,\,n}$, то $k(\mathbf{x})$ з'яўляецца дадатна азначанай квадратычнай формай. ■

Крытэр адмоўнай вызначанасці квадратычнай формы $k(\mathbf{x})$ вынікае з тэарэмы 5.17, калі яе скарыстаць да формы $-k(\mathbf{x})$.

Тэарэма 5.18. *Квадратычная форма $k(\mathbf{x})$ ёсць адмоўна вызначаная, калі і толькі калі ў некаторым базісе* $\mathbf{B}$ *прасторы* $\mathbf{E}^n$ *галоўныя міноры матрыцы A формы $k(\mathbf{x})$ задавальняюць няроўнасці:* $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3<0$, …, $(-1)^n\Delta_n>0$.

5°. Даследаванне раўнання паверхняў другога парадку. Будзем разглядаць агульнае раўнанне паверхняў другога парадку

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a_0 = 0, \qquad (5.59)$$

дзе адзін з каэфіцыентаў a_{ij} няроўны нулю. Гэтае раўнанне звязвае каардынаты $(x_1;\ x_2;\ x_3)$ пункта прасторы ў некаторай дэкартавай прамавугольнай сістэме каардынат $\{O;\ \mathbf{i}_1,\ \mathbf{i}_2,\ \mathbf{i}_3\}$, дзе O ёсць пачатак сістэмы, $\{\mathbf{i}_1,\ \mathbf{i}_2,\ \mathbf{i}_3\}$ — ортаўнармаваны базіс.

У § 4.4 мы разглядалі прыватныя выпадкі раўнання (5.59) пры $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Там жа мы адзначалі, што для кожнага раўнання (5.59), калі яно вызначае паверхню, у прасторы A^3 можна знайсці дэкартаву прамавугольную сістэму каардынат $\{O';\ \mathbf{i}'_1,\ \mathbf{i}'_2,\ \mathbf{i}'_3\}$, у якой раўнанне (5.59) супадае з адным з кананічных раўнанняў. У гэтым пункце мы абгрунтуем такое сцверджанне.

Будзем разглядаць квадратычную форму $k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j$, якая прысутнічае ў левай частцы раўнання (5.59). На падставе тэарэмы 5.16 у прасторы $\mathbf{E}^3$ існуе ортаўнармаваны базіс $\{\mathbf{i}'_1,\ \mathbf{i}'_2,\ \mathbf{i}'_3\}$ з уласных вектараў матрыцы квадратычнай формы, такі, што

$$k(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^{(1)^2} + \lambda_2 x_2^{(1)^2} + \lambda_3 x_3^{(1)^2},$$

дзе $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ ёсць уласныя значэнні матрыцы, ■

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} p_{ij} x_j^{(1)}$$

ёсць формулы пераўтварэння каардынат пры пераходзе ад базіса $\{\mathbf{i}_1,\ \mathbf{i}_2,\ \mathbf{i}_3\}$ да $\{\mathbf{i}'_1,\ \mathbf{i}'_2,\ \mathbf{i}'_3\}$. Паколькі базісы з'яўляюцца ортаўнармаванымі, то матрыца пераходу $P = (p_{ij})$ з'яўляецца артаганальнай.

У сістэме каардынат $\{O;\ \mathbf{i}'_1,\ \mathbf{i}'_2,\ \mathbf{i}'_3\}$ раўнанне (5.59) будзе мець выгляд

$$\lambda_1 x_1^{(1)^2} + \lambda_2 x_2^{(1)^2} + \lambda_3 x_3^{(1)^2} + 2\sum_{i=1}^{3} a_i^{(1)} x_i^{(1)} + a_0 = 0. \qquad (5.60)$$

Скарыстаем яшчэ перанос пачатку сістэмы каардынат і разгледзім змяненні каэфіцыентаў раўнання (5.60) пры пераносе пункта O у некаторы пункт $O'(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3)$ прасто-

ры. Формулы пераўтварэння каардынат будуць мець выгляд

$$x_i^{(1)} = x_i^{(2)} + \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

дзе $(x_1^{(2)}; x_2^{(2)}; x_3^{(2)})$ ёсць каардынаты пункта ў сістэме $(O'; \mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3\}$. Падстаўляючы гэтыя формулы ў стасунак (5.60), атрымаем раўнанне

$$\lambda_1 x_1^{(2)^2} + \lambda_2 x_2^{(2)^2} + \lambda_3 x_3^{(2)^2} + \\ + 2\sum_{i=1}^{3} (\alpha_i \lambda_i + a_i^{(1)}) x_i^{(2)} + a_0^{(1)} = 0. \qquad (5.61)$$

Аналізуючы яго, прыходзім да наступнай уласцівасці.

1. *Калі ў раўнанне (5.60) уваходзіць з ненулявым каэфіцыентам квадрат адной з каардынат, то з дапамогай пераноса пачатку сістэмы каардынат уздоўж адпаведнай восі можна зрабіць нулявым каэфіцыент пры першай ступені гэтай каардынаты.*

□ Сапраўды, з роўнасці $\alpha_i \lambda_i + a_i^{(1)} = 0$ вынікае, што пры $\lambda_i \neq 0$ каардыната $\alpha_i = -a_i^{(1)}/\lambda_i$. ■

Абазначым праз r і σ адпаведна ранг і модуль сігнатуры квадратычнай формы $k(\mathbf{x})$. Разгледзім розныя магчымасці для каэфіцыентаў раўнання (5.61).

1°. Няхай $r = 3$. Тады на падставе уласцівасці 1 пачатак сістэмы каардынат можа быць перанесены ў такі пункт, што раўнанне (5.61) набудзе выгляд

$$\lambda_1 x_1^{(2)^2} + \lambda_2 x_2^{(2)^2} + \lambda_3 x_3^{(2)^2} + a_0^{(1)} = 0. \qquad (5.62)$$

Аналізуючы яго, прыходзім да высновы, што раўнанне (5.62) у выпадку, калі $a_0^{(1)} = 0$, вызначае канічную паверхню, якая пры $\sigma = 3$ выраджаецца ў пункт $O'(0; 0; 0)$. Пры $\sigma = 1$ (адзін з λ_i адрозніваецца знакам ад двух іншых) раўнанне канічнай паверхні мае выгляд

$$\frac{x_1^{(2)^2}}{a^2} + \frac{x_2^{(2)^2}}{b^2} - \frac{x_3^{(2)^2}}{c^2} = 0.$$

Гэта кананічнае раўнанне конуса другога парадку. У выпадку, калі $a_0^{(1)} \neq 0$, раўнанне (5.62) мае выгляд

$$\frac{-\lambda_1}{a_0^{(1)}} x_1^{(2)^2} - \frac{\lambda_2}{a_0^{(1)}} x_2^{(2)^2} - \frac{\lambda_3}{a_0^{(1)}} x_3^{(2)^2} = 1. \qquad (5.63)$$

Пры ўмове, што $\sigma = 3$, гэтае раўнанне можа або не з'яўляцца раўнаннем паверхні (знак $a_0^{(1)}$ супадае са знакам λ_1), або мець кананічны выгляд

$$\frac{x_1^{(2)^2}}{a^2}+\frac{x_2^{(2)^2}}{b^2}+\frac{x_3^{(2)^2}}{c^2}=1,$$

які вызначае эліпсоід.

Пры ўмове, што $\sigma=1$ (знак аднаго з λ_i, напрыклад λ_3, процілеглы знаку двух іншых λ_1, λ_2), раўнанне (5.63) набывае выгляд

$$\frac{x_1^{(2)^2}}{a^2}+\frac{x_2^{(2)^2}}{b^2}-\frac{x_3^{(2)^2}}{c^2}=\pm 1, \qquad (5.64)$$

дзе знак «плюс» у правай частцы раўнання адпавядае выпадку аднолькавых знакаў $a_0^{(1)}$ і λ_3, ▪ знак «мінус» — розным знакам $a_0^{(1)}$ і λ_3. Раўнанне (5.64) ёсць кананічнае раўнанне аднапаласцевага або дзвюхпаласцевага гіпербалоіда адпаведна.

2°. Няхай цяпер $r=2$. У раўнанні (5.61) адзін з каэфіцыентаў λ_i роўны нулю. Увогуле можна лічыць, што $\lambda_3=0$. Тады на падставе ўласцівасці 1 раўнанне (5.61) можна прывесці да выгляду

$$\lambda_1 x_1^{(2)^2}+\lambda_2 x_2^{(2)^2}+2a_3^{(1)}x_3^{(2)}+a_0^{(1)}=0. \qquad (5.65)$$

Аналізуючы яго, прыходзім да высновы, што пры $a_3^{(1)}=0$ у левай частцы раўнання (5.65) не прысутнічае зменная $x_3^{(2)}$, а таму, згодна з тэарэмай 4.13, раўнанне (5.65) вызначае цыліндрычную паверхню, утваральныя якой паралельныя вектару $\mathbf{i}_3'$. У залежнасці ад значэнняў λ_1, λ_2 раўнанне (5.65) таксама можа набываць выгляд кожнага кананічнага раўнання цыліндраў другога парадку, пералічаных у пункце 2° § 4.4. Адзначым, што кананічнае раўнанне пары перасякальных плоскасцяў таксама вынікае з раўнання (5.65).

Калі $a_3^{(1)}\neq 0$, то раўнанне (5.65) можна запісаць у выглядзе

$$\lambda_1 x_1^{(2)^2}+\lambda_2 x_2^{(2)^2}+2a_3^{(1)}(x_3^{(2)}+a_0^{(1)}/2a_3^{(1)})=0.$$

Гэта паказвае, што пераносам пачатку сістэмы каардынат, згодна з формуламі $x_1^{(2)}=x_1^{(3)}$, $x_2^{(2)}=x_2^{(3)}$, $x_3^{(2)}=x_3^{(3)}-a_0^{(1)}/2a_3^{(1)}$, апошняе раўнанне можа быць пададзена ў выглядзе

$$\lambda_1 x_1^{(3)^2}+\lambda_2 x_2^{(3)^2}+2a_3^{(1)}x_3^{(3)}=0. \qquad (5.66)$$

Тут магчымы два зыходы: $\sigma=2$ і $\sigma=0$.

Калі $\sigma=2$ (λ_1, λ_2 маюць аднолькавыя знакі), то,

пераходзячы пры неабходнасці ад базіса $\{\mathbf{i}_1', \mathbf{i}_2', \mathbf{i}_3'\}$ да $\{\mathbf{i}_1', \mathbf{i}_2', -\mathbf{i}_3'\}$, мы пераўтворым раўнанне (5.66) да выгляду

$$\frac{x_1^{(3)^2}}{a^2}+\frac{x_2^{(3)^2}}{b^2}=2x_3^{(3)},$$

які вызначае эліптычны парабалоід.

Калі $\sigma=0$ (λ_1, λ_2 маюць розныя знакі), раўнанне (5.66) зводзіцца да кананічнага раўнання гіпербалічнага парабалоіда

$$\frac{x_1^{(3)^2}}{a^2}-\frac{x_2^{(3)^2}}{b^2}=2x_3^{(3)}.$$

3°. На даканчанне няхай $r=1$. Базісныя вектары $\{\mathbf{i}_1', \mathbf{i}_2', \mathbf{i}_3'\}$ упарадкуем такім чынам, каб раўнанне (5.60) мела выгляд

$$\lambda_1 x_1^{(1)^2}+2a_1^{(1)}x_1^{(1)}+2a_2^{(1)}x_2^{(1)}+2a_3^{(1)}x_3^{(1)}+a_0=0.$$

Апошняе раўнанне на падставе ўласцівасці 1 можа быць пераўтворана ў раўнанне

$$\lambda_1 x_1^{(2)^2}+2a_2^{(1)}x_2^{(2)}+2a_3^{(1)}x_3^{(2)}+a_0^{(1)}=0. \qquad (5.67)$$

Калі ў раўнанні (5.67) каэфіцыенты $a_2^{(1)}=a_3^{(1)}=0$, то ў яго левай частцы прысутнічае толькі зменная $x_1^{(2)}$. Таму раўнанне (5.67) можа быць толькі кананічным раўнаннем пары паралельных плоскасцяў.

У выпадку, калі хоць адзін з каэфіцыентаў $a_2^{(1)}$, $a_3^{(1)}$ няроўны нулю, пераходзім ад базіса $\{\mathbf{i}_1', \mathbf{i}_2', \mathbf{i}_3'\}$ да базіса $\{\mathbf{i}_1', \mathbf{i}_2'', i_3''\}$, згодна з формуламі пераўтварэння каардынат:

$$x_1^{(2)}=x_1^{(3)},\ \ x_2^{(2)}=(a_2^{(1)}x_2^{(3)}+a_3^{(1)}x_3^{(3)})\mu,\ \ x_3^{(2)}=(a_3^{(1)}x_2^{(3)}-a_2^{(1)}x_3^{(3)})\mu,$$

дзе $\mu=1/\sqrt{a_2^{(1)^2}+a_3^{(1)^2}}$. У выніку раўнанне (5.67) будзе мець выгляд

$$\lambda_1 x_1^{(3)^2}+2\frac{1}{\mu}x_2^{(3)}+a_0^{(1)}=0.$$

З дапамогай пераносу пачатку сістэмы каардынат, згодна з формуламі:

$$x_1^{(3)}=x_1^{(4)},\quad x_2^{(3)}=x_2^{(4)}-a_0^{(1)}\mu/2,\quad x_3^{(3)}=x_3^{(4)},$$

пераўторым яго ў раўнанне

$$\lambda_1 x_1^{(4)^2}+2\frac{1}{\mu}x_2^{(4)}=0.$$

Гэтае раўнанне зводзіцца да кананічнага раўнання парабалічнага цыліндра.

Прыклад 5.2. Вызначыць тып паверхні другога парадку

$$x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y-10z=0.$$

▷ Разгледзім квадратычную форму раўнання паверхні

$$k(\mathbf{x})=x_1^2+5x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3.$$

Матрыца квадратычнай формы ў зыходнай сістэме каардынат мае выгляд

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Знойдзем развязкі характарыстычнага раўнання

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 3\\ 1 & 5-\lambda & 1\\ 3 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

або, тое сама,

$$\lambda^3-7\lambda^2+36=0. \quad (5.68)$$

Раскладваючы левую частку раўнання на множнікі, будзем мець

$$(\lambda^3+8)-7(\lambda^2-4)=(\lambda+2)(\lambda^2-9\lambda+18).$$

З гэтага выразу вынікае, што адзін развязак раўнання (5.68) ёсць $\lambda=-2$, а іншыя — развязкі квадратовага раўнання $\lambda^2-9\lambda+18=0$. Вызначыўшы іх, атрымаем, што характарыстычнымі значэннямі матрыцы A з'яўляюцца лікі 6, 3 і -2. Для кожнага з гэтых значэнняў знойдзем уласныя адзінкавыя вектары.

Пры $\lambda=6$ сістэма (5.44) будзе мець выгляд

$$\left.\begin{aligned}-5\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3&=0,\\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3&=0,\\ 3\alpha_1+\alpha_2-5\alpha_3&=0.\end{aligned}\right\}$$

Развязкам сістэмы з'яўляюцца каардынаты адзінкавага вектара $\mathbf{i}_1'=(1/\sqrt{6};\ 2/\sqrt{6};\ 1/\sqrt{6})$.

Пры $\lambda=3$ сістэма (5.44) мае выгляд

$$\left.\begin{aligned}-2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3&=0,\\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3&=0,\\ 3\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3&=0,\end{aligned}\right\}$$

а яе развязкам з'яўляюцца каардынаты адзінкавага вектара $\mathbf{i}_2'=(1/\sqrt{3};\ -1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3})$.

Нарэшце, пры $\lambda=-2$ атрымаем сістэму

$$\left.\begin{array}{r}3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0,\\ \alpha_1+7\alpha_2+\alpha_3=0,\\ 3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0\end{array}\right\}$$

і адзінкавы вектар $\mathbf{i}_3'=(1/\sqrt{2};\ 0;\ -1/\sqrt{2})$.

Матрыца

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

ёсць матрыца пераходу ад зыходнага базіса $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ да базіса $\{\mathbf{i}_1', \mathbf{i}_2', \mathbf{i}_3'\}$, у якім квадратычная форма $k(\mathbf{x})$ мае кананічны выгляд

$$k(\mathbf{x})=6x_1^{(1)^2}+3x_2^{(1)^2}-2x_3^{(1)^2}.$$

Запішам адпаведныя гэтаму пераходу формулы пераўтварэння каардынат:

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{6}}x_1^{(1)}+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2^{(1)}+\frac{1}{\sqrt{2}}x_3^{(1)};$$
$$x_2=\frac{2}{\sqrt{6}}x_1^{(1)}-\frac{1}{\sqrt{3}}x_2^{(1)};$$
$$x_3=\frac{1}{\sqrt{6}}x_1^{(1)}+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2^{(1)}-\frac{1}{\sqrt{2}}x_3^{(1)}.$$

Калі лічыць, што $x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$, то ў сістэме $\{O;\ \mathbf{i}_1', \mathbf{i}_2', \mathbf{i}_3'\}$ раўнанне паверхні будзе мець выгляд

$$6x_1^{(1)^2}+3x_2^{(1)^2}-2x_3^{(1)^2}-\frac{18}{\sqrt{3}}x_2^{(1)}+\frac{8}{\sqrt{2}}x_3^{(1)}=0.$$

Паколькі гэтае раўнанне задавальняе ўласцівасць 1, то, здзяйсняючы перанос пачатку сістэмы каардынат у пункт $O'(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3)$, дзе $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\sqrt{3}$, $\alpha_3=-\sqrt{2}$, атрымаем раўнанне паверхні ў сістэме $\{O';\ \mathbf{i}_1', \mathbf{i}_2', \mathbf{i}_3'\}$:

$$\frac{x_1^{(2)^2}}{7/2}+\frac{x_2^{(2)^2}}{7}-\frac{x_3^{(2)^2}}{21/2}=1,$$

якое раўназначна кананічнаму раўнанню аднаполасцевага гіпербалоіда. Цэнтр сіметрыі гіпербалоіда знаходзіцца ў пункце O', а восі сіметрыі ёсць прамыя, якія праходзяць праз O' і маюць кіроўныя вектары $\mathbf{i}_1'$, $\mathbf{i}_2'$, $\mathbf{i}_3'$. ◀

6. ТЭОРЫЯ ЛІМІТАЎ. НЕПАРЫЎНАСЦЬ ФУНКЦЫЙ

Паняцце ліміта ёсць адно з самых важных паняццяў матэматычнага аналізу. У гэтым раздзеле разглядаецца спачатку лімітавы пераход, які грунтуецца на паняцці лікавай паслядоўнасці, вывучаюцца розныя тыпы паслядоўнасцяў і іх уласцівасці. Потым азначаюцца ліміты функцыі адной зменнай і падаецца паняцце непарыўнасці функцыі.

Значнае месца адводзіцца вывучэнню ўласцівасцяў непарыўных функцый і доказу непарыўнасці так званых элементарных функцый.

6.1. ЛІКАВЫЯ ПАСЛЯДОЎНАСЦІ

1°. Лікавыя паслядоўнасці і дзеянні з імі. Няхай **N** абазначае, як і раней, множства натуральных лікаў, а праз X будзем абазначаць бясконцае множства, элементамі якога з'яўляюцца рэчаісныя лікі.

Калі кожнаму $n \in \mathbf{N}$ пастаўлены ў адпаведнасць пэўны элемент $x_n \in X$, то кажуць, што зададзена *лікавая паслядоўнасць*, і пішуць:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots . \qquad (6.1)$$

Лікі x_n, $n \in \mathbf{N}$, называюцца *элементамі* ці *значэннямі паслядоўнасці*. Карацей лікавую паслядоўнасць (6.1) запісваюць у выглядзе (x_n) або $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, і выраз x_n называюць *агульным элементам паслядоўнасці*.

У сярэдняй школе мы сустракаліся з бясконцай геаметрычнай прагрэсіяй (q^n), $|q| < 1$, якая, вядома, з'яўляецца лікавай паслядоўнасцю $1, q, \ldots, q^n, \ldots$. У якасці іншых простых прыкладаў пададзім лікавыя паслядоўнасці:

$$(n^2):\ 1^2, 2^2, \ldots, n^2, \ldots,$$
$$\left(\frac{1}{n}\right):\ 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots . \qquad (6.2)$$

У некаторых выпадках паслядоўнасць (x_n) задаецца з дапамогай рэкурэнтнай формулы, напрыклад $x_1=\sqrt{a}$, $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$, $n\geqslant 2$, $n\in\mathbf{N}$.

Азначым арыфметычныя дзеянні з лікавымі паслядоўнасцямі. *Сумай лікавых паслядоўнасцяў* (x_n) *і* (y_n) называецца лікавая паслядоўнасць (x_n+y_n), а *рознiцай* — паслядоўнасць з агульным элементам x_n-y_n. *Здабыткам* і *дзеллю лікавых паслядоўнасцяў* (x_n) *і* (y_n) называюць адпаведна паслядоўнасці:

$$x_1y_1,\ x_2y_2,\ \ldots,\ x_ny_n,\ \ldots,$$

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \ldots,\ \frac{x_n}{y_n},\ \ldots,$$

пры азначэнні дзелі паслядоўнасцяў лічым, што элементы паслядоўнасці (y_n) адрозніваюцца ад нуля.

Азначэнне 6.1. *Лікавая паслядоўнасць* (x_n) *называецца абмежаванай зверху (знізу), калі існуе такі лік* M_1 (M_2), *што выконваецца няроўнасць*

$$x_n\leqslant M_1\quad (x_n\geqslant M_2)\quad \forall n\in\mathbf{N},$$

і называецца абмежаванай, калі існуе такі лік M, *што выконваецца няроўнасць*

$$|x_n|\leqslant M\quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

Відавочна, што абмежаваная зверху і знізу паслядоўнасць з'яўляецца абмежаванай.

Вяртаючыся да прыкладаў, запісаных пад нумарам (6.2), заўважым, што першая паслядоўнасць не з'яўляецца абмежаванай, а другая — абмежаваная: у якасці M можна ўзяць $M=1$.

Калі мець на ўвазе ілюстрацыю лікавай паслядоўнасці на лікавай прамой, то патрэбна заўважыць, што элементы абмежаванай паслядоўнасці будуць знаходзіцца на адрэзку $[-M, M]$. Элементы (x_n) неабмежаванай лікавай паслядоўнасці не могуць змясціцца ні ў якім адрэзку.

Калі з лікавай паслядоўнасці (6.1) выключыць некалькі элементаў, то атрымаецца нейкая новая паслядоўнасць. Мы будзем асабліва вылучаць лікавую паслядоўнасць

$$x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots,\ x_{n+k},\ \ldots,\quad n\in\mathbf{N},$$

называючы яе *n-й астачай паслядоўнасці (6.1)*. Зразумела, што неабходнай і дастатковай умовай абмежаванасці

паслядоўнасці (6.1) з'яўляецца абмежаванасць яе астачы пры некаторым n, $n \in \mathbf{N}$.

2°. Бясконца малыя паслядоўнасці і іх уласцівасці. Сярод лікавых паслядоўнасцяў вылучаюць на пачатку паслядоўнасці (x_n), значэнні x_n якіх для вялікіх нумароў n даволі малыя.

Азначэнне 6.2. *Лікавая паслядоўнасць* (α_n) *называецца бясконца малой паслядоўнасцю (БМП), калі для кожнага дадатнага ліку* ε *існуе рэчаісны лік* $R = R(\varepsilon)$, *такі, што пры ўсіх* $n > R(\varepsilon)$ *выконваецца няроўнасць*

$$|\alpha_n| < \varepsilon. \qquad (6.3)$$

Заўвага 6.1. Унясем фармальную змену ў азначэнне 6.2, не мяняючы яго сутнасці. Будзем казаць, што паслядоўнасць (α_n) ёсць БМП, калі $\forall \varepsilon_1 > 0$ $\exists R = R(\varepsilon)$, што $\forall n > R(\varepsilon_1)$

$$|\alpha_n| < M\varepsilon_1, \qquad (6.4)$$

дзе M — сталы дадатны лік, які не залежыць ад ε_1 і n. Калі ўзяць $\varepsilon_1 = \varepsilon/M$ і $R = R(\varepsilon/M)$, то з няроўнасці (6.4) вынікае судачыненне (6.3).

Разгледзім цяпер *уласцівасці бясконца малых паслядоўнасцяў.*

1. *Бясконца малая паслядоўнасць* (α_n) *ёсць абмежаваная паслядоўнасць.*

□ Сапраўды, пры $\varepsilon = 1$ для ўсіх n, $n > R(1)$, на падставе азначэння 6.2 будзем мець $|\alpha_n| < 1$; гэта азначае, што n-я астача абмежаваная. Паколькі мноства, утворанае канечнай колькасцю элементаў

$$\{1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \quad n \leqslant R(1),$$

ёсць абавязкова абмежаванае, то і ўся паслядоўнасць ёсць абмежаваная, інакш кажучы, з абмежаванасці астачы паслядоўнасці вынікае абмежаванасць самой паслядоўнасці. ■

2. *Сума канечнай колькасці бясконца малых паслядоўнасцяў ёсць БМП.*

□ Дастаткова даказаць уласцівасць для сумы двух БМП. Няхай (α_n) і (β_n) ёсць БМП. У такім разе, згодна з азначэннем 6.2, для кожнага $\varepsilon > 0$ існуюць такія лікі $R_1(\varepsilon)$ і $R_2(\varepsilon)$, што для ўсіх $n > R_1(\varepsilon)$ выконваецца няроўнасць $|\alpha_n| < \varepsilon$ і для ўсіх $n > R_2(\varepsilon)$ маем $|\beta_n| < \varepsilon$.

Абазначым праз $R_3(\varepsilon)$ большы з двух лікаў $R_1(\varepsilon)$ і $R_2(\varepsilon)$:

$$R_3(\varepsilon) = \max\{R_1(\varepsilon), R_2(\varepsilon)\}.$$

Тады пры $n > R_3(\varepsilon)$ будзем мець няроўнасці

$$|\alpha_n+\beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < 2\varepsilon,$$

якія, згодна з заўвагай 6.1, азначаюць, што паслядоўнасць $(\alpha_n+\beta_n)$ ёсць БМП. ■

3. *Здабытак БМП і абмежаванай паслядоўнасці ёсць БМП.*

□ На самай справе, калі (α_n) ёсць БМП і (β_n) абмежаваная паслядоўнасць, то, згодна з азначэннямі 6.1 і 6.2, для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе такі лік $R(\varepsilon)$, што для ўсіх $n > R(\varepsilon)$ справядліва $|\alpha_n| < \varepsilon$, і пры ўсіх $n \in \mathbf{N}$ выконваецца няроўнасць $|b_n| \leqslant M$. Пасля множання гэтых няроўнасцяў атрымаем няроўнасць

$$|\alpha_n b_n| \leqslant M\varepsilon \quad \forall n > R(\varepsilon),$$

якая з улікам заўвагі 6.1 азначае, што $(\alpha_n b_n)$ ёсць БМП. ■

Заўважым, што з уласцівасцяў 2 і 3 адразу вынікае сцверджанне: *алгебраічная сума канечнай колькасці бясконца малых паслядоўнасцяў ёсць БМП.*

4. *Здабытак некалькіх БМП ёсць БМП.*

□ Уласцівасць вынікае, відавочна, з уласцівасцяў 1 і 3. ■

5. *Калі БМП мае сталае значэнне* α, *то* $\alpha=0$.

□ Сапраўды, для кожнага дадатнага ліку ε будзем мець няроўнасць $|\alpha| < \varepsilon$. Калі дапусціць адваротнае $\alpha \neq 0$, то пры $\varepsilon = |\alpha|/2$ атрымаем $|\alpha| < |\alpha|/2$, што немагчыма. ■

6.2. ЛІМІТ ПАСЛЯДОЎНАСЦІ

1°. Збежныя лікавыя паслядоўнасці. Сфармулюем асноўнае азначэнне.

Азначэнне 6.3. *Лік a называецца лімітам лікавай паслядоўнасці (a_n), калі паслядоўнасць $(\alpha_n)=(a_n-a)$ ёсць бясконца малая. Сама паслядоўнасць (a_n) называецца ў такім разе збежнай.*

Для абазначэння ліміта ўжываецца запіс $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, які чытаецца так: «$a$ ёсць ліміт a_n, калі n імкнецца да бясконцасці». Карыстаюцца таксама запісам $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, які чытаюць: «$a_n$ імкнецца да a, калі n імкнецца да бясконцасці».

Самым простым прыкладам збежнай паслядоўнасці з'яўляецца БМП. Яе ліміт на падставе азначэння 6.3 роўны нулю, інакш тое сама выражаецца запісам $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Акрамя азначэння 6.3, мы будзем карыстацца таксама іншым, больш канструктыўным, азначэннем ліміту, якое атрымліваецца пасля ўліку азначэння БМП і заўвагі 6.1.

Азначэнне 6.4. *Лік a называецца лімітам лікавай паслядоўнасці (a_n), калі для кожнага дадатнага ліку ε існуе такі рэчаісны лік $R=R(\varepsilon)$, што пры ўсіх $n>R(\varepsilon)$ выконваецца няроўнасць*

$$|a_n-a|<M\varepsilon, \tag{6.5}$$

дзе лік M не залежыць ад n і ε.

Няроўнасць (6.5) азначае, што для $n>R(\varepsilon)$ праўдзіцца судачыненне

$$a-M\varepsilon<a_n<a+M\varepsilon,$$

інакш кажучы, пры даволі вялікіх n усе элементы n-й астачы збежнай паслядоўнасці знаходзяцца ў $(M\varepsilon)$-акрузе свайго ліміту. Відавочна, што тым нумарам n, для якога элементы $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k}, \ldots, k\in \mathbf{N}$, знаходзяцца ў інтэрвале $(a-M\varepsilon, a+M\varepsilon)$, з'яўляецца натуральны лік $n(\varepsilon)=[R(\varepsilon)]$. Заўважым таксама, што азначэнні 6.3 і 6.4 раўназначныя.

З дапамогай азначэння 6.4 абгрунтоўваюцца ліміты для найбольш простых паслядоўнасцяў.

Напрыклад, праверым, што

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+1}{n^2+n}=2.$$

Маем відавочныя няроўнасці:

$$\left|\frac{2n^2-n+1}{n^2+n}-2\right|=\left|\frac{-3n+1}{n^2+n}\right|<\frac{3n-1}{n^2}=\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}<\frac{3}{n}<\varepsilon.$$

Значыць, пры $n>\frac{3}{\varepsilon}=R(\varepsilon)$ будзем мець патрэбную ε-няроўнасць выгляду (6.5).

2°. Уласцівасці збежных паслядоўнасцяў. *Выкананне лімітавых пераходаў у паслядоўнасцях грунтуецца на наступных уласцівасцях.*

1. *Збежная паслядоўнасць мае толькі адзін ліміт.*

☐ Сапраўды, калі $a_n-a=\alpha_n$ і $a_n-b=\beta_n$, то пасля адымання будзем мець роўнасць $b-a=\alpha_n-\beta_n$, дзе правая частка ёсць элемент БМП, а левая частка мае сталае значэнне $b-a$. Тады на падставе ўласцівасці 5 для БМП

прыходзім да высновы, што $b-a=0$ ці, тое сама, $a=b$. ■

2. *Збежная паслядоўнасць ёсць абмежаваная паслядоўнасць.*

□ Досыць заўважыць, што на аснове азначэння 6.3

$$|a_n|=|a+\alpha_n|\leqslant|a|+|\alpha_n|,$$

і скарыстаць уласцівасць 1 для БМП. ■

Заўвага 6.2. Наадварот, абмежаваная паслядоўнасць неабавязкова павінна быць збежнай. Напрыклад, паслядоўнасць $(a_n)=((-1)^n)$ ёсць абмежаваная, але яна не з'яўляецца збежнай. Сапраўды, у выпадку існавання такога ліку a, што $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, абедзве паслядоўнасці (a_n-a) і $(a_{n+1}-a)$ павінны быць бясконца малымі паслядоўнасцямі, згодна з азначэннем 6.3. У такім разе на падставе ўласцівасці 2 для БМП вынікае, што і розніца

$$(a_n-a)-(a_{n+1}-a)=(a_n-a_{n+1})$$

ёсць БМП, але апошняе немагчыма, паколькі пры адвольным n, $n\in\mathbf{N}$,

$$|a_n-a_{n+1}|=|(-1)^n-(-1)^{n+1}|=2.$$

3. *Ліміт сумы (розніцы) збежных паслядоўнасцяў роўны суме (розніцы) іх лімітаў:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n.$$

□ Калі $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, то, зыходзячы з азначэння 6.3, маем: $a_n-a=\alpha_n$, $b_n-b=\beta_n$, дзе (α_n) і (β_n) ёсць БМП. Пасля складання атрымліваем

$$a_n+b_n-(a+b)=\alpha_n+\beta_n. \tag{6.6}$$

Паслядоўнасць $(\alpha_n+\beta_n)$ ёсць БМП на падставе ўласцівасці 2 для бясконца малых паслядоўнасцяў і, значыць, роўнасць (6.6) раўназначная таму, што

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n. \ ■$$

4. *Здабытак збежных паслядоўнасцяў ёсць збежная паслядоўнасць, і ліміт здабытку роўны здабытку лімітаў:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right).$$

□ На самай справе, калі $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, то зноў можна запісаць: $a_n=a+\alpha_n$, $b_n=b+\beta_n$, дзе (α_n) і (β_n) ёсць бясконца малыя паслядоўнасці. Адпаведна атрымаем

$$a_n b_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n). \qquad (6.7)$$

Паводле ўласцівасцяў 2, 3 і 4 для БМП паслядоўнасць $(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$ ёсць БМП, і роўнасць (6.7), згодна з азначэннем 6.3, прыводзіць да неабходнай роўнасці.

5. *Пры дзяленні дзвюх збежных паслядоўнасцяў (a_n) і (b_n), дзе $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, атрымліваецца збежная паслядоўнасць, прычым*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

□ Па-першае, заўважым, што калі $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, то з дапамогай азначэння 6.4 атрымліваем, што, пачынаючы з некаторага n, выконваецца няроўнасць

$$|b_n - b| < |b|/2,$$

адкуль вынікае адразу $|b_n| > |b|/2$. З улікам апошняй няроўнасці будзем мець:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b-b_n|}{|b_n||b|} \leqslant \frac{2|b-b_n|}{|b|^2}. \qquad (6.8)$$

Паслядоўнасць $\left(2\dfrac{|b-b_n|}{|b|^2}\right)$ ёсць БМП, і з суадачынення (6.8) атрымліваем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Дзель паслядоўнасцяў (a_n) і (b_n) заменім далей здабыткам паслядоўнасцяў (a_n) і $(1/b_n)$ і скарыстаем папярэднюю ўласцівасць:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n\frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}. \ ■$$

6. *Калі для элементаў збежных паслядоўнасцяў (a_n) і (b_n) выконваецца няроўнасць $a_n \leqslant b_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то адпаведная няроўнасць праўдзіцца і для адпаведных лімітаў:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

□ Няхай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ і $a_n \leqslant b_n$ для ўсіх $n \in \mathbf{N}$. Патрэбна даказаць, што $a \leqslant b$. Дапусцім процілеглае,

што $a>b$, і возьмем $\varepsilon<(a-b)/2$. Тады на аснове патрабавання (6.5) пры $M=1$ і $n>R(\varepsilon)$ будзем мець:

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,\quad b-\varepsilon<b_n<b+\varepsilon. \tag{6.9}$$

Відавочна, што пры ўмове $\varepsilon<(a-b)/2$ праўдзіцца няроўнасць $b+\varepsilon<a-\varepsilon$, якая разам з няроўнасцямі (6.9) прыводзіць да высновы: $b_n<a_n$ для вялікіх n, што супярэчыць умове $a_n\leqslant b_n$, $n\in\mathbf{N}$. ■

Заўважым, што, пераходзячы да лімітаў у строгай няроўнасці, патрэбна пісаць нястрогую няроўнасць. Напрыклад, для кожнага $n\geqslant 2$, $n\in\mathbf{N}$, выконваецца строгая няроўнасць

$$1-\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n},$$

але пасля пераходу да лімітаў у гэтай няроўнасці атрымаем $1=1$.

7. Сфармулюем наступную лему.

***Лема 6.1* (пра сціснутую паслядоўнасць).** *Калі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=d$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=d$ і выконваюцца няроўнасці:*

$$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n\quad \forall n\in\mathbf{N}, \tag{6.10}$$

то паслядоўнасць (c_n) будзе таксама збежнай і $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=d$.

□ На падставе азначэння 6.4 пры вялікіх n маем няроўнасці:

$$d-\varepsilon<a_n<d+\varepsilon,\quad d-\varepsilon<b_n<d+\varepsilon,$$

якія з улікам стасунка (6.10) можна запісаць у выглядзе

$$d-\varepsilon<a_n\leqslant c_n\leqslant b_n<d+\varepsilon.$$

Такім чынам, $c_n\in(d-\varepsilon,\ d+\varepsilon)$ пры $n>R(\varepsilon)$, і, значыць, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=d$. ■

3°. Бясконца вялікія паслядоўнасці. У гэтым пункце разглядаюцца паслядоўнасці, значэнні якіх пры вялікіх n даволі вялікія па модулі.

Азначэнне 6.5. *Лікавая паслядоўнасць (a_n) называецца бясконца вялікай паслядоўнасцю (БВП), калі для кожнага $E>0$ існуе такі рэчаісны лік $R=R(E)$, што пры ўсіх $n>R(E)$ выконваецца няроўнасць*

$$|a_n|>E. \tag{6.11}$$

Гэта запісваюць так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

Калі ва ўмовах азначэння 6.5 элементы БВП захоў-

ваюць дадатны (адмоўны) знак, пачынаючы з некаторага n, то кажуць, што БВП мае ў якасці свайго ліміту дадатную (адмоўную) бясконцасць:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right).$$

Заўважым, што БВП не можа быць абмежаванай, паколькі ўмова (6.11) азначае, што за межамі адрэзка $[-E, E]$ знаходзіцца бясконца многа элементаў паслядоўнасці. Аднак неабмежаваная паслядоўнасць не заўсёды з'яўляецца БВП.

Напрыклад, паслядоўнасць

$$1,\ 1,\ 2,\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ n,\ \frac{1}{n^2},\ \ldots$$

ёсць неабмежаваная, але не БВП.

Разгледзім цяпер *уласцівасці, якія высвятляюць сувязь паміж бясконца вялікімі і бясконца малымі паслядоўнасцямі.*

1. *Калі паслядоўнасць* (a_n) *ёсць БВП, то, пачынаючы з некаторага* n, *вызначана паслядоўнасць* $(1/a_n)$, *якая ёсць БМП.*

□ Сапраўды, з азначэння 6.5 вынікае, што пры вялікіх n БВП не можа мець значэнняў, роўных нулю, таму вызначана паслядоўнасць $1/a_n$. Для кожнага дадатнага ліку E вызначым $\varepsilon = 1/E$. Тады з няроўнасці $|a_n| > E$ вынікае, што $1/|a_n| < \varepsilon$, пачынаючы з некаторага n. На падставе азначэння 6.2 прыходзім да высновы, што $1/a_n$ ёсць БМП. ■

2. *Калі ўсе элементы БМП* (α_n) *не супадаюць з нулём, то паслядоўнасць* $1/\alpha_n$ *ёсць БВП.*

Даказваецца сцверджанне падобна доказу папярэдняй уласцівасці.

Заўвага 6.3. У дачыненні да дзвюх збежных паслядоўнасцяў, якія маюць пэўныя ліміты, мы даказалі ўласцівасць 3 пра тое, што ліміт сумы паслядоўнасцяў роўны суме лімітаў. Сцверджанне «Сума дзвюх БВП ёсць БВП» увогуле няправільнае, калі разглядаюцца БВП розных знакаў. Бывае па-рознаму: сума дзвюх БВП розных знакаў можа быць БВП; можа мець пэўны ліміт; можа не мець ніякага, нават бясконцага ліміту. У гэтай сувязі кажуць, што маем нявызначанасць тыпу $\infty - \infty$, якую патрэбна раскрываць.

Маецца таксама нявызначанасць тыпу $\frac{\infty}{\infty}$, якая сустракаецца пры знаходжанні ліміта дзелі двух БВП. У сваю чаргу пры знаходжанні лімітаў дзелі двух БМП і здабытку БМП і БВП сустракаюцца нявызна-

чанасці тыпу $\frac{0}{0}$ і $0\cdot\infty$, якія патрэбна даследаваць з улікам знакаў элементаў БМП і БВП.

6.3. МАНАТОННЫЯ ПАСЛЯДОЎНАСЦІ І ПРЫКМЕТЫ ЗБЕЖНАСЦІ

1°. Манатонная паслядоўнасць і яе ліміт. Задача знаходжання ліміту лікавай паслядоўнасці развязваецца па-свойму ў кожным канкрэтным выпадку. Калі знайсці ліміт дакладна не ўдаецца, узнікае пытанне пра існаванне ліміту. Зараз мы ўпэўнімся, што абмежаваныя манатонныя паслядоўнасці заўсёды маюць ліміты.

Лікавая паслядоўнасць (a_n) называецца *нарастальнай (спадальнай)*, калі выконваецца няроўнасць

$$a_n < a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbf{N}. \qquad (6.12)$$

Калі замест судачынення (6.12) праўдзіцца нястрогая няроўнасць

$$a_n \leqslant a_{n+1} \quad (a_n \geqslant a_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad (6.13)$$

то паслядоўнасць называецца *неспадальнай (ненарастальнай)*.

Нарастальная і спадальная, ненарастальная і неспадальная паслядоўнасці аб'ядноўваюцца адной назвай — *манатонныя паслядоўнасці*.

***Тэарэма 6.1* (пра ліміт манатоннай паслядоўнасці).** *Кожная абмежаваная манатонная паслядоўнасць ёсць збежная паслядоўнасць.*

□ Няхай для пэўнасці (a_n) ёсць неспадальная абмежаваная паслядоўнасць, г. зн.

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots, \quad |a_n| \leqslant M \quad \forall n \in \mathbf{N}. \quad (6.14)$$

Мноства значэнняў паслядоўнасці (a_n) ёсць абмежаванае зверху і па тэарэме 1.1 існуе дакладная верхняя мяжа M^*, такая, што

$$a_n \leqslant M^* \quad \forall n \in \mathbf{N}. \qquad (6.15)$$

З другога боку, для кожнага $\varepsilon > 0$ знойдзецца элемент a_m, які праўдзіць няроўнасць

$$a_m > M^* - \varepsilon. \qquad (6.16)$$

На падставе неспадальнасці паслядоўнасці (6.14) і ўмовы (6.16) прыходзім да высновы, што

$$a_n > M^* - \varepsilon \quad \forall n \geqslant m.$$

Разам з умовай (6.15) апошняя няроўнасць аб'ядноўваецца ў двайную няроўнасць

$$M^*-\varepsilon<a_n\leqslant M^* \quad \forall n\geqslant m. \qquad (6.17)$$

З уласцівасці (6.17) паводле азначэння 6.4 вынікае, што існуе ліміт паслядоўнасці (a_n), прычым $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=M^*$.

Такім самым спосабам ажыццяўляецца доказ і для іншых манатонных паслядоўнасцяў. ■

З няроўнасцяў (6.12) і (6.13) зразумела, што нарастальная паслядоўнасць з'яўляецца неспадальнай, а спадальная паслядоўнасць — ненарастальнай. У дачыненні да тэарэмы 6.1 на самай справе і патрэбна адрозніваць толькі два выпадкі манатонных паслядоўнасцяў — неспадальныя і ненарастальныя.

Акрамя таго, заўважым, што манатонныя паслядоўнасці ёсць абмежаваныя зверху ці знізу, дакладней: сваімі першымі элементамі неспадальная паслядоўнасць абмежаваная знізу, а ненарастальная — зверху. Цяпер зразумела, што неспадальная паслядоўнасць будзе абмежаванай, калі яна абмежаваная зверху, а ненарастальная паслядоўнасць будзе абмежаванай, калі яна абмежаваная знізу.

З пададзеных разважанняў вынікае, што тэарэма 6.1 можа быць сфармуляваная ў наступным выглядзе: *калі неспадальная (ненарастальная) паслядоўнасць абмежаваная зверху (знізу), то яна збежная.*

2°. Лік e. Разгледзім спецыяльную паслядоўнасць з агульным элементам

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (6.18)$$

З дапамогай формулы бінома Ньютона атрымаем:

$$a_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (6.19)$$

У гэтым запісе для агульнага элемента a_{n+1} усе складнікі, акрамя першых двух, нарастаюць і дадаецца адзін новы дадатны складнік. Значыць, пры ўсіх $n\in\mathbf{N}$ выконваецца $a_n<a_{n+1}$, і паслядоўнасць (a_n) ёсць нарастальная. Акрамя таго, замяняючы ў формуле (6.19) усе множнікі, якія размешчаны ў дужках, адзінкамі, знойдзем з улікам формулы сумы геаметрычнай прагрэсіі:

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2}+\dots+=\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=2+2\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 3.$$

Па тэарэме 6.1 існуе пэўны ліміт паслядоўнасці (6.18), які называюць лікам e, інакш

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \qquad (6.20)$$

Лік e вядомы як *аснова натуральных лагарыфмаў.* З пададзеных вышэй выкладак зразумела, што $2<e<3$. Можна даказаць, што лік e ёсць лік ірацыянальны: $e=2{,}7182\dots$, яго дзесятковы лагарыфм $\lg e=0{,}4343\dots$.

3°. Падпаслядоўнасці і іх уласцівасці. Няхай (a_n) ёсць нейкая лікавая паслядоўнасць. Разгледзім адвольную нарастальную паслядоўнасць натуральных лікаў $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ і запішам адпаведныя элементы з паслядоўнасці (a_n):

$$(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}:\ a_{k_1},\ a_{k_2},\ \dots,\ a_{k_n},\ \dots\ . \qquad (6.21)$$

Паслядоўнасць (6.21) называецца *падпаслядоўнасцю ў дачыненні да першапачатковай паслядоўнасці* (a_n).

Тэарэма 6.2. *З кожнай паслядоўнасці можна вылучыць манатонную падпаслядоўнасць.*

□ Для лікавай паслядоўнасці могуць сустрэцца два выпадкі: або сама паслядоўнасць $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ і ўсе яе астачы $(a_n)_{n=m}^{\infty}$, $m\in\mathbf{N}$, маюць самы меншы элемент, або нейкая астача (і ўсе наступныя) не мае самага меншага элемента.

Няхай выконваецца першы выпадак альтэрнатывы. Выберам адзін з самых меншых элементаў паслядоўнасці і абазначым яго a_{n_1}. У якасці a_{n_2} возьмем адзін з самых меншых элементаў рэштковай паслядоўнасці, якая размешчана за a_{n_1}, $n_2>n_1$. Далей бярэцца адзін з самых меншых элементаў, размешчаных за a_{n_2}. Відавочна, што такім чынам мы атрымаем падпаслядоўнасць (a_{n_k}), такую, што

$$a_{n_1}\leqslant a_{n_2}\leqslant a_{n_3}\leqslant\dots\leqslant a_{n_k}\leqslant\dots\ .$$

У другім выпадку альтэрнатывы мы будзем мець астачу

$$a_m,\ a_{m+1},\ \dots,\ a_{m+n},\ \dots \qquad (6.22)$$

без самага меншага элемента. У якасці a_{n_1} возьмем a_m. Паколькі ў паслядоўнасці (6.22) няма самага меншага элемента, то, параўноўваючы наступныя элементы з $a_{n_1}=a_m$, мы знойдзем $a_{n_2}<a_{n_1}$. Потым возьмем астачу, якая пачынаецца з элемента a_{n_2}, і, параўноўваючы наступныя элементы з a_{n_2}, знойдзем $a_{n_3}<a_{n_2}$. На гэтым шляху мы і атрымаем падпаслядоўнасць (a_{n_k}), такую, што

$$a_{n_1}>a_{n_2}>a_{n_3}>\ldots>a_{n_k}>\ldots \quad ■$$

Тэарэма 6.3 (Бальцана*—Ваерштраса).** *З кожнай абмежаванай паслядоўнасці можна вылучыць збежную падпаслядоўнасць.*

□ На аснове тэарэмы 6.2 з паслядоўнасці (a_n) можна вылучыць манатонную падпаслядоўнасць, якая будзе абмежаванай, згодна з умовай тэарэмы, і, значыць, збежнай на падставе тэарэмы 6.1. ■

4°. Фундаментальныя паслядоўнасці. Сфармулюем

Азначэнне 6.6. *Лікавая паслядоўнасць (a_n) называецца фундаментальнай паводле Кашы, калі для кожнага дадатнага ліку ε існуе рэчаісны лік $R=R(\varepsilon)$, такі, што пры $n>R(\varepsilon)$ і $m>R(\varepsilon)$ выконваецца няроўнасць*

$$|a_n-a_m|<\varepsilon. \tag{6.23}$$

Калі (a_n) — збежная паслядоўнасць і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, то паводле ўмовы (6.5) пры даволі вялікіх n элементы a_n належаць дастаткова малой акрузе пункта a. Адсюль вынікае, што названыя элементы мала адрозніваюцца адзін ад другога, і на гэтай падставе ўдаецца атрымаць *крытэр збежнасці.*

***Тэарэма 6.4* (Кашы).** *Паслядоўнасць (a_n) ёсць збежная, калі і толькі калі яна фундаментальная паводле Кашы.*

□ Неабходнасць. Калі паслядоўнасць збежная і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, то для кожнага дадатнага ε існуе лік $R=R(\varepsilon)$, такі, што пры $m, n>R(\varepsilon)$

---

* *Бальцана Бэрнард* (Bolzano Bernard, 1781—1848) — чэшскі матэматык і філосаф.

** *Ваерштрас Карл Тэадор Вільгельм* (Weierstraß Karl Theodor Wilhelm, 1815—1897) — нямецкі матэматык.

$$|a_m - a| < \varepsilon/2,$$
$$|a_n - a| < \varepsilon/2.$$

Тады

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon.$$

Гэта і азначае, што выканана ўмова (6.23) фундаментальнасці.

Дастатковасць. Зараз мы павінны адштурхоўвацца ад умовы фундаментальнасці (6.23). Перш за ўсё заўважым, што фундаментальная паслядоўнасць ёсць абмежаваная паслядоўнасць. Сапраўды, няхай ва ўмове (6.23) m ёсць фіксаваны нумар, $m > R(\varepsilon)$ і $n = m + p$, дзе p — адвольны натуральны лік. Тады

$$a_m - \varepsilon < a_{m+p} < a_m + \varepsilon, \ p \in \mathbf{N}. \qquad (6.24)$$

Няроўнасці (6.24) азначаюць, што паслядоўнасць (a_n) мае абмежаваную астачу $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+p}, \ldots$, значыць, і сама паслядоўнасць (a_n) будзе абмежаванай. Па тэарэме 6.3 з паслядоўнасці (a_n) можна вылучыць збежную падпаслядоўнасць $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, такую, што $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = a$. Калі $n_k > R(\varepsilon)$, то на падставе няроўнасці (6.23) маем

$$|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon, \ n > R(\varepsilon).$$

Выконваючы ў апошняй няроўнасці лімітавы пераход пры $k \to \infty$, атрымаем

$$|a_n - a| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon,$$

інакш кажучы, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, згодна з азначэннем 6.4. ■

6.4. ЛІМІТ ФУНКЦЫІ

1°. Паняцце функцыі. Пры вывучэнні з'яваў прыроды і ў сваёй жыццёвай практыцы людзі сустракаюцца з мноствам розных фізічных велічыняў: час, даўжыня, хуткасць, аб'ём, сіла, вага і іншыя. Гэтыя велічыні могуць прымаць розныя значэнні або толькі адно фіксаванае значэнне. У першым выпадку мы маем зменную велічыню, а ў другім выпадку — сталую. Прадметам даследавання ў матэматычным аналізе з'яўляецца не змяненне адной велічыні, а судачыненні дзвюх ці некалькіх зменных, іншымі словамі, законы, якія выражаюць адны зменныя велічыні праз іншыя.

Напрыклад, плошча круга S знаходзіцца па вядомым радыусе r з дапамогай формулы

$$S=\pi r^2. \qquad (6.25)$$

У выпадку, калі прадмет знаходзіцца ў свабодным вертыкальным падзенні, пройдзены шлях h выражаецца роўнасцю

$$h=gt^2/2, \qquad (6.26)$$

дзе $g=9{,}81 \text{м/с}^2$ ёсць паскарэнне свабоднага падзення; t — час падзення.

Відавочна, што з дапамогай формул (6.25) і (6.26) пэўным значэнням r і t ставяцца ў адпаведнасць пэўныя значэнні зменных S і h.

Калі кожнаму элементу x з некаторага мноства X паводле правіла f пастаўлены ў адпаведнасць пэўны элемент y з мноства Y, то кажуць, што зададзена *функцыя* f.

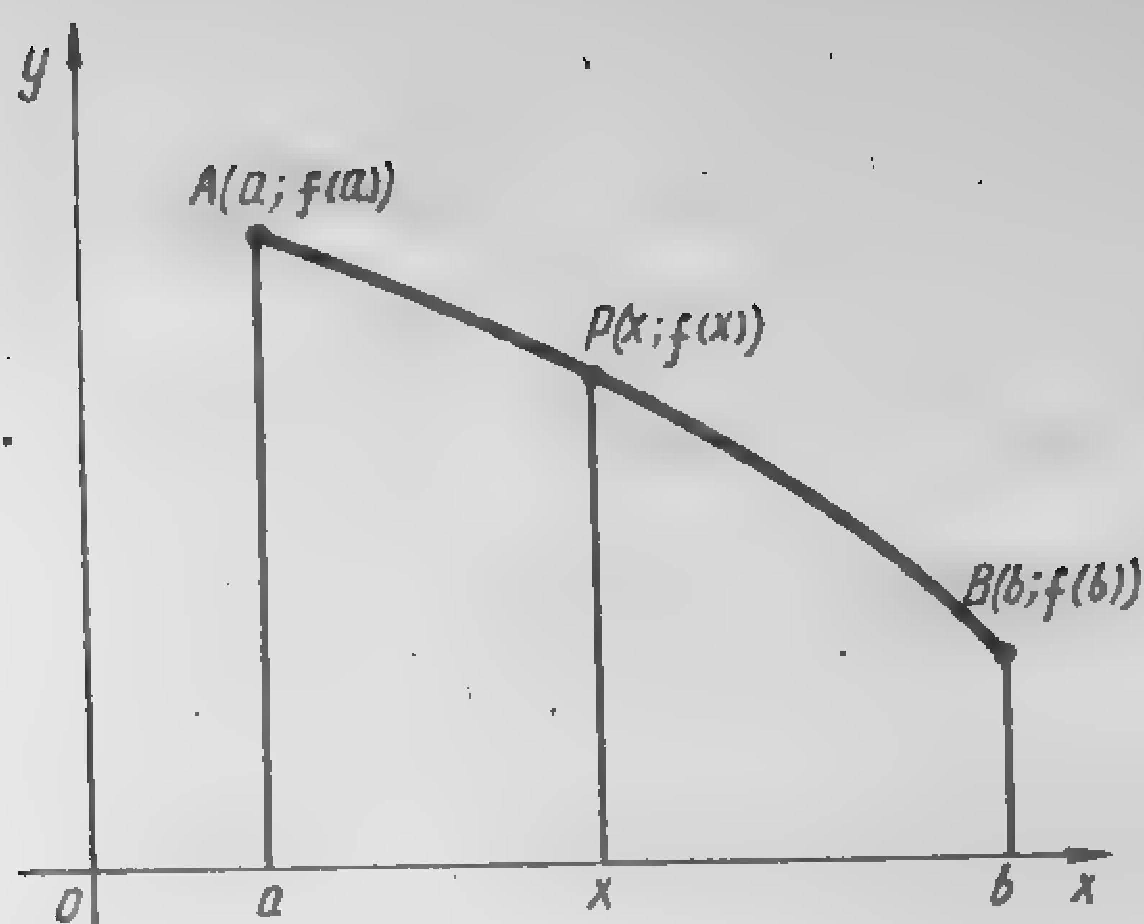
Для запісу функцыі скарыстоўваюць роўнасць $y=f(x)$, што чытаецца: y ёсць функцыя ад x. Ужываецца таксама запіс $X \xrightarrow{f} Y$.

Ва ўмовах пададзенага азначэння функцыі $y=f(x)$ зменная x называецца *незалежнай зменнай* ці *аргументам,* а зменная y — *залежнай зменнай* ці *значэннем функцыі;* мноства X называюць *абсягам існавання* ці *абсягам вызначэння функцыі* $y=f(x)$; мноства ўсіх значэнняў y, $y\in Y$, функцыі $y=f(x)$, $x\in X$, называецца *абсягам значэнняў функцыі,* які будзем абазначаць $f(X)$. З азначэння вынікае, што $f(X)\subseteq Y$. Значэнне y, якое адпавядае пэўнаму аргументу x пры функцыйнай залежнасці f, называецца яшчэ *вобразам* зменнай x. Іншымі словамі, з дапамогай функцыі f мноства значэнняў незалежнай зменнай x пераўтвараецца, ці адлюстроўваецца, у мноства Y.

Для многіх так званых элементарных функцый, якія сустракаліся ў сярэдняй школе, абсяг існавання і абсяг значэнняў з'яўляюцца прамежкамі лікавай прамой ці мноствам усіх рэчаісных лікаў.

Для ілюстрацыі функцыйнай залежнасці паміж лікавымі зменнымі велічынямі возьмем на плоскасці прамавугольную сістэму каардынат Oxy. Разгледзім пару адпаведных значэнняў x і y, дзе $x\in X\subset Ox$, $y\in Y\subset Oy$, $y=f(x)$. Відарысам гэтай пары на плоскасці xOy будзе пункт $P\ (x;\ f(x))$. Сукупнасць усіх такіх пунктаў, якія атрымліваюцца пры змяненні x у межах свайго мноства X, утварае графік функцыі (рыс. 6.1).

Калі мноства X сіметрычнае ў дачыненні да пункта $x=0$ і функцыя $y=f(x)$ задавальняе ўмову $f(-x)=f(x)$, то яе называюць *цотнай.* Графік такой функцыі будзе



Рыс. 6.1

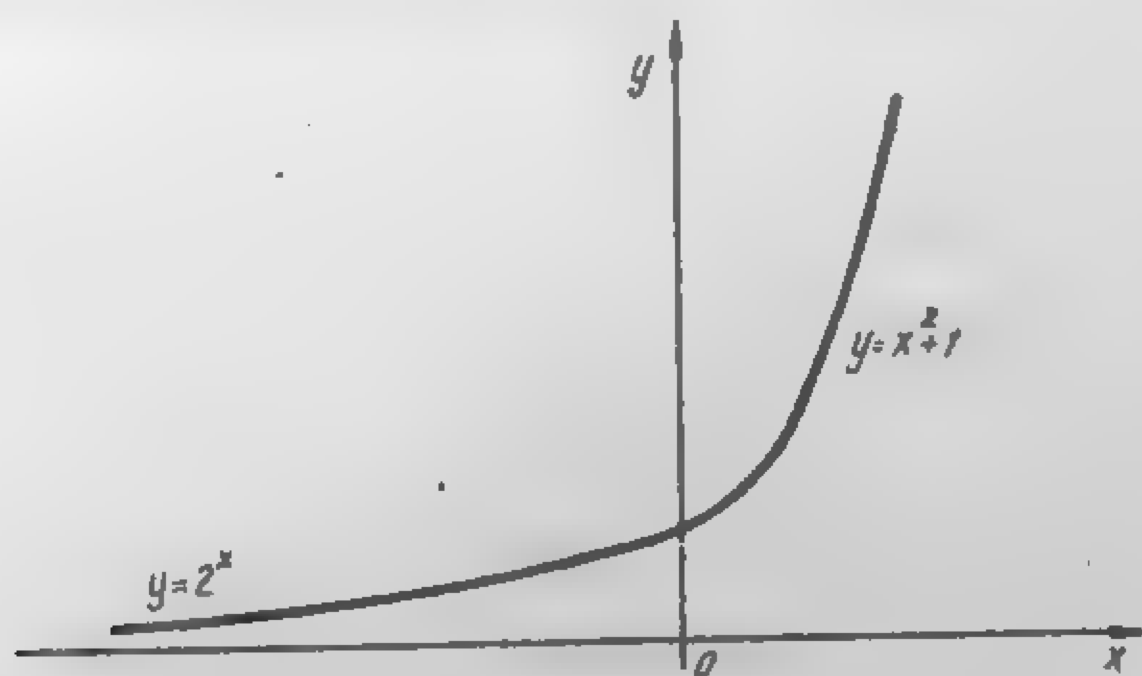
сіметрычны ў дачыненні да восі Oy. Калі ж выконваецца ўмова $f(-x)=-f(x)$, то функцыю называюць ***няцотнай***, і яе графік будзе мець пункт $O(0;0)$ цэнтрам сіметрыі.

Звычайна адпаведнасць паміж незалежнай зменнай і залежнай зменнай выражаецца з дапамогай канкрэтнай формулы, гэты спосаб задання функцыі называецца *аналітычным*. Патрэбна браць пад увагу тое, што на розных падмноствах змянення аргумента функцыя можа вызначацца рознымі формуламі.

Напрыклад, функцыя

$$y=\begin{cases}2^x, & \text{калі } x\leqslant 0,\\ x^2+1, & \text{калі } x>0,\end{cases}$$

зададзена аналітычным спосабам для ўсіх рэчаісных лікаў (рыс. 6.2).



Рыс. 6.2

Часта сустракаецца і так званы *таблічны спосаб задання функцыі*. У гэтым выпадку задаецца табліца значэнняў функцыі, якія адпавядаюць пэўным значэнням аргумента.

Іншы раз ёсць неабходнасць задаваць функцыйную залежнасць паміж зменнымі непасрэдна графікам, на-

прыклад з дапамогай асцылографа ці персанальнага камп'ютара.

Функцыя $y=f(x)$ называецца *абмежаванай на мностве X*, калі абмежавана мноства яе значэнняў, іншымі словамі, выконваецца няроўнасць

$$|f(x)|\leqslant M \quad \forall x\in X.$$

Функцыя $y=f(x)$ называецца *абмежаванай зверху (знізу) на мностве X*, калі існуе такі лік $M(m)$, што выконваецца няроўнасць

$$f(x)\leqslant M \quad (f(x)\geqslant M) \quad \forall x\in X.$$

Напрыклад, функцыя $y=1/x$ ёсць абмежаваная знізу на мностве $(0, 1]$ і неабмежаваная зверху на гэтым мностве.

2°. Ліміт функцыі. Дапусцім, што функцыя $y=f(x)$ зададзена ў некаторым наваколлі пункта a, г. зн. на інтэрвале (α, β), $\alpha<a<\beta$, усюды за выключэннем, магчыма, самога пункта a.

Азначэнне 6.7 (паводле Кашы). *Лік A называецца лімітам функцыі $y=f(x)$ у пункце a, калі для кожнага дадатнага ліку ε існуе такі лік $\delta=\delta(\varepsilon)$, што з няроўнасці*

$$0<|x-a|<\delta \tag{6.27}$$

вынікае няроўнасць

$$|f(x)-A|<\varepsilon. \tag{6.28}$$

Для абазначэння ліміту функцыі ў пункце ўжываецца запіс

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \tag{6.29}$$

які чытаюць так: «ліміт функцыі $f(x)$, калі x імкнецца да a, ёсць A».

Няроўнасці (6.27) і (6.28) паказваюць, што для значэнняў аргумента з акругі $a-\delta<x<a+\delta$, $x\neq a$, адпаведныя значэнні функцыі абавязкова трапляюць у ε-акругу ліміта A:

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

Відавочна, што на азначэнне ліміту не робіць уплыву значэнне функцыі $f(x)$ у пункце x_0, больш таго, функцыя можа быць нават нявызначанай у пункце x_0.

***Тэарэма 6.5* (крытэр Гайнэ*).** *Лік A ёсць ліміт функцыі $f(x)$ у пункце a, калі і толькі калі для ўсякай паслядоўнасці аргументаў (x_n), $x_n \neq a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, адпаведная паслядоўнасць значэнняў функцыі збягаецца да ліку A:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A. \qquad (6.30)$$

□ Н е а б х о д н а с ц ь. Возьмем адвольны лік $\varepsilon > 0$ і выберам такі дадатны лік $\delta = \delta(\varepsilon)$, што з няроўнасці (6.27) вынікае няроўнасць (6.28). Паколькі $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$, то, згодна з азначэннем 6.4, існуе такі рэчаісны лік $R(\delta)$, што пры $n > R(\delta)$ выконваецца няроўнасць

$$0 < |x_n - a| < \delta.$$

У такім разе паводле ўмовы (6.28) атрымаем

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Апошняя няроўнасць раўназначная таму, што $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Д а с т а т к о в а с ц ь. Дапусцім процілеглае, што

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq A.$$

Значыць, існуе лік $\varepsilon_0 > 0$, што для ўсякага $\delta > 0$ знойдзецца такі лік x_0, што

$$|x_0 - a| < \delta, \; |f(x_0 - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Зададзім паслядоўнасць $\delta_n \to 0$ пры $n \to \infty$, $\delta_n > 0$ і адпаведную паслядоўнасць (x_{0n}), такія, што $0 < |x_{0n} - a| < \delta_n$, $|f(x_{0n}) - A| \geqslant \varepsilon_0$. Паводле пабудовы $x_{0n} \to a$, з другога боку, $f(x_{0n}) \not\to A$, што супярэчыць умове (6.30). ■

З а ў в а г а 6.4. Крытэр Гайнэ дазваляе зрабіць выснову, што ўсе ўласцівасці, якія былі вышэй даказаныя для лімітаў лікавых паслядоўнасцяў, у поўным аб'ёме застаюцца правільнымі ў дачыненні да лімітаў функцый у пункце, і мы будзем імі карыстацца пры неабходнасці.

Акрамя ліміта функцыі ў пункце, які азначаны згодна з умовамі (6.27) і (6.28), ёсць патрэба разглядаць так званыя *аднабаковыя ліміты ў пункце*. Такая патрэба ўзнікае, прынамсі, у выпадку, калі функцыя зададзена на адрэзку $[\alpha, \beta]$, і мы цікавімся паводзінамі функцыі пры

---

* *Гайнэ Генрых* (Heine Heinrich, 1821—1881) — нямецкі матэматык.

набліжанні x да пункта α справа ці, інакш, $x \to \alpha+0$ або пры набліжанні x да пункта β злева, г. зн. $x \to \beta-0$. Можа так здарыцца, што і для ўнутранага пункта a адрэзка існуюць розныя, няроўныя паміж сабой, ліміты функцыі $f(x)$ злева і справа.

Левабаковым лімітам функцыі $f(x)$ у пункце a называюць лік

$$A = f(a-0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to a-0} f(x),$$

калі для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе такі лік $\delta = \delta(\varepsilon)$, што з няроўнасці $0 < a - x < \delta$ вынікае $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Правабаковы ліміт функцыі $f(x)$ у пункце a

$$A = f(a+0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to a+0} f(x)$$

азначаецца аналагічным спосабам, у гэтым разе разглядаецца наваколле $0 < x - a < \delta$.

Левабаковы ліміт функцыі $f(x)$ у пункце $a = 0$ абазначаюць $f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} f(x)$, а правабаковы — $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} f(x)$.

Для функцыі

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{калі} \quad x > 0, \\ 0, & \text{калі} \quad x = 0, \\ -1, & \text{калі} \quad x < 0, \end{cases}$$

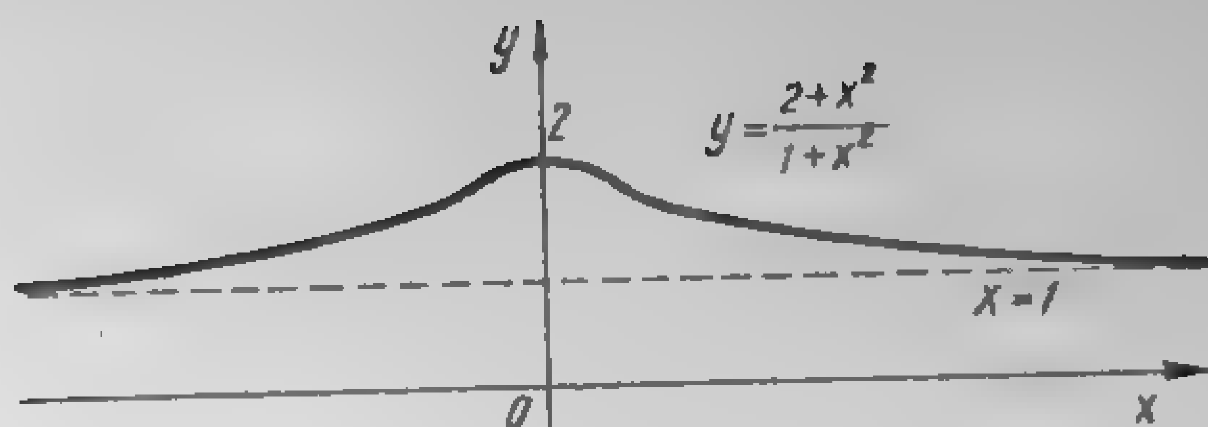
напрыклад, у пункце $x = 0$ правабаковы ліміт $f(+0) = 1$, левабаковы ліміт $f(-0) = -1$.

З а ў в а г а 6.5. Ліміт функцыі ў пункце a у сэнсе азначэння 6.7 існуе, калі і толькі калі існуюць роўныя паміж сабой ліміты злева і справа: $f(a+0) = f(a-0)$.

Калі функцыя $f(x)$ вызначана для ўсіх дастаткова вялікіх па модулі значэнняў x, магчыма на ўсёй лікавай прамой, то мае сэнс разглядаць ліміты: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. У прыватнасці, роўнасць $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ азначае: для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе рэчаісны лік $R = R(\varepsilon)$, такі, што з няроўнасці $x > R(\varepsilon)$ вынікае

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Функцыя $f(x) = \dfrac{2+x^2}{1+x^2}$ існуе для ўсіх рэчаісных лікаў (рыс. 6.3) і $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.



Рыс. 6.3

3°. Два грунтоўныя ліміты. Пры лімітавых дзеяннях з лагарыфмічнай, паказнікавай і ступеневай функцыямі скарыстоўваецца грунтоўны ліміт, які непасрэдна датычыць ліку e.

Тэарэма 6.6. *Праўдзіцца роўнасць*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e. \tag{6.31}$$

□ У § 6.3 мы ўжо высветлілі, што роўнасць (6.31) мае месца, калі $x=1/n$, і ліміт разумеем у сэнсе ліміта лікавай паслядоўнасці (гл. формулу (6.20)):

$$\lim_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{6.32}$$

Беручы пад увагу крытэр Гайнэ, патрэбна даказаць, што

$$\lim_{x_n\to 0}(1+x_n)^{1/x_n}=e \tag{6.33}$$

для ўсякай паслядоўнасці (x_n), збежнай да нуля. Разгледзім розныя выпадкі паслядоўнасці (x_n).

1. Няхай $x_n=1/k_n$, $k_n\in\mathbf{N}$. Непасрэдна з азначэння ліміта збежнай паслядоўнасці вынікае, што падпаслядоўнасць збежнай паслядоўнасці мае той самы ліміт. Значыць, з роўнасці (6.32) вынікае

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}=e. \tag{6.34}$$

2. Няхай $x_n\to+0$, $k_n\leqslant\frac{1}{x_n}<k_n+1$, $k_n\in N$. Тады маем

$$\frac{1}{k_n+1}<x_n\leqslant\frac{1}{k_n},$$

што пасля відавочных дзеянняў дае

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}<(1+x_n)^{1/x_n}<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}. \tag{6.35}$$

З дапамогай роўнасці (6.34) атрымаем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}=e\cdot 1.$$

У сваю чаргу для правай паслядоўнасці з няроўнасцяў (6.35)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)=e\cdot 1.$$

Пасля лімітавага пераходу ў няроўнасці (6.35) на падставе ўласцівасці сціснутай паслядоўнасці сцвярджаем, што праўдзіцца формула (6.33) для $x_n\to+0$ і, значыць, існуе правабаковы ліміт

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{1/x}=e.$$

3. Няхай $x_n\to-0$. Тады маем:

$$\lim_{x_n\to-0}(1+x_n)^{1/x_n}=\lim_{y_n\to+0}(1-y_n)^{-1/y_n}=\lim_{y_n\to+0}\left(\frac{1}{1-y_n}\right)^{1/y_n}=$$

$$=\lim_{y_n\to+0}\left(1+\frac{y_n}{1-y_n}\right)^{(1-y_n)/y_n}\left(1+\frac{y_n}{1-y_n}\right)=e\cdot 1=e.$$

Такім чынам, мы знайшлі, што

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{1/x}=e,$$

і тым самым даказалі, што справядлівая формула (6.31). ■

Тэарэма 6.7. *Праўдзіцца роўнасць*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{6.36}$$

□ Непасрэдна з азначэння трыганаметрычных функцый $\sin x$ і $\operatorname{tg} x$ на адзінкавым крузе вынікае (рыс.6.4), што пры $0<x<\pi/2$ выконваецца няроўнасць

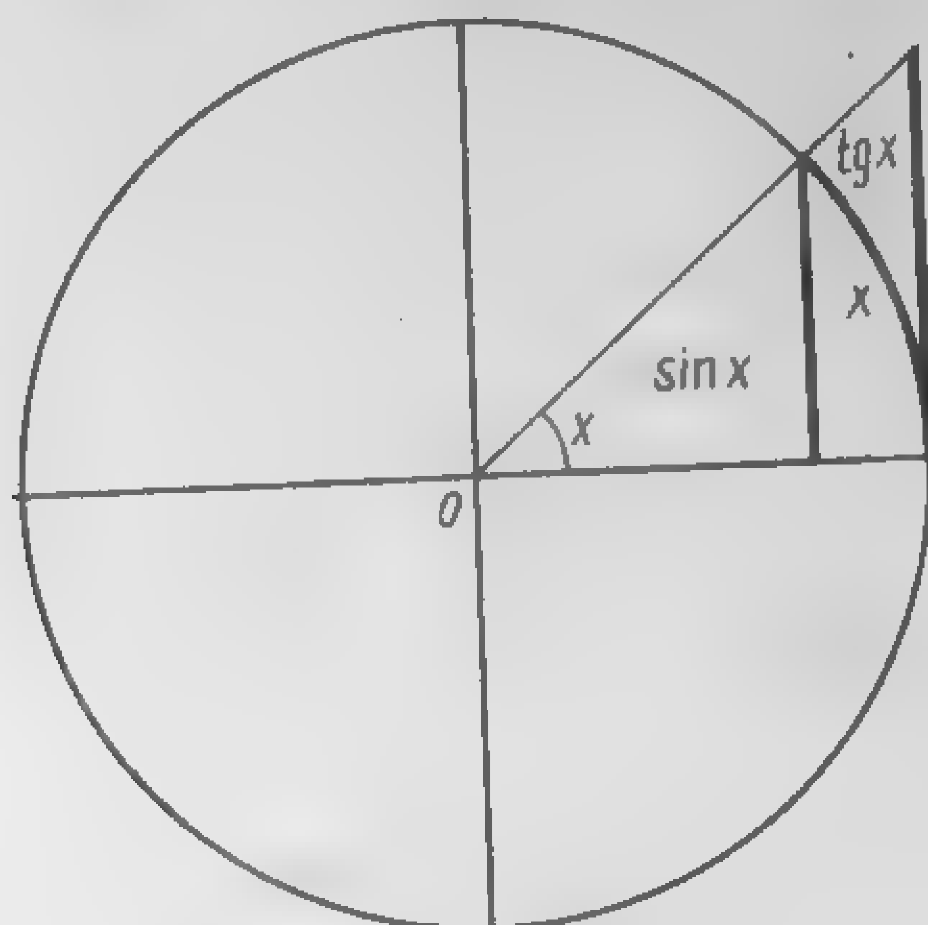
$$\sin x<x<\operatorname{tg} x=\sin x/\cos x. \tag{6.37}$$

Са стасунка (6.37) атрымліваем

$$\cos x<(\sin x)/x<1.$$

Няцяжка пераканацца, што

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<x. \qquad (6.38)$$



Рыс. 6.4

Узяўшы $\delta=\varepsilon$, мы будзем мець з улікам судачынення (6.38), што з няроўнасці $0<x-0<\delta$ вынікае няроўнасць

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon.$$

Значыць, існуе правабаковы ліміт

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Левабаковы ліміт будзе таксама роўны адзінцы з прычыны цотнасці функцыі $(\sin x)/x$. ■

4°. Бясконца вялікія функцыі. Функцыя $f(x)$ называецца *бясконца вялікай (БВФ) у пункце a справа (злева),* калі для ўсякай збежнай да a паслядоўнасці

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots,\ x_n>a\ (x_n<a)$$

значэнняў аргумента x адпаведная паслядоўнасць

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \dots,\ f(x_n),\dots$$

значэнняў функцыі ёсць БВП пэўнага знаку.

Для бясконца вялікіх функцый карыстаюцца наступнымі абазначэннямі:

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=+\infty \quad \text{ці} \quad f(a+0)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to a-0}f(x)=+\infty \quad \text{ці} \quad f(a-0)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to a+0}f(x)=-\infty \quad \text{ці} \quad f(a+0)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to a-0}f(x)=-\infty \quad \text{ці} \quad f(a-0)=-\infty.$$

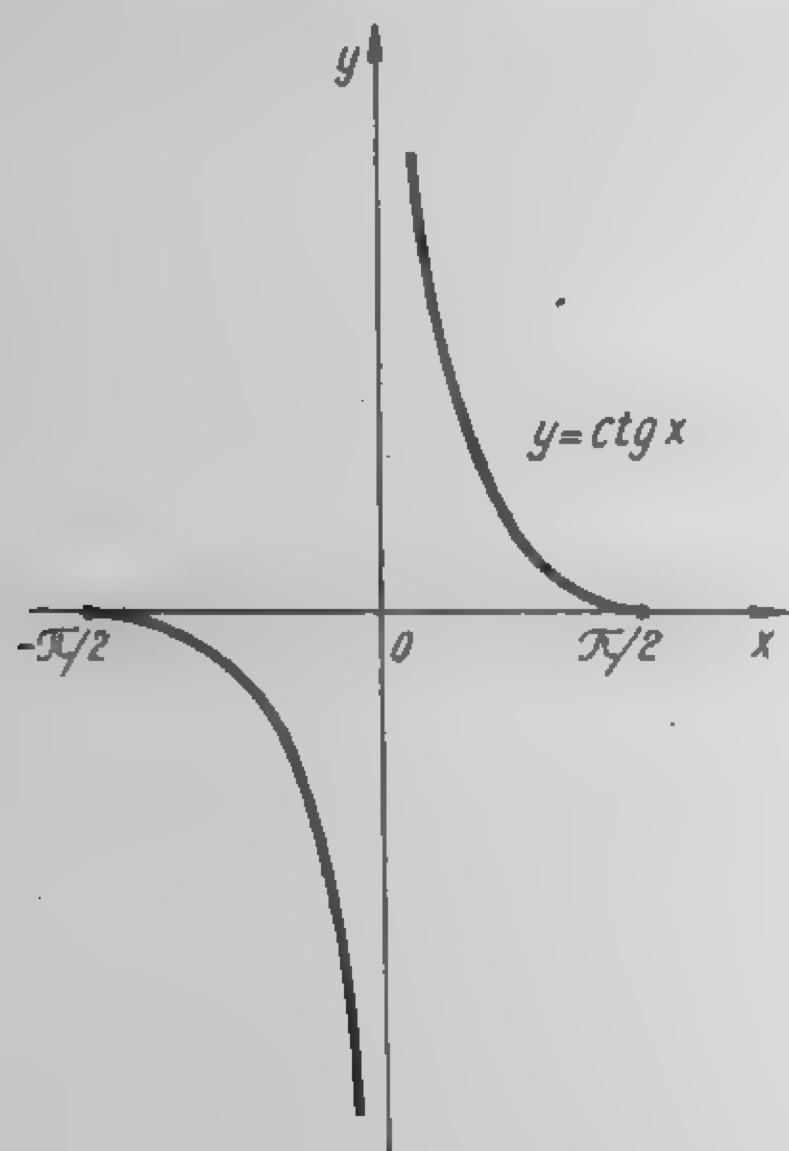
У тых выпадках, калі функцыя $y=f(x)$ ёсць бясконца вялікая аднаго знаку ў пункце $x=a$ і злева, і справа, ужываюцца таксама запісы:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty.$$

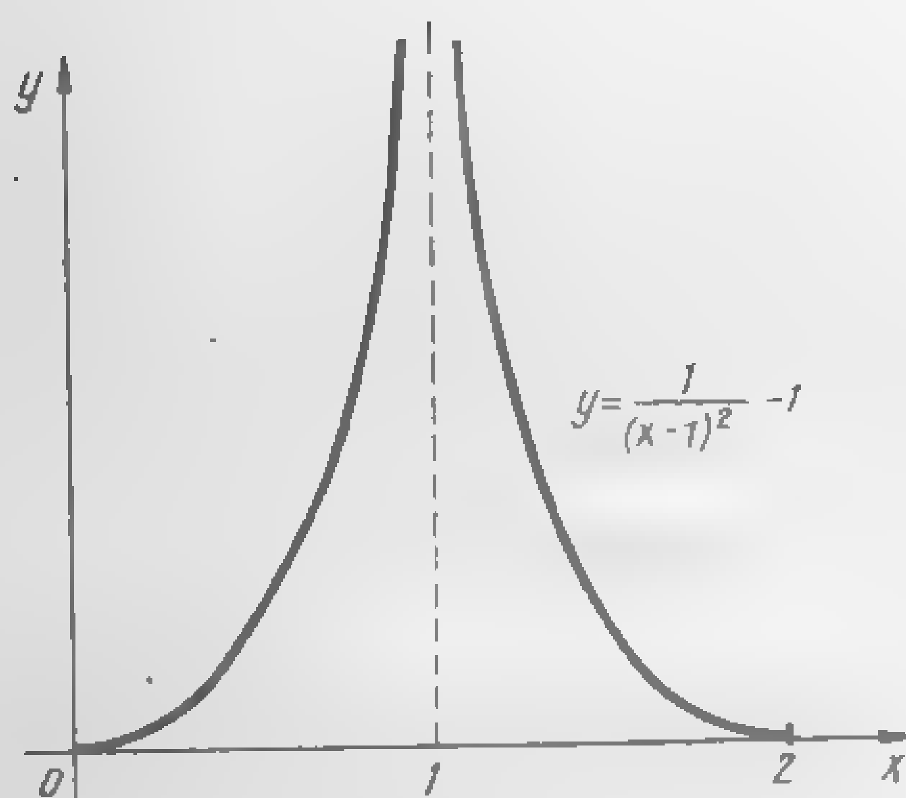
Запіс $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ азначае, што $f(x)$ ёсць бясконца вялікая функцыя некаторага знаку.

Напрыклад, функцыя $y=\operatorname{ctg} x=\cos x/\sin x$ ёсць бясконца вялікая функцыя ў пункце $x=0$ (рыс. 6.5) справа і злева, адпаведна $f(+0)=+\infty$, $f(-0)=-\infty$.

У сваю чаргу функцыя $y=1/(x-1)^2$ ёсць бясконца вялікая функцыя ў пункце $x=1$ (рыс. 6.6), прычым $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$.



Рыс. 6.5



Рыс. 6.6

Функцыя $f(x)$ называецца *бясконца вялікай дадатнага знаку пры* $x\to+\infty$, калі для кожнага дадатнага ліку E існуе лік $R(E)>0$, такі, што з няроўнасці $x>R(E)$ вынікае няроўнасць

$$f(x)>E.$$

У такім разе запісваюць:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty. \tag{6.39}$$

Найбольш простымі прыкладамі такіх функцый, для якіх выконваецца ўмова (6.39), з'яўляюцца $f(x)=x$, $f(x)=x^2$.

Аналагічна можна азначыць *бясконца вялікую функцыю дадатнага знаку, калі* $x\to-\infty$, і *бясконца вялікую функцыю адмоўнага знаку, калі* $x\to\pm\infty$.

З а ў в а г а 6.6. Пры ўмове існавання ліміта $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$ графік функцыі $y=f(x)$ пры $x\to+\infty$ набліжаецца да прамой $y=A$, якая называецца *гарызантальнай асімптотай.*

У тых выпадках, калі $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, графік функцыі $y=f(x)$ будзе набліжацца да прамой $x=a$, і гэту прамую называюць *вертыкальнай асімптотай.*

З а ў в а г а 6.7. Надалей пад выразам «існуе $\lim_{x\to a} f(x)$ ці $\lim_{x\to\infty} f(x)$» будзем разумець заўсёды існаванне к а н е ч н а г а л і м і т у, калі не гаворыцца процілеглае.

6.5. НЕПАРЫЎНЫЯ ФУНКЦЫІ РЭЧАІСНАЙ ЗМЕННАЙ

1°. Паняцце непарыўнасці функцыі. Будзем лічыць, што функцыя $y=f(x)$ зададзена ў некаторым наваколлі пункта a, г. зн. на інтэрвале (α, β), $\alpha<a<\beta$. У папярэднім параграфе пры азначэнні ліміта

$$\lim_{x\to a} f(x) \tag{6.40}$$

мы падкрэслівалі, што абавязкова трэба браць $x\neq a$. Зараз скажам, што нас цікавяць у першую чаргу такія выпадкі і такія функцыі, калі ліміт (6.40) у дакладнасці роўны значэнню функцыі $f(a)$.

Азначэнне 6.8. *Функцыя $y=f(x)$ называецца непарыўнай у пункце a, калі*

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a). \tag{6.41}$$

Азначэнне 6.9. *Функцыя $y=f(x)$ называецца непарыўнай справа (злева) у пункце a, калі*

$$\begin{gathered} f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a) \\ \left(f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)\right). \end{gathered} \tag{6.42}$$

З улікам заўвагі 6.5 зразумела, што роўнасць (6.41) мае месца толькі ў тым разе, калі выконваюцца абедзве роўнасці (6.42). Інакш кажучы, *функцыя $y=f(x)$ ёсць непарыўная ў пункце $x=a$ толькі пры ўмове, што яна ёсць непарыўная ў гэтым пункце злева і справа.*

Азначэнне 6.10. *Функцыя $y=f(x)$ называецца непарыўнай на інтэрвале (α, β), калі яна ёсць непарыўная ў кожным пункце інтэрвала. Функцыя $y=f(x)$ называецца непарыўнай на адрэзку $[\alpha, \beta]$, калі яна ёсць непарыўная ва ўнутраных пунктах адрэзка, а таксама непарыўная справа ў пункце α і непарыўная злева ў пункце β.*

Каб высветліць пытанне наконт непарыўнасці функцыі, мы будзем карыстацца пададзенымі яе азначэннямі ў спалучэнні з уласцівасцямі лімітаў функцыі ў пункце. Як ужо адзначалася ў заўвазе 6.4, ліміты функцыі ў пункце маюць такія ж самыя ўласцівасці, як і ліміты лікавых паслядоўнасцяў.

2°. Непарыўнасць элементарных функцый. У першую чаргу дакажам, што непарыўнымі будуць сталая і тоесная функцыі, мнагасклад, рацыянальная, экспанентавая і трыганаметрычныя функцыі.

1. *Сталая функцыя $f(x)=b$ ёсць непарыўная на множстве рэчаісных лікаў.*

☐ Сапраўды, згодна з азначэннем ліміта функцыі ў пункце $x=x_0$, па зададзеным адвольным $\varepsilon>0$ мы павінны знайсці такі лік $\delta=\delta(\varepsilon)$, што з няроўнасці

$$0<|x-x_0|<\delta$$

вынікае няроўнасць

$$|f(x)-f(x_0)|=|b-b|=0<\varepsilon.$$

Зразумела, што апошняя няроўнасць выконваецца, у прыватнасці, для $\delta=\varepsilon$, і, значыць, $f(x)$ ёсць непарыўная ў кожным пункце x_0. ■

2. *Тоесная функцыя $f(x)=x$ ёсць непарыўная на множстве $(-\infty, +\infty)$.*

☐ На самай справе, калі лічыць $\delta=\varepsilon$, то з няроўнасці $|x-x_0|<\delta$ вынікае $|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\varepsilon$ і, значыць, $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ на падставе азначэння 6.7. ■

3. *Ступеневая функцыя $f(x)=x^n$, $n\in\mathbf{N}$, ёсць непарыўная на множстве $(-\infty, +\infty)$.*

☐ Паколькі, згодна з крытэрам Гайнэ і ўласцівасцямі лімітаў паслядоўнасцяў, ліміт здабытку функцый у пункце роўны здабытку лімітаў множнікаў, то маем:

$$\lim_{x\to x_0} x^n=\lim_{x\to x_0} x\cdot\lim_{x\to x_0} x\cdots\lim_{x\to x_0} x=x_0x_0\cdots x_0=x_0^n. \ ■$$

4. *Мнагасклад $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ ёсць непарыўная функцыя на множстве $(-\infty, +\infty)$.*

☐ Дастаткова заўважыць, што кожны складнік a_kx^{n-k} ёсць непарыўная функцыя як здабытак сталай і ступеневай непарыўных функцый, і потым скарыстаць той факт, што ліміт сумы роўны суме лімітаў складнікаў. ■

5. *Рацыянальная функцыя*

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$$

ёсць непарыўная для ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя тых пунктаў, дзе назоўнік роўны нулю.

□ Доказ грунтуецца на ўласцівасці: ліміт дзелі роўны дзелі лімітаў пры ўмове, што ліміт назоўніка не роўны нулю. ■

6. *Трыганаметрычная функцыя* $f(x)=\sin x$ *ёсць непарыўная на мностве* $(-\infty, +\infty)$.

□ Спачатку дакажам непарыўнасць функцыі $f(x)=\sin x$ у пункце $x=0$. У папярэднім параграфе пры знаходжанні грунтоўнага трыганаметрычнага ліміту мы ўжо карысталіся няроўнасцю $\sin x<x$, што выконваецца на інтэрвале $0<x<\pi/2$. Зусім зразумела, што калі $0<|x|<\pi/2$, то будзем мець няроўнасць

$$|\sin x|<|x|. \tag{6.43}$$

Возьмем адвольнае ε, $0<\varepsilon<1$, і няхай $\delta=\varepsilon$. Тады будзем мець з улікам стасунка (6.43), што з няроўнасці $|x-0|=|x|<\delta$ вынікае $|\sin x-\sin 0|=|\sin x|<\varepsilon$. З апошняй няроўнасці, згодна з азначэннем 6.8, вынікае непарыўнасць функцыі $f(x)=\sin x$ у пункце $x=0$.

У выпадку $x=x_0\neq 0$ перш за ўсё скарыстаем формулу

$$\sin x_n-\sin x_0=2\sin\frac{x_n-x_0}{2}\cos\frac{x_n+x_0}{2}, \tag{6.44}$$

дзе (x_n) — адвольная паслядоўнасць, збежная да x_0. Паслядоўнасць $\left\{\cos\frac{x_n+x_0}{2}\right\}$ будзе, відавочна, абмежаванай, а паслядоўнасць $\left\{2\sin\frac{x_n-x_0}{2}\right\}$ на аснове ўмовы (6.43) — бясконца малой. З гэтай прычыны іх здабытак будзе бясконца малой паслядоўнасцю. Значыць, з роўнасці (6.44) вынікае

$$\lim_{n\to\infty}(\sin x_n-\sin x_0)=0. \tag{6.45}$$

Паколькі $\sin x_n=\sin x_0+(\sin x_n-\sin x_0)$, то атрымаем:

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n=\sin x_0+0=\sin x_0,$$

што на падставе крытэра Гайнэ і азначае непарыўнасць функцыі ў пункце x_0. ■

7. *Трыганаметрычная функцыя $f(x)=\cos x$ ёсць непарыўная на мностве $(-\infty,\ +\infty)$.*

□ Доказ уласцівасці цалкам падобны на папярэдні, толькі патрэбна будзе скарыстаць формулу розніцы косінусаў. ■

8. *Трыганаметрычныя функцыі*

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

непарыўныя ў кожным пункце іх мноства існавання.

□ Як і ў выпадку з рацыянальнай функцыяй, патрэбна скарыстаць тое, што ліміт дзелі роўны дзелі лімітаў пры ўмове: ліміт назоўніка адрозніваецца ад нуля. ■

9. *Экспанентавая функцыя (экспанента) $f(x)=e^x$ ёсць непарыўная на мностве $(-\infty,\ +\infty)$.*

□ Спачатку дакажам непарыўнасць экспаненты ў пункце $x=0$. Нам патрэбна паслядоўнасць

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ n\in\mathbf{N}. \qquad (6.46)$$

Пераканаемся, што паслядоўнасць (6.46) — спадальная. Сапраўды, маем:

$$\frac{y_n}{y_{n-1}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}\,\frac{n+1}{n}<\frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}}\,\frac{n+1}{n}=$$

$$=\frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n}<1,$$

што і дае $y_n<y_{n-1}$. Зразумела, што

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e$$

і для ўсякага n выконваецца няроўнасць

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

якая раўназначная няроўнасці

$$0<e^{1/(n+1)}-1<\frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}. \qquad (6.47)$$

Скарыстоўваючы ўласцівасць сціснутай паслядоўнасці, пасля пераходу да лімітаў у няроўнасці (6.47) атрымаем

$$\lim_{n\to\infty} e^{1/n}=1.$$

Калі (k_n), $k_n \in \mathbf{N}$, ёсць падпаслядоўнасць натуральных лікаў, то з апошняй формулы вынікае праўдзівасць роўнасці

$$\lim_{n\to\infty} e^{1/k_n}=1. \tag{6.48}$$

Няхай (x_n) — адвольная паслядоўнасць дадатных лікаў, збежная да нуля, і (k_n) — такая паслядоўнасць натуральных лікаў, што

$$e^{1/(k_n+1)} \leqslant e^{x_n} \leqslant e^{1/k_n}.$$

З улікам роўнасці (6.48) пасля лімітавага пераходу ў апошняй няроўнасці пераконваемся, што

$$\lim_{x\to+0} e^{x}=1.$$

Ліміт злева знаходзім наступным чынам:

$$\lim_{x\to-0} e^{x}=\lim_{x\to-0}\frac{1}{e^{-x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to-0} e^{-x}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to+0} e^{t}}=1,$$

і, значыць, непарыўнасць e^x у пункце $x=0$ даказана.

Непарыўнасць у адвольным пункце $x=x_0$ вынікае з роўнасці

$$e^{x}-e^{x_0}=e^{x_0}(e^{x-x_0}-1). \ \blacksquare$$

3°. Арыфметычныя дзеянні з непарыўнымі функцыямі. Мноства непарыўных функцый можна пашырыць з дапамогай арыфметычных дзеянняў.

Тэарэма 6.8. *Калі функцыі $f(x)$ і $g(x)$ ёсць непарыўныя ў пункце $x=x_0$, то і функцыі*

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)g(x),\ f(x)/g(x)$$

непарыўныя ў пункце $x=x_0$ (дзель пры ўмове $g(x_0)\neq 0$).

□ Паколькі непарыўныя ў пункце $x=x_0$ функцыі $f(x)$ і $g(x)$ маюць у гэтым пункце ліміты

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\ \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0),$$

то з улікам крытэра Гайнэ і ўласцівасцяў лімітаў лікавых паслядоўнасцяў ліміты функцый

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)g(x),\ f(x)/g(x)$$

існуюць і знаходзяцца адпаведна па формулах:

$$f(x_0)+g(x_0),\ f(x_0)-g(x_0),\ f(x_0)g(x_0),\ f(x_0)/g(x_0),$$

якія падаюць прыватныя значэнні пералічаных функцый у пункце x_0. ■

З дапамогай тэарэмы 6.8 можна прыйсці да высновы, напрыклад, што функцыі $e^x+\sin x$, $e^x\cos x$, $x^n\cos x$, x^n-e^x ёсць непарыўныя на мностве рэчаісных лікаў.

4°. Класіфікацыя пунктаў разрыву функцыі. Няхай функцыя $y=f(x)$ вызначана ў наваколлі пункта x_0, акрамя, магчыма, самога гэтага пункта.

Азначэнне 6.11. *Пункт x_0 называецца пунктам разрыву для функцыі $y=f(x)$, калі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не існуе або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.*

Сустракаюцца розныя віды разрываў. Найбольш просты разрыў ёсць так званы *скасавальны разрыў* у пункце x_0, калі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

Няхай, напрыклад, зададзена функцыя на адрэзку $[-1, 1]$ з дапамогай роўнасцяў:

$$f(x)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}(\sin x)/x, & \text{калі}\quad x\neq 0,\\ 2, & \text{калі}\quad x=0.\end{cases}$$

Відавочна, што ў пункце $x=0$ (рыс. 6.7) мы маем скасавальны разрыў, паколькі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Калі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не існуе, то магчымы тры выпадкі.

Па-першае, існуюць абодва аднабаковыя ліміты, але

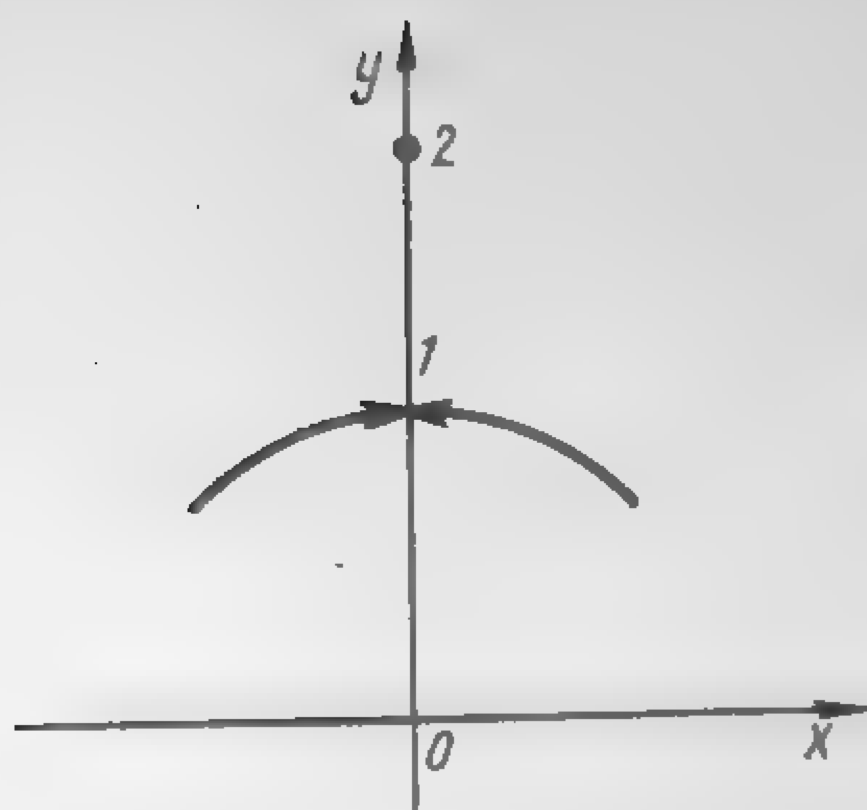
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)\neq \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Разрыў такога тыпу называецца *скачком.*

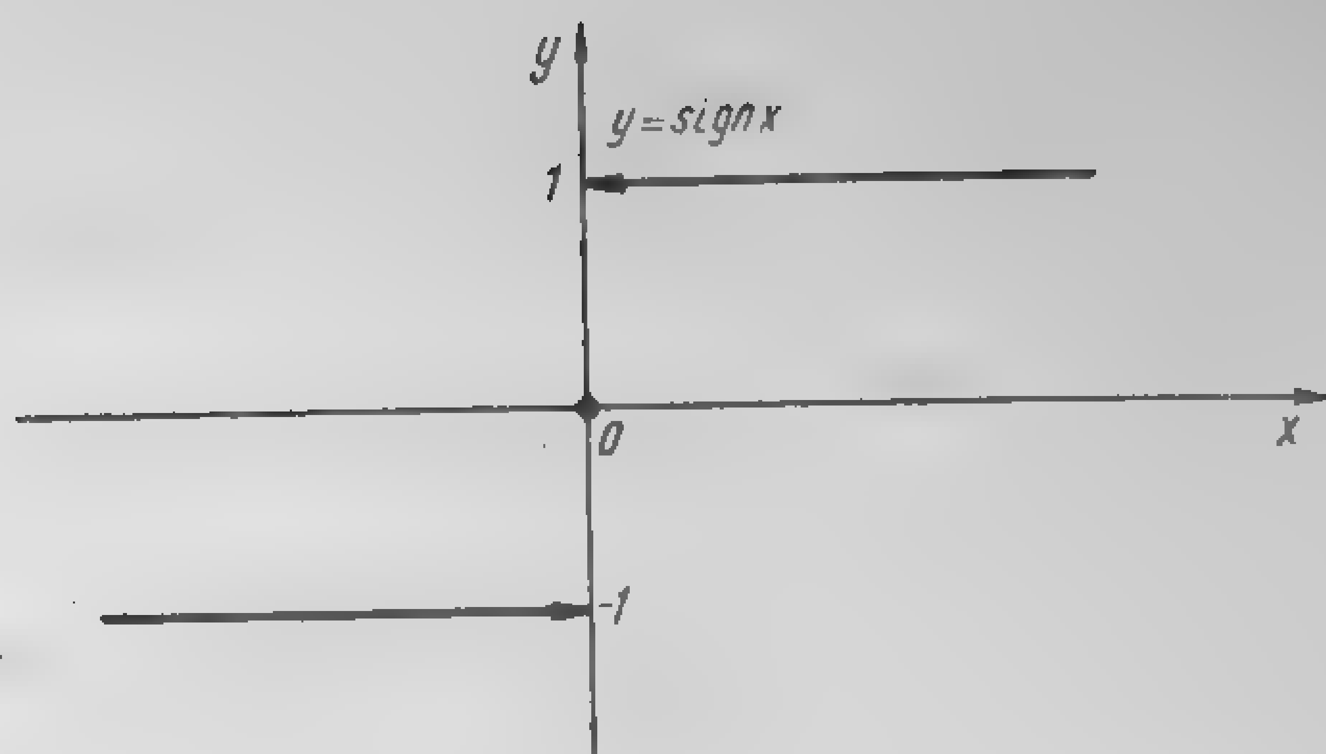
Напрыклад, функцыя $f(x)=\operatorname{sign} x$ мае скачок у пункце $x=0$ (рыс. 6.8).

Па-другое, адзін з аднабаковых лімітаў (ці абодва) з'яўляецца бясконцасцю. Тады кажуць, што ў пункце x_0 ёсць *неабмежаваны скачок.*

Напрыклад, $f(x)=1/x$ мае такі разрыў у пункце $x=0$, графік гэтай функцыі ёсць вядомая гіпербала.



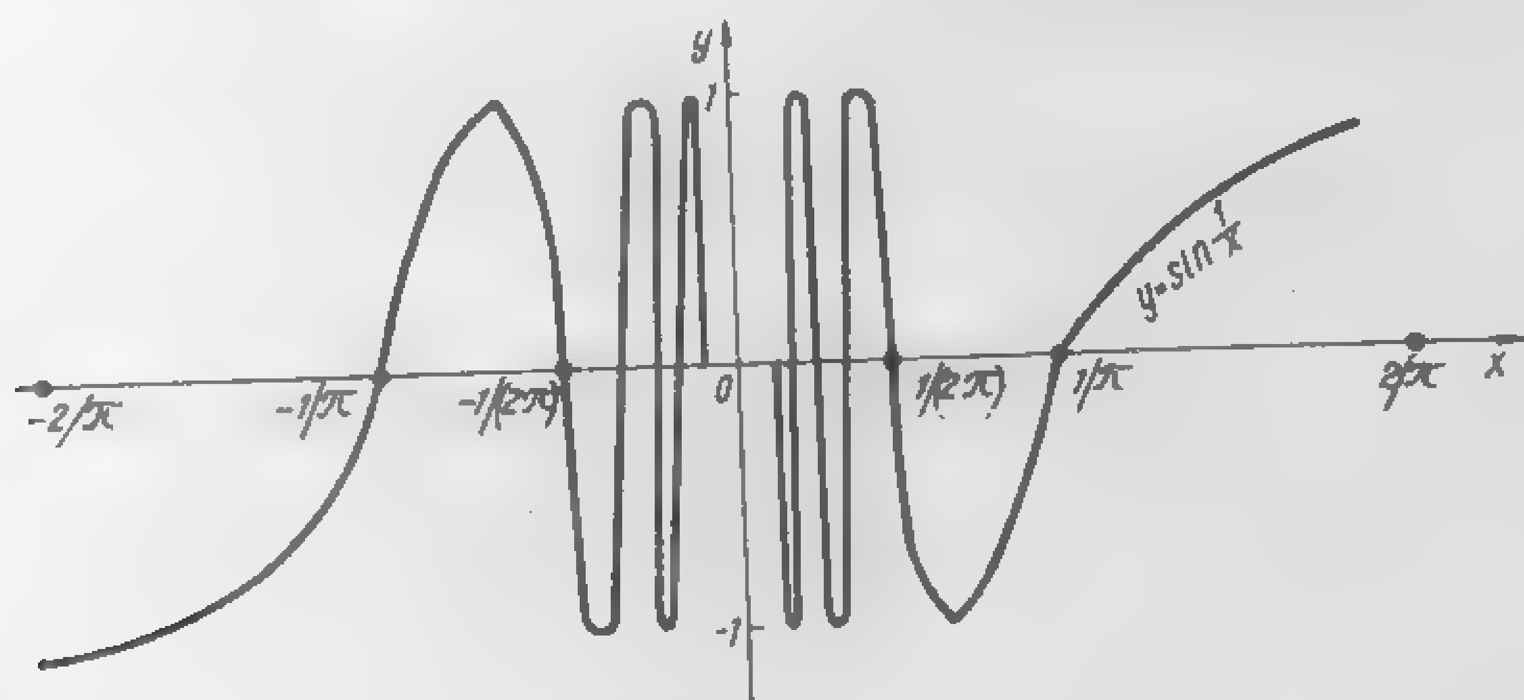
Рыс. 6.7



Рыс. 6.8

Нарэшце, ёсць і такі выпадак, калі адзін або абодва аднабаковыя ліміты не існуюць нават у сэнсе бясконцасці.

Напрыклад, функцыя $f(x)=\sin(1/x)$ у пункце $x=0$ мае разрыў, бо $\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ не існуе (рыс. 6.9).



Рыс. 6.9

Разрыў такога тыпу называюць *невызначальным*.

Ужываюцца таксама назвы: разрывы першага і другога роду. Скасавальны разрыў і скачок называюцца *разрывамі першага роду*. Бясконцы скачок і невызначальны разрыў называюцца *разрывамі другога роду*.

Акрамя непарыўных на адрэзку функцый, часта патрэбна разглядаць кускова-непарыўныя функцыі.

Азначэнне 6.12. *Функцыя $y=f(x)$, зададзеная на адрэзку $[a, b]$, якая мае толькі пэўную колькасць пунктаў разрыву першага роду, называецца кавалкава-непарыўнай.*

6.6. УЛАСЦІВАСЦІ НЕПАРЫЎНЫХ ФУНКЦЫЙ

1°. Манатоннасць і непарыўнасць. Будзем лічыць, што функцыя $f(x)$ зададзена на адрэзку $[a, b]$.

Азначэнне 6.13. *Функцыя $f(x)$ называецца нарасталь-*

най на адрэзку [a, b], *калі для ўсякіх* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *з няроўнасці* $x_1 < x_2$ *вынікае няроўнасць*

$$f(x_1) < f(x_2), \qquad (6.49)$$

і спадальнай, калі з няроўнасці $x_1 < x_2$ *вынікае*

$$f(x_1) > f(x_2). \qquad (6.50)$$

У тых выпадках, калі няроўнасці (6.49) і (6.50) замяняюцца нястрогімі няроўнасцямі, ужываюцца тэрміны: *неспадальная* і *ненарастальная функцыі.* Нарастальная, спадальная, неспадальная і ненарастальная функцыі аб'ядноўваюцца адным тэрмінам *манатонныя функцыі* (у першых двух выпадках кажуць таксама — *строга манатонныя функцыі*).

Тэарэма 6.9. *Манатонная на адрэзку* $[a, b]$ *функцыя* $f(x)$ *можа мець толькі пункты разрыву першага роду.*

□ Няхай для пэўнасці $f(x)$ — нарастальная на $[a, b]$ функцыя. Возьмем $x_0 \in (a, b)$ і разгледзім мноства $E = \{f(x) | x < x_0\}$. Мноства E ёсць абмежаванае зверху, паколькі на падставе няроўнасці (6.49) будзем мець для элементаў гэтага мноства $f(x) < f(x_0)$.

Паводле тэарэмы 1.2 існуе дакладная верхняя мяжа

$$\sup E = A \leqslant f(x_0). \qquad (6.51)$$

На аснове лемы пра дакладную мяжу з § 1.2 для ўсіх $x < x_0$ справядлівая няроўнасць:

$$f(x) \leqslant A \qquad (6.52)$$

і для кожнага дадатнага ε знойдзецца такі лік $x_1 < x_0$, што

$$f(x_1) > A - \varepsilon. \qquad (6.53)$$

Паколькі $f(x)$ — нарастальная функцыя, то з няроўнасці (6.53) вынікае правільнасць няроўнасці $f(x) > A - \varepsilon$ для ўсіх x, $x_1 \leqslant x < x_0$, якая супольна з умовай (6.52) прыводзіць да высновы, што

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

у дастаткова малым левым наваколлі пункта x_0:

$$|x_0 - x| < x_0 - x_1 = \delta.$$

Тады на падставе азначэння левабаковага ліміту і згодна з формулай (6.51)

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \leqslant f(x_0). \qquad (6.54)$$

Існаванне правабаковага ліміту даказваецца прыкладна такімі самымі разважаннямі. У выніку атрымаем

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = B \geqslant f(x_0),$$

што разам з судачыненнямі (6.54) прыводзіць да няроўнасцяў:

$$f(x_0-0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+0), \quad (6.55)$$

і доказ тэарэмы цалкам завершаны. ■

З а ў в а г а 6.8. З доказу тэарэмы 6.9 зразумела, што мноства значэнняў нарастальнай функцыі або з'яўляецца поўным адрэзкам $[f(a), f(b)]$, або — дапаўненнем да гэтага адрэзка нейкага мноства выкінутых прамежкаў. Калі x_0 — пункт разрыву функцыі $f(x)$, то няроўнасць (6.55) абавязкова будзе строгай хоць у адным месцы, напрыклад $f(x_0-0) < f(x_0)$, і апошняе азначае, што на прамежак $(f(x_0-0), f(x_0))$ не пападаюць значэнні функцыі $f(x)$. Калі ж x_0 — пункт непарыўнасці, то ў судачыненнях (6.55) будуць знакі роўнасці і нейкае наваколле пункта $f(x_0)$ цалкам запоўнена значэннямі $f(x)$. У выніку атрымліваем, што *мноства значэнняў манатоннай функцыі будзе адрэзкам у тым і толькі тым выпадку, калі $f(x)$ — непарыўная функцыя на адрэзку $[a, b]$.*

2°. Узаемна адваротныя функцыі. Няхай функцыя $y = f(x)$ з абсягам існавання X і абсягам значэнняў Y мае такую ўласцівасць, што розным значэнням $x \in X$ адпавядаюць розныя значэнні $y \in Y$; карацей пішуць:

$$(x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

У такім разе кажуць, што элементы мноства X пастаўлены ва *ўзаемна адназначную адпаведнасць* з элементамі мноства Y. Акрамя таго, мы маем рацыю памяняць ролі мностваў і падкрэсліць, што кожнаму элементу $y \in Y$ адпавядае пэўны элемент $x \in X$, г. зн. адначасова задаецца і другая функцыя $x = f^{-}(y)$, якая называецца *адваротнай для функцыі $y = f(x)$*. Зразумела, што адначасова функцыя $y = f(x)$ ёсць адваротная для функцыі $x = f^{-}(y)$.

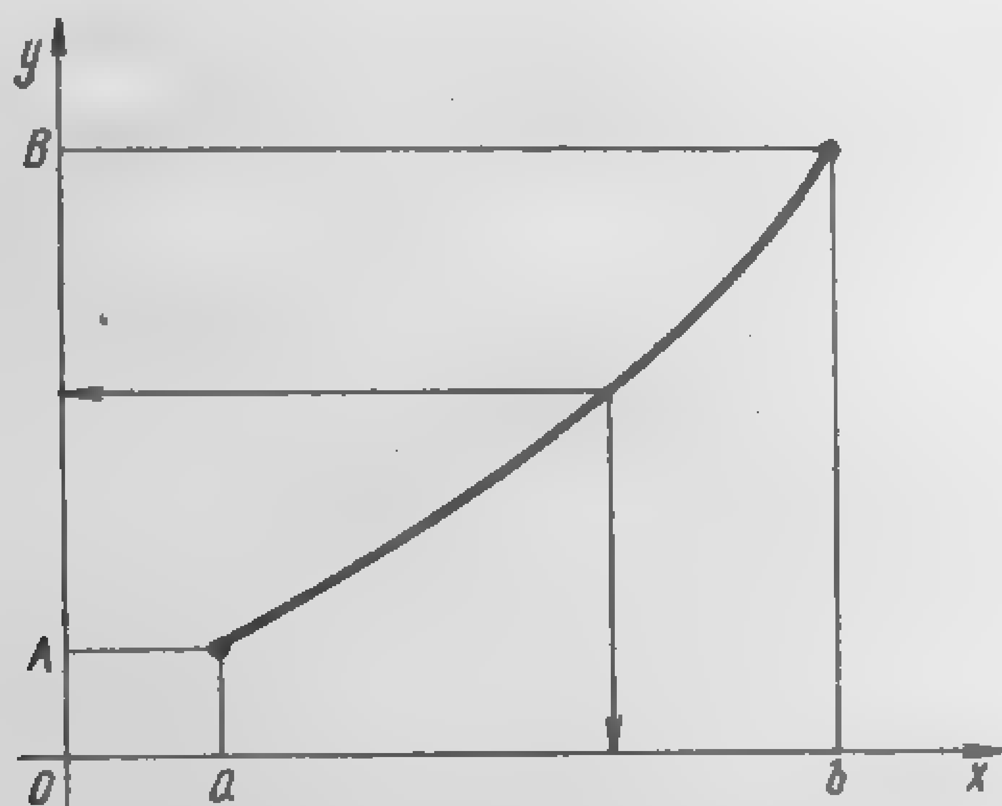
Азначэнне 6.14. *Калі элементы мностваў X і Y знаходзяцца ва ўзаемна адназначнай адпаведнасці, то вызначаныя функцыі $y = f(x)$ і $x = f^{-}(y)$ называюцца ўзаемна адваротнымі.*

Відавочна, што функцыі $y = f(x)$ і $x = f^{-}(y)$ маюць аднолькавы графік у прамавугольнай сістэме каардынат Oxy. Прытрымліваючыся правіла, што незалежная зменная абазначаецца літарай x, а значэнне функцыі — літарай y, мы пераважна будзем запісваць адваротную функцыю ў выглядзе $y = f^{-}(x)$.

Цяпер ужо графікі ўзаемна адваротных функцый $y=f(x)$, $y=f^{-}(x)$ на каардынатнай плоскасці xOy будуць размешчаны сіметрычна ў дачыненні да прамой лініі $y=x$.

***Тэарэма 6.10* (пра адваротную функцыю).** *Калі функцыя $f(x)$ ёсць непарыўная і строга манатонная на адрэзку $[a, b]$, то на мностве яе значэнняў $[A, B]$ існуе строга манатонная непарыўная адваротная функцыя.*

□ Лічым для пэўнасці, што $f(x)$ нарастае на адрэзку $[a, b]$, і тады маем $A=f(a)$, $B=f(b)$. Відавочна, што паміж $[a, b]$ і $[A, B]$ ёсць узаемна адназначная адпаведнасць (рыс. 6.10), чым і абумоўлена існаванне функцыі $x=f^{-}(y)$, якая нарастае на адрэзку $[A, B]$. Непарыўнасць, згодна з заўвагай 6.8, вынікае з таго, што мноства значэнняў адваротнай манатоннай функцыі ёсць адрэзак $[a, b]$. ■



Рыс. 6.10

3°. Непарыўнасць складанай функцыі. Няхай функцыя $y=f(x)$ вызначана на мностве X і абсяг яе значэнняў ёсць мноства Y, а функцыя $z=g(y)$ вызначана на мностве Y і абсяг яе значэнняў ёсць мноства Z. У такім разе кожнаму $x\in X$ будзе пастаўлена ў адпаведнасць пэўнае значэнне $z\in Z$, г. зн. зададзена так званая *складаная функцыя*

$$Z=g(f(x))\overset{\text{def}}{=}F(x),$$

якую інакш называюць *суперпазіцыяй дзвюх функцый.*

Тэарэма 6.11. *Калі функцыя $y=f(x)$ ёсць непарыўная ў пункце x_0 і функцыя $z=g(y)$ ёсць непарыўная ў пункце $y_0=f(x_0)$, то складаная функцыя $F(x)$ таксама непарыўная ў пункце x_0.*

□ З непарыўнасці функцый $y=f(x)$ і $z=f(y)$ у пунктах $x=x_0$ і $y=y_0$ на аснове крытэра Гайнэ будзем мець:

$$\forall(x_n)\left(\lim_{n\to\infty} x_n=x_0\right)\Rightarrow\left(\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)=y_0\right),$$

$$\forall(y_n)\left(\lim_{n\to\infty} y_n=y_0\right)\Rightarrow\left(\lim_{n\to\infty} g(y_n)=g(y_0)\right),$$

адкуль вынікае, што

$$\forall(x_n)\left(\lim_{n\to\infty} x_n=x_0\right)\Rightarrow\left(\lim_{n\to\infty} g(y_n)=\lim_{n\to\infty} g(f(x_n))=\right.$$
$$\left.=g(y_0)=g(f(x_0))\right). \tag{6.56}$$

У дадатак да судачынення (6.56) застаецца скарыстаць крытэр Гайнэ ў другі бок. ■

Разгледзім непарыўнасць астатніх элементарных функцый.

1. *Лагарыфмічная функцыя* $y=\log_e x \overset{\text{def}}{=} \ln x$ *існуе, манатонна нарастае і непарыўная на мностве* $(0, +\infty)$.

□ Доказ сцверджання вынікае з тэарэмы 6.10, паколькі лагарыфмічная функцыя ёсць адваротная ў дачыненні да экспанентавай функцыі $y=e^x$. ■

2. *Паказнікавая функцыя* $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, *ёсць непарыўная на мностве рэчаісных лікаў.*

□ Сапраўды, згодна з тоеснасцю $y=a^x=(e^x)^{\ln a}$, патрэбна скарыстаць непарыўнасць экспаненты і тэарэму пра непарыўнасць складанай функцыі. ■

3. *Ступеневая функцыя* $y=x^r$, $r\in(-\infty, +\infty)$, *ёсць непарыўная на мностве* $(0, +\infty)$.

□ Яна азначаецца ў агульным выпадку як складаная функцыя $y=e^{r\ln x}$, і яе непарыўнасць даказваецца на падставе тэарэмы 6.11. ■

4. *Адваротныя трыганаметрычныя функцыі ёсць непарыўныя на мностве іх існавання:*

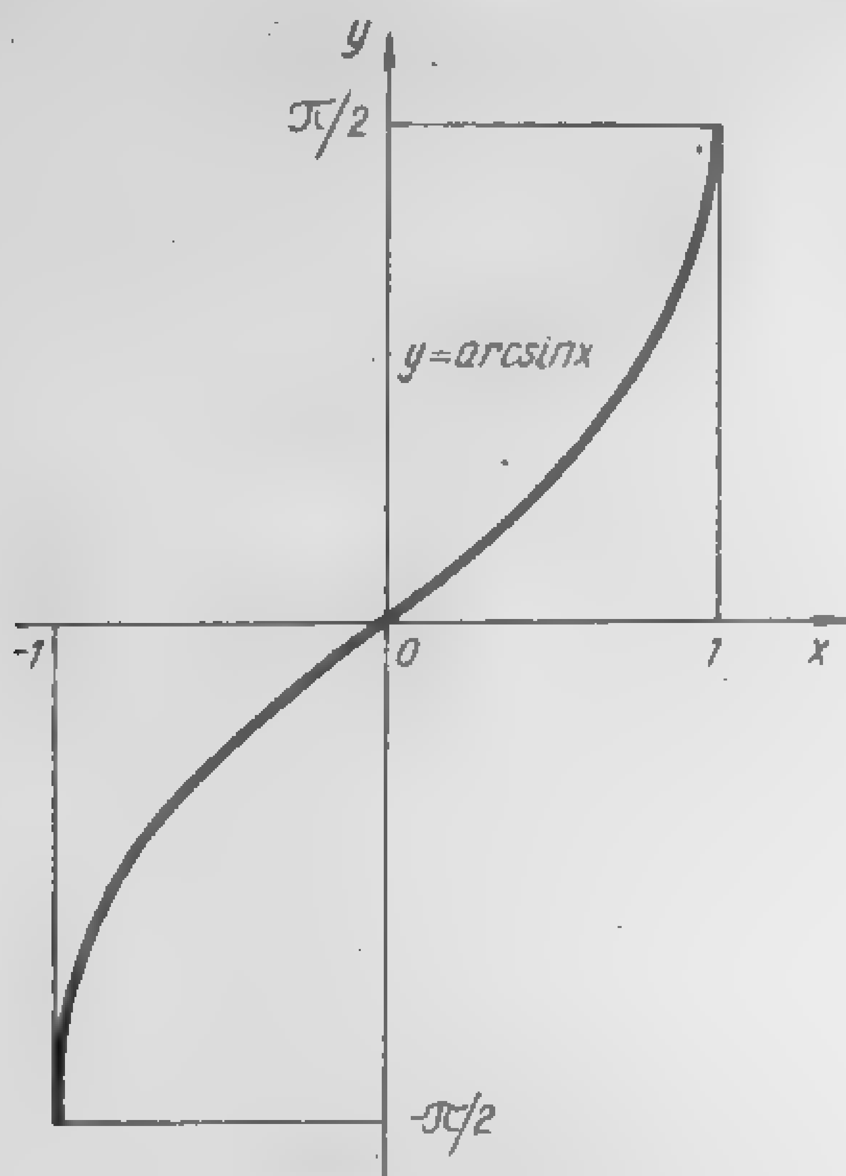
$$y=\arcsin x,\ x\in[-1,\ 1],\ y=\arccos x,\ x\in[-1,\ 1],$$
$$y=\operatorname{arctg} x,\ x\in(-\infty,\ +\infty),\ y=$$
$$=\operatorname{arcctg} x,\ x\in(-\infty,\ +\infty).$$

□ Доказ сцверджання грунтуецца на скарыстанні тэарэмы пра непарыўнасць адваротнай функцыі.

Возьмем для пэўнасці функцыю $y=\sin x$, яна ёсць непарыўная для ўсіх x, $x\in(-\infty, +\infty)$. Нам патрэбна ўзяць такі адрэзак, на якім функцыя $y=\sin x$ з'яўляецца манатоннай. Адпаведным адрэзкам будзе, у прыватнасці, адрэзак $[-\pi/2, \pi/2]$, на ім $y=\sin x$ нарастае ад -1 да 1 і, значыць, існуе адваротная непарыўная функцыя на

адрэзку $[-1, 1]$. Графік функцыі $y=\arcsin x$ пададзены на рыс. 6.11. ■

Заўвага 6.9. Беручы пад увагу элементарныя функцыі, якія мы даследавалі на непарыўнасць у папярэднім і гэтым параграфах, прыходзім да высновы: *усе элементарныя функцыі ёсць непарыўныя на абсягу іх існавання.*



Рыс. 6.11

4°. Параўнанне функцый. Веданне ўласцівасцяў непарыўных функцый робіць больш лёгкай задачу знаходжання лімітаў складаных функцый у пункце, паколькі ў выпадку непарыўнасці неабходна толькі вылічыць значэнне функцыі ў адпаведным пункце. Значныя асаблівасці ўзнікаюць у тых выпадках, калі ліміт адной з простых функцый у дадзеным пункце роўны нулю або бясконцасці.

Функцыя $f(x)$ называецца *бясконца малой функцыяй (БМФ) пры* $x \to a$ у тым выпадку, калі $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, *і бясконца вялікай функцыяй (БВФ) пры* $x \to a$, калі $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Бясконца малыя функцыі маюць такія самыя ўласцівасці, як і бясконца малыя паслядоўнасці. Пры вызначэнні ліміта дзелі дзвюх БМФ узнікае нявызначанасць тыпу

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{0}{0},$$

якую патрэбна раскрываць з улікам хуткасці імкнення БМФ да нуля.

Азначэнне 6.15. *БМФ $f(x)$ і $g(x)$ маюць аднолькавы парадак пры $x \to a$, калі*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=C,\ C\neq 0,\ C\neq\infty. \tag{6.57}$$

Калі $C=1$, то БМФ называюцца эквівалентнымі пры $x\to a$.

Азначэнне 6.16. *БМФ $f(x)$ мае большы парадак малечыні ў параўнанні з БМФ $g(x)$ пры $x\to a$, калі*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

Ужываюць таксама абазначэнне $f(x)=o(g(x))$ пры $x\to a$, што азначае «$f(x)$ ёсць БМФ большага парадку пры $x\to a$ у параўнанні з $g(x)$». Чытаецца: «$f(x)$ ёсць *o* малое ад $g(x)$ пры $x\to a$».

Зразумела, што калі $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, то БМФ $g(x)$ пры $x\to a$ мае большы парадак малечыні. Гэта магчыма запісаць у выглядзе

$$g(x)=o(f(x)).$$

Скарыстоўваюць таксама запіс

$$f(x)=O(g(x)),\quad x\to a, \tag{6.58}$$

у тым выпадку, калі ў наваколлі пункта $x=a$ выконваецца няроўнасць $|f(x)|\leqslant M|g(x)|$, дзе M — нейкая канстанта. Роўнасць (6.58) чытаецца: «$f(x)$ ёсць *O* вялікае ад $g(x)$ пры $x\to a$».

Напрыклад, функцыі $\sin x$ і x эквівалентныя пры $x\to 0$, паколькі вядома, што $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, а функцыя $1-\cos x$ мае большы парадак малечыні ў параўнанні з x пры $x\to 0$.

Аналагічным спосабам параўноўваюцца і БВФ пры $x\to a$. У прыватнасці, $f(x)$ — БВФ большага парадку пры $x\to a$ у параўнанні з БВФ $g(x)$, калі

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

У такім выпадку магчыма ўжываць і запіс

$$g(x)=o(f(x)),\quad x\to a.$$

Калі для дзвюх БВФ $f(x)$ і $g(x)$ выконваецца роўнасць (6.57), то кажуць, што яны маюць аднолькавы парадак у наваколлі пункта a.

Нарэшце заўважым, што сустракаецца і неабходнасць параўнання функцый для вялікіх значэнняў аргумента, г. зн. для $x \to +\infty$ ці $x \to -\infty$. Усе вышэй напісаныя правілы параўнання застаюцца такімі ж з адной розніцай, што замест $x \to a$ патрэбна пісаць $x \to +\infty$ ці $x \to -\infty$.

Цікава разглядаць такія выпадкі, калі адна з дзвюх функцый, якія параўноўваюцца, мае зусім простую будову. Напрыклад, гэта ёсць лінейная функцыя.

Азначэнне 6.17. *Прамая* $y = kx + b$, $k, b \in \mathbf{R}$, *называецца нахільнай асімптотай да графіка функцыі* $y = f(x)$ *пры* $x \to \infty$, *калі праўдзіцца роўнасць*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \qquad (6.59)$$

дзе $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

Відавочна, што з азначэння 6.17 вынікае: графік функцыі $y = f(x)$ набліжаецца да графіка прамой $y = kx + b$, калі x імкнецца да бясконцасці.

У сувязі з дадзеным азначэннем паўстае пытанне, як знайсці параметры k і b у выпадку існавання нахіленай асімптоты. На падставе роўнасці (6.59) і ўласцівасцяў лімітаў маем:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k.$$

У сваю чаргу атрымліваем

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

З а ў в а г а 6.10. Аналагічна азначаецца нахільная асімптота і даказваюцца формулы знаходжания лікаў k, b у выпадку $x \to -\infty$.

Такім чынам, параметры k і b вылічаюцца формуламі:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx). \qquad (6.60)$$

Заўважым цяпер, што з роўнасці (6.59) вынікае

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{kx + b} = 1,$$

іншымі словамі, функцыі $f(x)$ і $kx+b$ эквівалентныя пры $x\to+\infty$.

Напрыклад, функцыя

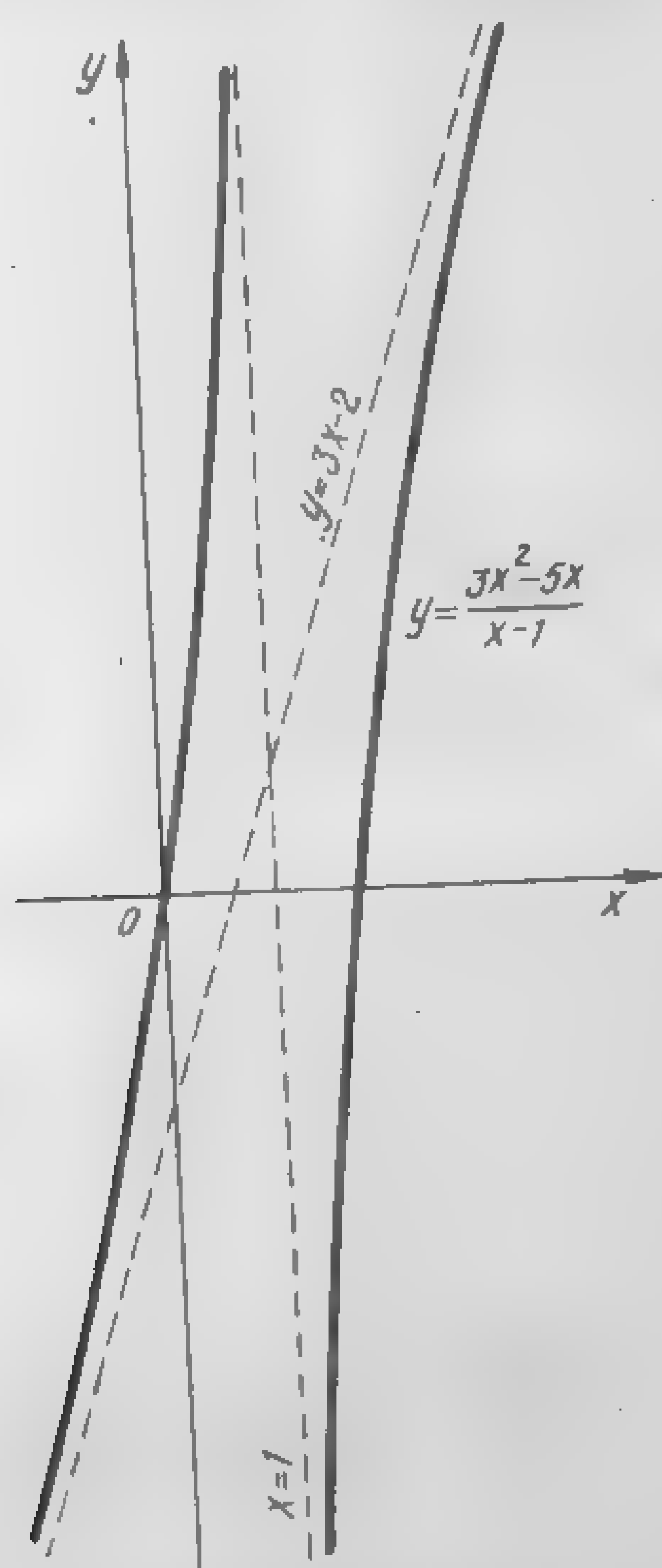
$$y=\frac{3x^2-5x}{x-1}=3x-2-\frac{2}{x-1}$$

мае нахільную асімптоту пры $x\to\infty$. Сапраўды, згодна са стасункамі (6.60)

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x}{(x-1)x}=3,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5x}{x-1}-3x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x-1}=-2.$$

Акрамя нахільнай асімптоты $y=3x-2$, для пададзенай функцыі існуе вертыкальная асімптота $x=1$ (рыс. 6.12).



Рыс. 6.12

На дакончанне заўважым, што пры знаходжанні лімітаў здабытку (дзелі) некалькіх функцый некаторыя множнікі карысна замяняць эквівалентнымі функцыямі.

Напрыклад,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}.$$

Падкрэслім, што пры вылічэнні лімітаў сумы (розніцы) такую замену, увогуле кажучы, нельга скарыстоўваць.

6.7. ТЭАРЭМЫ ПРА ФУНКЦЫІ, НЕПАРЫЎНЫЯ НА АДРЭЗКУ

1°. Прамежкавыя значэнні непарыўных функцый. Дапусцім, што функцыя $y=f(x)$ вызначана на адрэзку $[a, b]$.

Лема 6.2 **(пра захаванне знаку).** *Калі функцыя $y=f(x)$ ёсць непарыўная ў пункце $x=x_0$ і $f(x_0)\neq 0$, то існуе такое наваколле пункта x_0, што для ўсіх значэнняў аргумента з гэтага наваколля функцыя $f(x)$ захоўвае знак, аднолькавы са знакам $f(x_0)$.*

□ Няхай x_0 ёсць унутраны пункт адрэзка $[a, b]$. На падставе азначэнняў непарыўнасці і ліміта функцыі ў пункце для ўсякага дадатнага ліку ε знойдзецца такое значэнне $\delta>0$, што з няроўнасці $|x-x_0|<\delta$ вынікае няроўнасць

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

якую можна перапісаць у выглядзе

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon. \qquad (6.61)$$

Возьмем у якасці ε такі дадатны лік, каб выконвалася няроўнасць $\varepsilon<|f(x_0)|$. У такім разе абодва лікі $f(x_0)-\varepsilon$ і $f(x_0)+\varepsilon$ будуць мець знак, аднолькавы са знакам $f(x_0)$, і, згодна з няроўнасцямі (6.61), ва ўсім наваколлі

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

функцыя $f(x)$ захоўвае знак ліку $f(x_0)$.

У выпадку, калі x_0 супадае з пунктам a ці b, розніца ў доказе толькі тая, што патрэбна разглядаць аднабаковыя наваколлі. ■

Тэарэма 6.12. *Калі функцыя $y=f(x)$ ёсць непарыўная на адрэзку $[a, b]$ і ў канцах адрэзка мае розныя знакі, то знойдзецца такі пункт ξ, $\xi\in(a, b)$, у якім $f(\xi)=0$.*

□ Няхай для пэўнасці $f(a)<0$ і $f(b)>0$. Разгледзім мноства $E=\{x|\ f(x)<0\}$ усіх значэнняў x з адрэзка $[a, b]$, для якіх $f(x)<0$. Відавочна, што $a\in E$, і, значыць, мноства E непустое. Паколькі $f(b)>0$, то E абмежаванае зверху, напрыклад, лікам b, і, згодна з тэарэмай 1.2, у мноства E існуе дакладная верхняя мяжа. Абазначым яе літарай ξ.

На падставе лемы 6.2 прыходзім да высновы, што існуе правае наваколле пункта a і левае наваколле пункта b, для якіх адпаведна выконваюцца няроўнасці $f(x)<0$ і $f(x)>0$, і, значыць, пункт ξ ёсць унутраны пункт адрэзка $[a, b]$. Для гэтага пункта і будзе выконвацца роўнасць

$$f(\xi)=0. \tag{6.62}$$

Калі дапусціць процілеглае, што $f(\xi)\neq 0$, то зноў на аснове лемы 6.2 знойдзецца наваколле $\xi-\delta<x<\xi+\delta$, ва ўсіх пунктах якога $f(x)$ захоўвае пэўны знак. Але апошняе сцверджанне ёсць немагчымае, паколькі на ўсім правым інтэрвале $(\xi, \xi+\delta)$ маем $f(x)\geqslant 0$, а на левым інтэрвале $\xi-\delta<x<\xi$ паводле азначэння дакладнай верхняй мяжы знойдзецца хаця б адно значэнне, для якога $f(x)<0$. ■

Тэарэма 6.13. *Няхай $y=f(x)$ ёсць непарыўная на $[a, b]$ функцыя, C — адвольны лік, размешчаны паміж значэннямі $f(a)$ і $f(b)$. У такім разе на адрэзку $[a, b]$ знойдзецца такі пункт ξ, што $f(\xi)=C$.*

□ Патрэбна разглядаць толькі выпадак, калі $f(a)\neq f(b)$ і лік C не супадае з $f(a)$ і $f(b)$. Няхай, для пэўнасці, $f(a)<C<f(b)$. Дапаможная функцыя $\varphi(x)=f(x)-C$ ёсць непарыўная як розніца дзвюх непарыўных функцый і ў канцавых пунктах мае значэнні розных знакаў:

$$\varphi(a)=f(a)-C<0, \quad \varphi(b)=f(b)-C>0.$$

На аснове папярэдняй тэарэмы на інтэрвале (a, b) існуе пункт ξ, такі, што $\varphi(\xi)=f(\xi)-C=0$, г. зн. $f(\xi)=C$. ■

2°. Абмежаванасць функцыі, непарыўнай на адрэзку. З непарыўнасці функцыі на адрэзку вынікае, што яна абмежаваная і дасягае сваіх дакладных межаў.

***Тэарэма 6.14* (першая тэарэма Ваерштраса).** *Калі функцыя $y=f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a, b]$, то яна ёсць абмежаваная на гэтым адрэзку.*

□ Дакажам абмежаванасць зверху; абмежаванасць знізу даказваецца аналагічна.

Дапусцім адваротнае, што $f(x)$ ёсць неабмежаваная зверху функцыя. Гэта азначае, што для кожнага натуральнага n знойдзецца хоць бы адзін пункт $x_n\in[a, b]$, для якога $f(x_n)>n$. Іншымі словамі, існуе паслядоўнасць значэнняў (x_n), для якой адпаведная паслядоўнасць $(f(x_n))$ з'яўляецца бясконца вялікай. На падставе тэарэмы Бальцана — Ваерштраса з паслядоўнасці (x_n) можна вылучыць падпаслядоўнасць, збежную да пункта $\xi\in[a,$

b]. Калі мы абазначым гэтую падпаслядоўнасць (x_{n_k}), то паводле крытэра Гайнэ

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(\xi).$$

Але апошняе сцверджанне ёсць немагчымае, паколькі падпаслядоўнасць $(f(x_{n_k}))$ вылучана з бясконца вялікай паслядоўнасці, і, значыць, сама з'яўляецца бясконца вялікай. ■

Заўвага 6.11. Для інтэрвала (ці паўінтэрвала) сцверджанне, аналагічнае тэарэме 6.14, ужо не праўдзіцца.

Напрыклад, функцыя $y=1/x$ ёсць непарыўная на інтэрвале (0, 1), але не з'яўляецца абмежаванай на гэтым інтэрвале, паколькі для паслядоўнасці $(x_n)=(1/n)$ адпаведная паслядоўнасць значэнняў функцыі $(y_n)=(n)$ з'яўляецца БВФ.

Заўвага 6.12. Калі функцыя $y=f(x)$ вызначана на адрэзку $[a, b]$ і існуе ліміт $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то $f(x)$ ёсць лакальна абмежаваная функцыя, г. зн. існуе наваколле пункта x_0, на якім $f(x)$ ёсць абмежаваная. Сапраўды, сказанае вынікае непасрэдна з азначэння ліміту функцыі ў пункце.

Няхай функцыя $y=f(x)$ ёсць непарыўная на некатарым адрэзку $[a, b]$. Тады на падставе тэарэмы 6.14 мноства яе значэнняў ёсць абмежаванае зверху і знізу. На аснове тэарэмы 1.2 мноства значэнняў $\{f(x)|\ x\in[a, b]\}$ мае дакладныя верхнюю M і ніжнюю m межы. Дакажам, што гэтыя межы дасягаюцца.

Тэарэма 6.15 **(другая тэарэма Ваерштраса).** *Калі функцыя $y=f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a, b]$, то яна дасягае на гэтым адрэзку сваіх дакладных верхняй і ніжняй межаў.*

□ Удакладнім, гутарка ідзе пра тое, што на адрэзку $[a, b]$ знойдуцца такія пункты x_1 і x_2, што $f(x_1)=M$ і $f(x_2)=m$.

Ажыццявім доказ у выпадку верхняй дакладнай мяжы. Дапусцім процілеглае, што функцыя $f(x)$ ні ў адным пункце не прымае значэння, роўнага M, значыць, для ўсіх пунктаў адрэзка $[a, b]$ выконваецца няроўнасць $f(x)<M$. У такім разе функцыя

$$\varphi(x)=\frac{1}{M-f(x)}$$

мае толькі дадатныя значэнні на адрэзку $[a, b]$. Паколькі назоўнік $M-f(x)\neq 0$ ёсць непарыўная функцыя, то, згодна з уласцівасцю непарыўнасці дзелі, функцыя $\varphi(x)$ так-

сама непарыўная на $[a, b]$. На падставе тэарэмы 6.14 існуе дадатны лік B, такі, што

$$\varphi(x)=\frac{1}{M-f(x)}\leqslant B,$$

адкуль з улікам няроўнасці $M-f(x)>0$ вынікае

$$f(x)\leqslant M-\frac{1}{B}.$$

Апошняя няроўнасць выконваецца для ўсіх x з адрэзка $[a, b]$, што супярэчыць таму, што M — дакладная верхняя мяжа. ■

Паколькі праўдзіцца, што непарыўная на адрэзку $[a, b]$ функцыя $f(x)$ дасягае сваіх дакладных верхняй і ніжняй межаў у некаторых пунктах, то мы маем рацыю называць дакладную верхнюю мяжу ***максімальным значэннем функцыі***, а дакладную ніжнюю мяжу — яе ***мінімальным значэннем на адрэзку*** $[a, b]$.

7. ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНАЕ ЗЛІЧЭННЕ ФУНКЦЫЙ АДНОЙ ЗМЕННАЙ

Калі даводзіцца на практыцы вывучаць зменныя велічыні, то адным з найважнейшых пытанняў, што пры гэтым паўстаюць, з'яўляецца задача пра хуткасць змены разгляданай велічыні. Той раздзел матэматычнага аналізу, які прысвечаны не толькі развязанню гэтай задачы ў самым агульным выглядзе, але і высновам, што вынікаюць з яе развязання, называюць *дыферэнцыяльным злічэннем*. Яго вывучэннем і зоймемся далей.

7.1. ВЫТВОРНАЯ І ДЫФЕРЭНЦЫЯЛ ФУНКЦЫІ

1°. Азначэнне вытворнай. Няхай функцыя $y=f(x)$ ёсць вызначаная на пэўным прамежку P і пункт $x_0 \in P$.

Азначэнне 7.1. *Калі існуе ліміт*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

то гэты ліміт называецца вытворнаю функцыі $y=f(x)$ у пункце x_0 і абазначаецца $f'(x_0)$ або $y'(x_0)$, г. зн.

$$f'(x_0)=y'(x_0)\overset{\text{def}}{=}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \qquad (7.1)$$

Ужываюцца і іншыя абазначэнні для вытворнай у пункце. Часам вытворную абазначаюць f'_x або y'_x, каб падкрэсліць, што вытворную функцыі $f(x)$ вылічаюць у кожным пункце x з прамежку існавання вытворнай. У тым выпадку, калі вытворная функцыі $f(x)$ разглядаецца менавіта ў пункце $x=x_0$, пішуць $f'_x|_{x=x_0}$ або $f'(x)|_{x=x_0}$.

Калі розніца $x-x_0\overset{\text{def}}{=}\Delta x$ ёсць прырост аргумента ў пункце x_0, а $f(x)-f(x_0)\overset{\text{def}}{=}\Delta y=\Delta f$ — прырост функцыі, што адпавядае разгляданаму прыросту аргумента Δx, то роўнасць (7.1) можна падаць у выглядзе

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Азначэнне 7.2. *Функцыя $y=f(x)$ называецца дыферэнцавальнаю ў пункце $x=x_0$, калі існуе вытворная $f'(x_0)$. Функцыя, дыферэнцавальная ў кожным пункце x мноства X, называецца дыферэнцавальнаю на мностве X. Аперацыя вылічэння вытворнай функцыі называецца дыферэнцаваннем.*

Прыклад 7.1. Вылічыць вытворныя функцый $f(x)=C$, $C=\text{const}$, і $f(x)=x$ у кожным пункце $x\in\mathbf{R}$.

$\triangleright$ Няхай $f(x)\equiv C$ і x — адвольны пункт лікавай восі. На падставе азначэння вытворнай пасля відавочных вылічэнняў атрымаем:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0.$$

Такім чынам, вытворная сталай функцыі роўная нулю ў кожным пункце $x\in\mathbf{R}$, $(C)'=0$.

Калі $f(x)=x$, то аналагічна атрымаем:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

так што вытворная тоеснай функцыі ў кожным пункце $x\in\mathbf{R}$ роўная адзінцы, $(x)'=1$. ◀

З а ў в а г а 7.1. Калі прамежак P ёсць замкнёны, у прыватнасці $P=[a, b]$ і $x_0=a$, то ліміт у формуле (7.1) трэба разумець як аднабаковы:

$$f'(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Аналагічна калі $x_0=b$, то

$$f'(b)=\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Азначэнне 7.3. *Калі існуюць аднабаковыя ліміты*

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

то іх называюць адпаведна левай і правай вытворнымі функцыі ў пункце $x_0\in P$ і абазначаюць $f'_-(x_0)$ і $f'_+(x_0)$.

З параўнання азначэнняў 7.1 і 7.3, а таксама з азначэнняў ліміта функцыі (гл. заўвагу 6.5) вынікаюць наступныя сцверджанні:

1) *калі функцыя $f(x)$ мае ў пункце x_0 вытворную $f'(x_0)$, то гэтая функцыя мае ў пункце x_0 як левую, так і правую вытворныя, прычым $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$;*

2) *калі функцыя $f(x)$ мае ў пункце x_0 левую і пра-*

вую вытворныя і гэтыя вытворныя роўныя, то функцыя $f(x)$ мае ў пункце x_0 вытворную, прычым $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

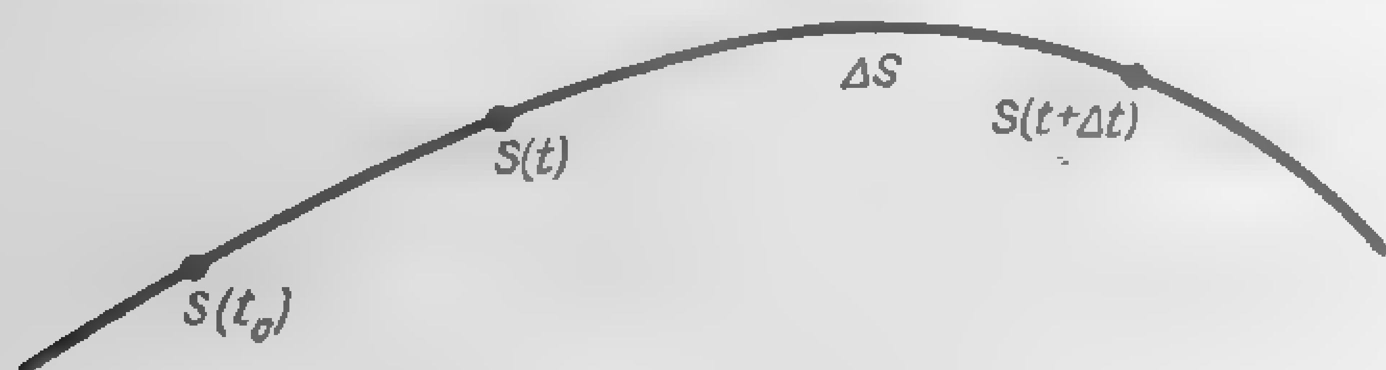
Пададзім прыклад функцыі, якая не мае вытворнай у пункце. Няхай $f(x)=|x|$. У пункце $x=0$ існуюць левая і правая вытворныя:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x}=1.$$

Паколькі $f'_-(0)\neq f'_+(0)$, то ў пункце $x=0$ функцыя не мае вытворнай.

2°. Фізічны сэнс вытворнай. Няхай $s=s(t)$ ёсць даўжыня шляху, які праходзіць матэрыяльны пункт за час t, што адлічваецца ад пачатковага моманту t_0, $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$ — даўжыня шляху, пройдзенага з моманту t за прамежак часу Δt (рыс. 7.1). Велічыню $\Delta s/\Delta t$

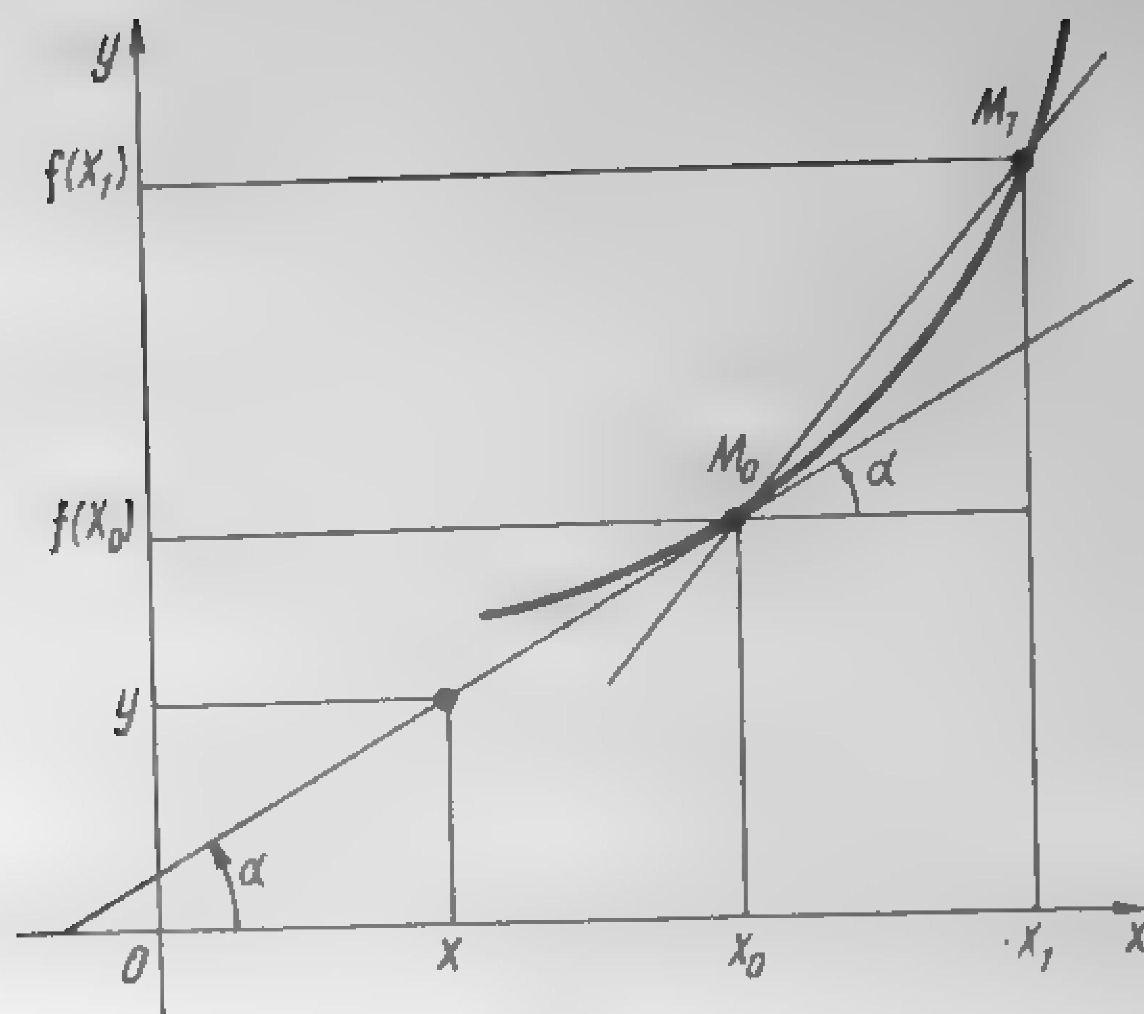


Рыс. 7.1

называюць у фізіцы *сярэдняй хуткасцю руху* за прамежак часу Δt, які адлічваецца ад моманту часу t, і абазначаюць $v_c=\Delta s/\Delta t$. Ліміт $\lim\limits_{\Delta t\to 0} v_c=v$ называецца велічынёй *імгненнай хуткасці руху ў момант часу t*. Такім чынам, *вытворная $s'(t)=v$ ёсць імгненная хуткасць руху пункта ў момант часу t.*

Калі $q=q(t)$ ёсць колькасць электрычнасці, што працякае праз папярочнае сечыва праваднiка за час t, то $\Delta q=q(t+\Delta t)-q(t)$ ёсць колькасць электрычнасці, што працякае праз гэтае сечыва за прамежак часу ад моманту t да моманту $t+\Delta t$. Тасунак $\Delta q/\Delta t$ называецца *сярэдняю сілаю току за прамежак часу* Δt і абазначаецца I_c. Ліміт $\lim\limits_{\Delta t\to 0} I_c=I$ называецца *сілаю току ў дадзены момант часу t*. Такім чынам, *вытворная $q'(t)=I$ ёсць сіла току ў момант часу t.*

3°. Геаметрычны сэнс вытворнай. Няхай функцыя $f(x)$ мае ў пункце x_0 вытворную $f'(x_0)$. Прамую M_0M_1 (рыс. 7.2), што праходзіць праз пункты $M_0=(x_0;\ f(x_0))$



Рыс. 7.2

і $M_1=(x_1; f(x_1))$ графіка функцыі $y=f(x)$, будзем называць *сечнаю*. Яе раўнанне мае выгляд

$$y=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0). \tag{7.2}$$

Вуглавы каэфіцыент $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ сечнай пры $x_1 \to x_0$ імкнецца да $f'(x_0)$, і таму гранічнае становішча сечнай вызначаецца раўнаннем

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{7.3}$$

Атрыманыя формулы можна растлумачыць наступным чынам: калі x_1 набліжаецца да x_0, то пункт M_1 графіка функцыі $y=f(x)$ набліжаецца да пункта M_0, пры гэтым сечная (7.2) набліжаецца да прамой (7.3).

Прамая (7.3) называецца *датычнаю да графіка функцыі* $y=f(x)$ *у пункце* M_0. Вуглавы каэфіцыент датычнай (7.3) (тангенс вугла α паміж датычнаю і воссю Ox) ёсць $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$.

Такім чынам, *вытворная* $f'(x_0)$ *ёсць вуглавы каэфіцыент датычнай да графіка функцыі* $y=f(x)$ *у пункце* $(x_0; f(x_0))$.

Паняцце датычнай дае магчымасць увесці азначэнне вугла паміж дзвюма лініямі, якія перасякаюцца. Менавіта *вуглом паміж дзвюма крывымі* называюць вугал паміж іх датычнымі ў пункце перасячэння. У прыватнасці, дзве крывыя называюцца *артаганальнымі*, калі яны перасякаюцца пад прамым вуглом.

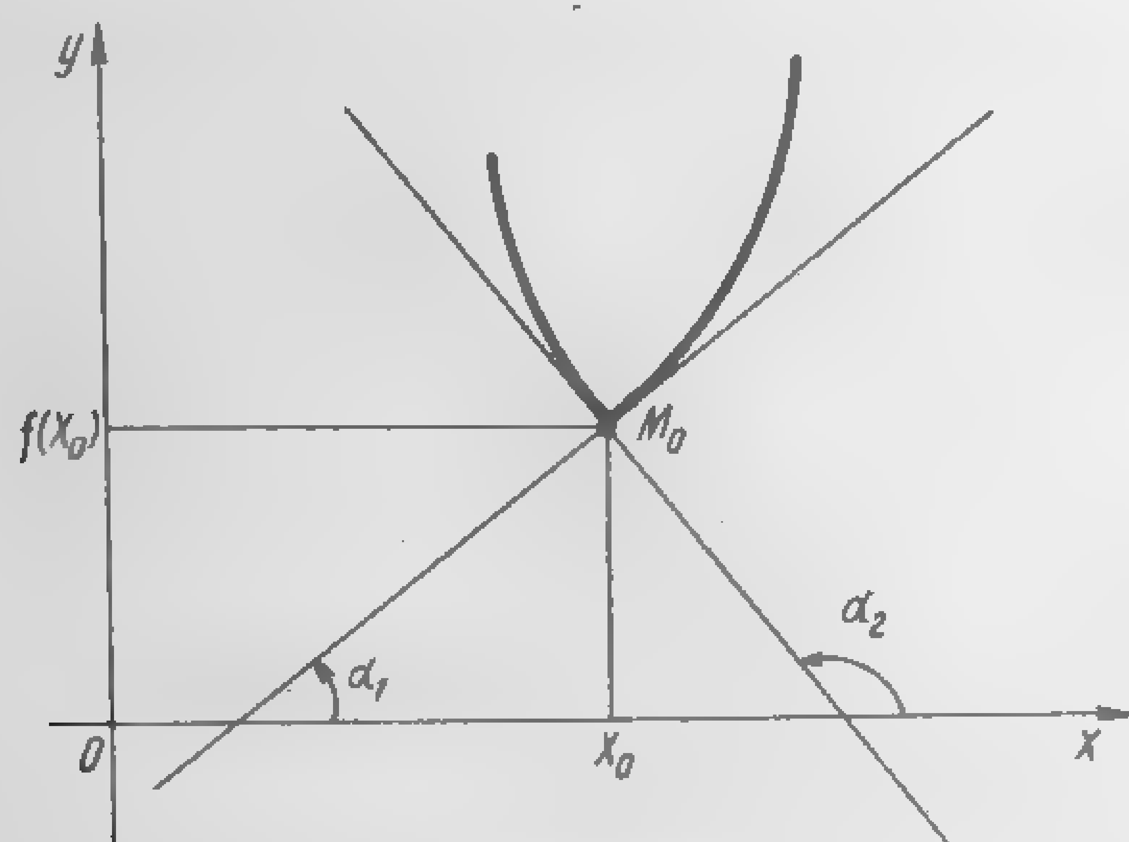
Прамая, што праходзіць праз пункт $(x_0; f(x_0))$ і перпендыкулярная датычнай да крывой $y=f(x)$ у гэтым пункце, называецца *нармаллю крывой*. Паколькі вуглавыя каэ-

фіцыенты перпендыкулярных прамых адваротныя па велічыні і процілеглыя па знаку, то

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

ёсць *раўнанне нармалі да крывой $y=f(x)$ у пункце* $(x_0;\ f(x_0))$.

Заўвага 7.2. Няхай функцыя $f(x)$ мае ў пункце x_0 няроўныя паміж сабою аднабаковыя вытворныя. У такім разе вядуць гаворку пра левую і правую датычныя да графіка функцыі $y=f(x)$ у пункце $M_0(x_0;\ f(x_0))$ з вуглавымі каэфіцыентамі $\operatorname{tg}\alpha_1=f'_+(x_0)$ і $\operatorname{tg}\alpha_2=f'_-(x_0)$ (рыс. 7.3). Пункт M_0 з'яўляецца пры гэтым *вуглавым пунктам графіка функцыі* $y=f(x)$.



Рыс. 7.3

Калі функцыя $y=f(x)$ ёсць непарыўная ў пункце $x=x_0$ і

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty,$$

то кажуць, што функцыя $f(x)$ мае ў пункце x_0 *бясконцую вытворную.*

Зазначым, што паняцце дыферэнцавальнасці функцыі замацоўваецца за тымі функцыямі, для якіх ліміт (7.1) існуе як канечны. Функцыі з бясконцаю вытворнаю будзем лічыць недыферэнцавальнымі.

Няхай функцыя $y=f(x)$ мае ў пункце $x=x_0$ бясконцую вытворную. У такім разе гранічнае становішча сечнай (7.2) пры $x_1\to x_0$ вызначаецца раўнаннем $x=x_0$. Сапраўды, калі перапісаць раўнанне (7.2) у выглядзе

$$x=x_0+\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}(y-f(x_0)),$$

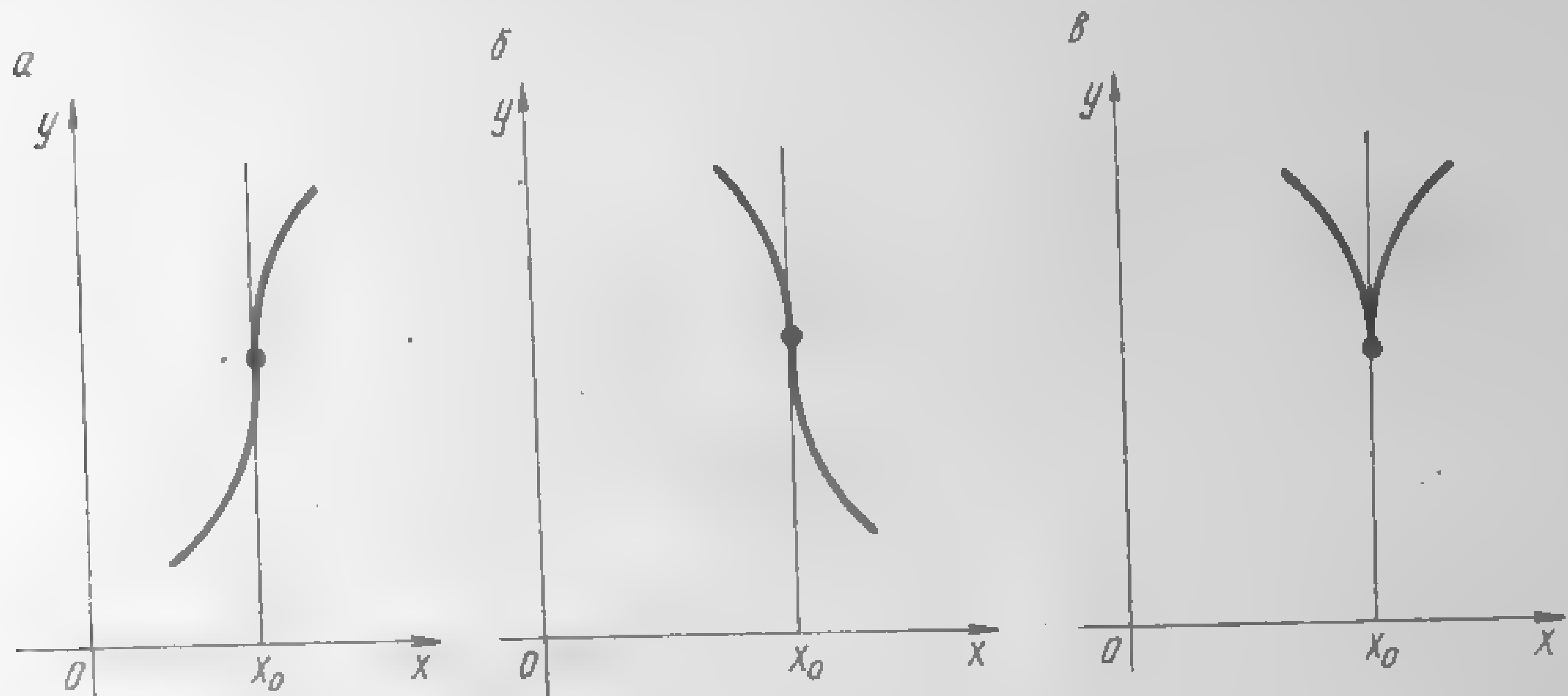
то лёгка заўважыць, што

$$\lim_{x_1\to x_0}\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}=0.$$

У разгляданым выпадку датычная да графіка функцыі f у пункце $(x_0; f(x_0))$ ёсць паралельная восі Oy. На рыс. 7.4, a — $в$ паказаны выпадкі:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$; б) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$.



Рыс. 7.4

Надалей пад вытворнаю заўсёды будзем разумець канечную вытворную, калі спецыяльна не абгаворваецца процілеглае.

4°. Дыферэнцыял функцыі. Няхай функцыя $y=f(x)$ ёсць дыферэнцавальная ў пункце $x=x_0$. З формулы (7.1) вынікае, што розніца

$$\alpha(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$$

ёсць бясконца малая функцыя пры $x\to x_0$. Апошнюю роўнасць можна перапісаць у выглядзе

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0), \tag{7.4}$$

дзе $o(x-x_0)=\alpha(x)(x-x_0)$ — бясконца малая функцыя больш высокага парадку, чым $x-x_0$ пры $x\to x_0$. Такім чынам, усякая дыферэнцавальная ў пункце x_0 функцыя $f(x)$ мае выяўленне паводле формулы (7.4).

Няхай Δx ёсць прырост аргумента ў пункце x_0, а Δy — адпаведны прырост функцыі, тады роўнасць (7.4) можна падаць у выглядзе

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x). \tag{7.5}$$

Заўвага 7.3. Калі прырост Δy функцыі $y = f(x)$ у пункце $x = x_0$ можна падаць у выглядзе

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0),$$

дзе A ёсць канстанта, а $f(x)$ — дыферэнцавальная ў пункце x_0 функцыя, то $A = f'(x_0)$.

□ Сапраўды,

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{A(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left(A + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \right) = A. \blacksquare$$

Тэарэма 7.1. *Калі функцыя $f(x)$ ёсць дыферэнцавальная ў пэўным пункце, то яна непарыўная ў гэтым пункце.*

□ Няхай функцыя $f(x)$ ёсць дыферэнцавальная ў пункце x_0. Згодна з роўнасцю (7.4), маем:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x\to x_0} f'(x_0)(x - x_0) + \lim_{x\to x_0} o(x - x_0) = f(x_0),$$

што азначае непарыўнасць функцыі $f(x)$ у пункце x_0. ■

Заўважым, што адваротнае да тэарэмы 7.1 сцверджанне няпраўдзівае, г. зн. з непарыўнасці функцыі $f(x)$ у дадзеным пункце x_0 не вынікае, агульна кажучы, дыферэнцавальнасць функцыі $f(x)$ у гэтым пункце.

Прыкладам можа паслужыць функцыя $y = |x|$, якая ёсць непарыўная ў пункце $x = 0$, але не мае вытворнай у гэтым пункце.

Такім чынам, непарыўнасць функцыі ў пункце ёсць умова неабходная, але не дастатковая для яе дыферэнцавальнасці ў гэтым пункце.

Цяпер зноў вернемся да роўнасці (7.5) і засяродзім увагу на лінейнай у дачыненні да Δx частцы прыросту функцыі.

Азначэнне 7.4. *Галоўная лінейная частка прыросту дыферэнцавальнай у пункце x_0 функцыі $f(x)$ называецца дыферэнцыялам функцыі $f(x)$ у пункце x_0 і абазначаецца dy або df, г. зн.*

$$dy \overset{\text{def}}{=} f'(x_0)\Delta x. \tag{7.6}$$

Дыферэнцыял ёсць галоўная частка прыросту функцыі ў тым сэнсе, што, згодна з формулаю (7.5),

$$\Delta y - dy = o(\Delta x),$$

іншымі словамі, розніца $\Delta y - dy$ ёсць бясконца малая функцыя больш высокага парадку ў параўнанні з Δx.

Часам бывае больш зручна пісаць $df(x_0)$ або $dy(x_0)$.

Няхай $f(x)=x$. Згодна з формулаю (7.6), атрымаем:

$$dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Па гэтай прычыне *дыферэнцыялам незалежнай зменнай* x называецца прырост гэтай зменнай: $dx \stackrel{\text{def}}{=} \Delta x$, і таму формула (7.6) набывае выгляд

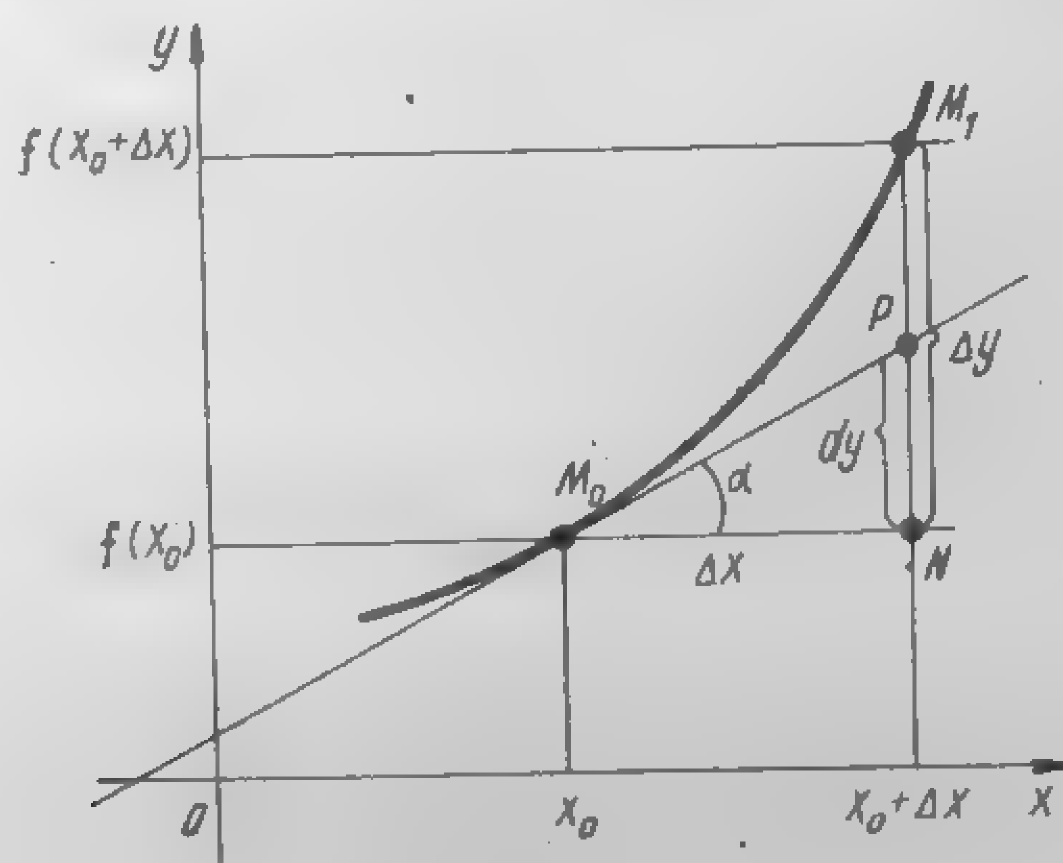
$$dy = f'(x_0)dx. \tag{7.7}$$

Заўвага 7.4. З формулы (7.7) вынікае, што $f'(x) = dy/dx$, а таму вытворную f' абазначаюць таксама dy/dx або df/dx.

З улікам роўнасці (7.7) формулу (7.5) можна перапісаць інакш:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)dx + o(dx) = df(x_0) + o(dx).$$

Дыферэнцыял функцыі мае зусім просты геаметрычны сэнс. З трохвугольніка PNM_0 (рыс. 7.5) атрымоўваецца $PN = \operatorname{tg} \alpha \Delta x = f'(x_0)\Delta x = dy$. Такім чынам, дыферэнцыял функцыі $f(x)$ у пункце x_0, які адпавядае прыросту Δx незалежнай зменнай у гэтым пункце, роўны прыросту ардынаты датычнай да графіка функцыі $y=f(x)$ у дадзеным пункце x_0.

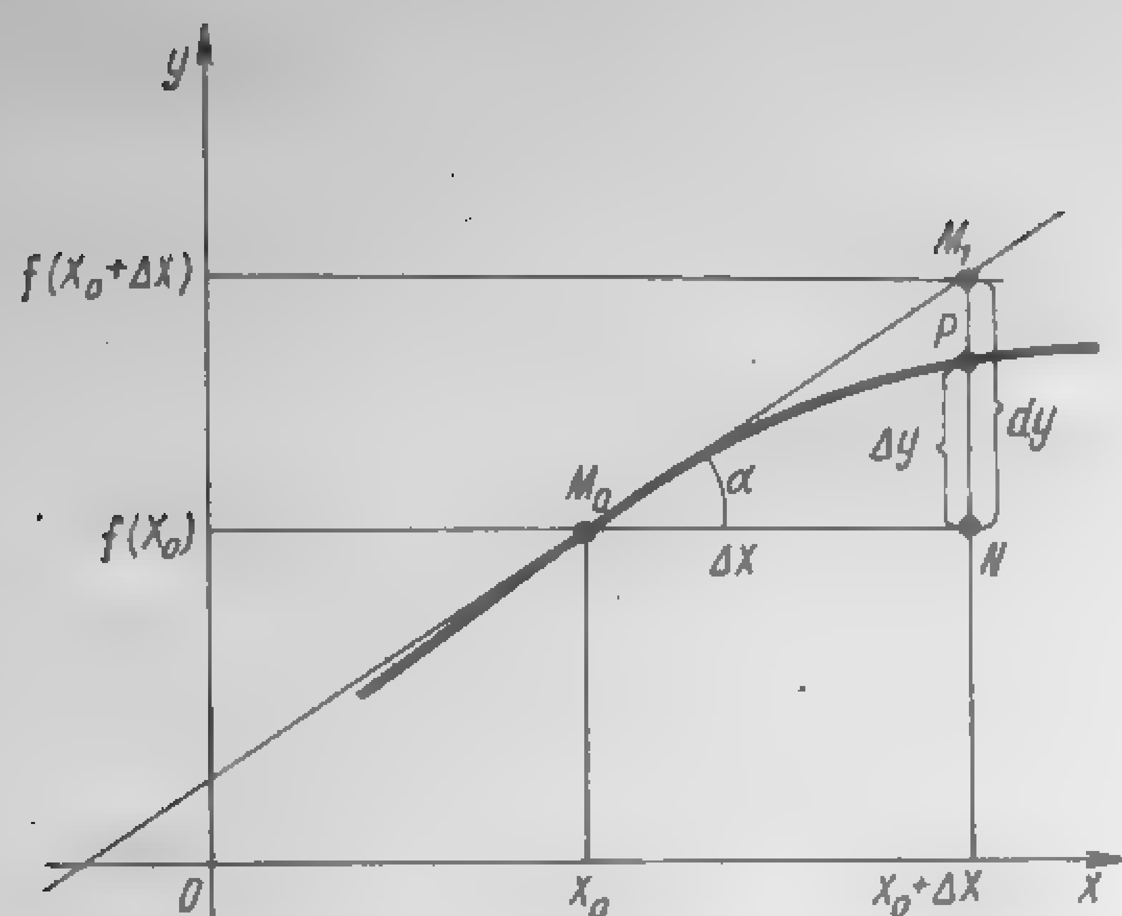


Рыс. 7.5

Не варта думаць, што заўсёды прырост функцыі Δy большы за дыферэнцыял dy. Так, на рыс. 7.6 $\Delta y < dy$.

Калі ў формуле (7.4) адкінуць складнік $o(x-x_0)$, то атрымаем набліжаную роўнасць

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$



Рыс. 7.6

якая скарыстоўваецца для набліжанага вылічэння значэнняў функцыі $f(x)$ пры x, блізкіх да x_0.

Напрыклад, для набліжанага вылічэння кораня n-й ступені возьмем функцыю $f(x)=(1+x)^{1/n}$, $n\in\mathbf{N}$. Калі $x_0=0$, то $f(0)=1$, $f'(0)=1/n$. У такім разе адпаведная формула набывае выгляд

$$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x.$$

У прыватнасці,

$$\sqrt[3]{127}=\sqrt[3]{125+2}=5\sqrt[3]{1+2/125}\approx 5\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{2}{125}\right).$$

Такім чынам, $\sqrt[3]{127}\approx 5{,}026$.

7.2. ПРАВІЛЫ ДЫФЕРЭНЦАВАННЯ

1°. Дыферэнцаванне сумы, розніцы, здабытку і дзелі. Для вылічэння вытворнай рацыянальных функцый выведзем правілы дыферэнцавання сумы, розніцы, здабытку і дзелі.

Тэарэма 7.2. *Калі функцыі f і g ёсць дыферэнцавальныя ў пункце x, то іх сума $f+g$, розніца $f-g$, здабытак fg і дзель f/g (у апошнім выпадку пры ўмове $g(x)\neq 0$) таксама дыферэнцавальныя ў гэтым пункце, прычым:*

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x), \tag{7.8}$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x), \tag{7.9}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}. \tag{7.10}$$

□ 1. Няхай $y=f(x)\pm g(x)$, тады

$$\Delta y=(f(x+\Delta x)\pm g(x+\Delta x))-(f(x)\pm g(x))=$$

$$=(f(x+\Delta x)-f(x))\pm(g(x+\Delta x)-g(x))=$$
$$=\Delta f(x)\pm\Delta g(x),$$

адкуль

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)\pm\Delta g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}.$$

Паколькі функцыі f і g ёсць дыферэнцавальныя ў пункце x, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=f'(x),\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}=g'(x),$$

а таму

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\pm g'(x).$$

Гэта азначае дыферэнцавальнасць функцый $f\pm g$ у пункце x і праўдзівасць формулы (7.8).

2. Калі $y=f(x)g(x)$, то

$$\Delta y=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)=$$
$$=(f(x+\Delta x)-f(x))g(x+\Delta x)+f(x)(g(x+\Delta x)-g(x))=$$
$$=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x).$$

Адсюль атрымліваем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)+f(x)\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}. \qquad (7.11)$$

Паколькі дыферэнцавальная ў пункце x функцыя g, згодна з тэарэмаю 7.1, ёсць непарыўная ў гэтым пункце, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)=g(x)$. Пераходзячы ў роўнасці (7.11) да ліміту пры $\Delta x\to 0$, атрымаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)+f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

або

$$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

што азначае дыферэнцавальнасць здабытку ў пункце x і праўдзівасць формулы (7.9).

3. Разгледзім нарэшце функцыю $y=f(x)/g(x)$. З дыферэнцавальнасці функцыі g у пункце x вынікае яе непарыўнасць у гэтым пункце. Паколькі $g(x)\neq 0$, то, згодна з лемаю 6.1 пра захаванне знака непарыўнаю функцыяй, для дастаткова малых Δx таксама $g(x+\Delta x)\neq 0$. Па гэтай прычыне ўсе разгляданыя далей дробы маюць сэнс:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}=$$
$$=\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))g(x)-f(x)(g(x+\Delta x)-g(x))}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}=$$
$$=\frac{g(x)\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f(x)\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g(x)g(x+\Delta x)}.$$

Калі перайсці ў гэтай роўнасці да ліміту пры $\Delta x\to 0$, то атрымаем

$$y'=(f'(x)g(x)-f(x)g'(x))/(g(x))^2,$$

гэта азначае, што дзель f/g ёсць дыферэнцавальная ў пункце x, і для яе праўдзіцца формула (7.10). ■

Заўвага 7.5. Калі ў формуле (7.9) узяць $g(x)\equiv C$, $C=\text{const}$, то $g'(x)=0$ і

$$(Cf(x))'=Cf'(x),$$

г. зн. сталы множнік можна выносіць за знак вытворнай.

Заўвага 7.6. З формулы (7.9) пры $f(x)\equiv 1$ атрымліваецца важны прыватны выпадак правіла дыферэнцавання дзелі

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{1}{g^2(x)}\,g'(x).$$

Заўвага 7.7. *Арыфметычнай камбінацыяй функцый* будзем называць выраз, які атрымліваецца пры дапамозе арыфметычных дзеянняў з функцыямі: складання, адымання, множання і дзялення. З тэарэмы 7.2 вынікае, што арыфметычная камбінацыя з канечнага набору дыферэнцавальных функцый, калі яна мае сэнс, ёсць дыферэнцавальная.

Заўвага 7.8. З формулы (7.7) і з тэарэмы 7.2 вынікаюць наступныя правілы вылічэння дыферэнцыялаў функцый:

$$d(f\pm g)=df\pm dg,$$
$$d(fg)=g\,df+f\,dg,$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\,df-f\,dg}{g^2}\quad (g(x)\neq 0).$$

2°. Дыферэнцаванне складанай функцыі. Выведзем так званае *ланцуговае правіла вылічэння вытворнай складанай функцыі.*

Тэарэма 7.3. *Калі функцыі $\varphi(x)$ і $f(t)$ — дыферэнцавальныя адпаведна ў пунктах $x=x_0$ і $t=t_0$, дзе $t_0=\varphi(x_0)$, то складаная функцыя $y=f(\varphi(x))$ ёсць дыферэнцавальная ў пункце $x=x_0$, прычым*

$$y'(x_0)=f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0). \tag{7.12}$$

□ З прычыны дыферэнцавальнасці функцыі $\varphi(x)$ у пункце $x=x_0$ адпаведна формуле (7.4) атрымаем

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0). \qquad (7.13)$$

Паколькі функцыя $f(t)$ ёсць дыферэнцавальная ў пункце $t=t_0$, то

$$f(t)-f(t_0)=f'(t_0)(t-t_0)+o(t-t_0). \qquad (7.14)$$

Бясконца малую функцыю $o(t-t_0)$ больш высокага парадку ў параўнанні з $t-t_0$ можна запісаць у выглядзе $o(t-t_0)=\alpha(t)(t-t_0)$, дзе $\alpha(t)$ ёсць бясконца малая функцыя пры $t\to t_0$. Пры гэтым з роўнасці (7.14) атрымліваецца, што

$$\alpha(t)=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}-f'(t_0),$$

таму $\alpha(t)$ не вызначаная пры $t=t_0$. Калі ўзяць значэнне $\alpha(t_0)$ роўным нулю, то функцыя $\alpha(t)$ будзе непарыўнаю ў пункце t_0.

Беручы ў розніцы (7.14) $t=\varphi(x)$, $t_0=\varphi(x_0)$, згодна з формулаю (7.13), атрымліваем:

$$f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))=(f'(\varphi(x_0)+\alpha(\varphi(x)))(\varphi(x)-\varphi(x_0))=$$
$$=(f'(\varphi(x_0))+\alpha(\varphi(x)))(\varphi'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)).$$

Калі $x\neq x_0$, то

$$\frac{f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))}{x-x_0}=(f'(\varphi(x_0))+\alpha(\varphi(x)))\left(\varphi'(x_0)+\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}\right).$$

Паколькі $\alpha(t)$ ёсць непарыўная функцыя ў пункце $t=t_0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(\varphi(x))=\alpha\left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right)=\alpha(t_0)=0,$$

і таму з папярэдняй роўнасці пасля пераходу да ліміту пры $x\to 0$ атрымаем

$$y'(x_0)=f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0). \blacksquare$$

Вынік. *Дыферэнцыял функцыі $y=f(x)$ мае адзін і той самы выгляд*

$$dy=f'(x)dx, \qquad (7.15)$$

як у выпадку, калі x ёсць незалежная зменная, так і ў выпадку, калі x — дыферэнцавальная функцыя нейкай іншай зменнай.

□ Няхай $x=\varphi(t)$ ёсць дыферэнцавальная функцыя незалежнай зменнай t, тады $y=f(\varphi(t))\overset{\text{def}}{=}z(t)$. Паводле правіла дыферэнцавання складанай функцыі

$$z'(t)=f'(\varphi(t))\varphi'(t),$$

адкуль, згодна з азначэннем дыферэнцыяла,

$$dy=z'(t)dt=f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Паколькі $\varphi'(t)dt=dx$, то $dy=f'(\varphi(t))d\varphi(t)=f'(x)dx$, г. зн. формула (7.15) застаецца праўдзіваю пры замене x на $\varphi(t)$. Гэтую ўласцівасць называюць *інварыянтавасцю формы дыферэнцыяла.* ■

Заўвага 7.9. *Правіла дыферэнцавання складанай функцыі* $f(\varphi(x))$ звычайна запісваюць у выглядзе

$$(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Апускаючы аргумент і карыстаючыся абазначэннем вытворнай як тасунка дыферэнцыялаў, правіла дыферэнцавання складанай функцыі $z=f(y)=f(\varphi(x))$ можна запісаць так:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \quad \text{або} \quad z'_x=z'_y y'_x.$$

3°. Дыферэнцаванне адваротнай функцыі. Дзеля вылічэння вытворных адваротных трыганаметрычных функцый выведзем агульнае правіла дыферэнцавання адваротнай функцыі.

Тэарэма 7.4. *Калі строга манатонная і непарыўная на адрэзку P функцыя $y=f(x)$ ёсць дыферэнцавальная ў пункце $x_0\in P$, прычым $f'(x_0)\neq 0$, то адваротная функцыя $x=g(y)$ ёсць дыферэнцавальная ў пункце $y_0=f(x_0)$ і*

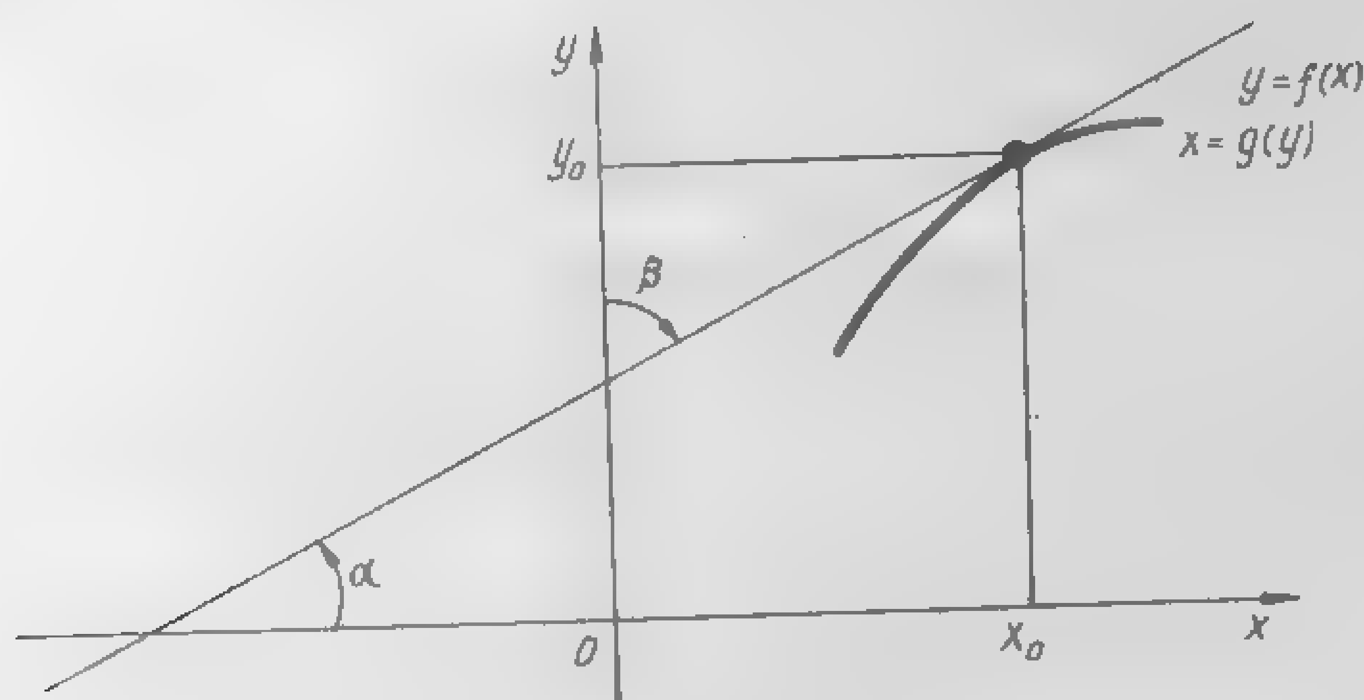
$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{7.16}$$

□ На падставе тэарэмы 6.10 функцыя g ёсць непарыўная на адрэзку $f(P)$ (значэнняў функцыі $f(x)$, калі яе аргумент змяняецца на адрэзку P), таму $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=$ $=g(y_0)=x_0$. Паколькі функцыя $f(x)$ — непарыўная ў пункце x_0, то пры $x\to x_0$ $f(x)\to f(x_0)$ або $y\to y_0$. З прычыны строгай манатоннасці функцый $f(x)$ і $g(x)$ для кожнага значэння $x\neq x_0$ адпаведныя значэнні функцыі $f(x)$ таксама няроўныя: $f(x)\neq f(x_0)$ або $y\neq y_0$. Такім чынам, маюць месца наступныя роўнасці:

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=1:\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Паколькі пры $x \to x_0$ існуе ліміт правай часткі гэтай роўнасці і ён роўны $1/f'(x_0)$, то існуе і ліміт левай часткі (пры $y \to y_0$) і ён роўны $g'(y_0)$. Тым самым роўнасць (7.16) даказана. ■

Разгледжаная тэарэма мае просты геаметрычны сэнс. Вуглавы каэфіцыент датычнай да графіка функцыі $y=f(x)$ у пункце $(x_0;\ y_0)$ ёсць $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$ (рыс. 7.7), а вуглавы каэфіцыент датычнай да графіка адваротнай функцыі $x=g(y)$ у пункце $(y_0;\ x_0)$ роўны $g'(y_0)=\operatorname{tg}\beta$. Такім чынам, роўнасць $g'(y_0)=1/f'(x_0)$ выяўляе геаметрычна той факт, што $\operatorname{tg}\beta=1/\operatorname{tg}\alpha$. Гэта сапраўды так, бо $\alpha+\beta=\pi/2$.



Рыс. 7.7

4°. Дыферэнцаванне параметрычна зададзеных функцый. Няхай на адрэзку T лікавай восі t зададзены дзве функцыі:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t), \tag{7.17}$$

прычым функцыя $\varphi(t)$ ёсць непарыўная і строга манатонная. Тады яна мае адваротную функцыю $t=\chi(x)$, вызначаную на адрэзку $\varphi(T)$. Разгледзім складаную функцыю

$$f(x)=\psi(\chi(x)),$$

якая вызначаная на мностве $\varphi(T)$. Пры гэтым кажуць, што функцыя $f(x)$ *зададзена* роўнасцямі (7.17) *параметрычна*. Зменную t называюць *параметрам*.

Тэарэма 7.5. *Калі строга манатонная і непарыўная на адрэзку T функцыя $x=\varphi(t)$ ёсць дыферэнцавальная ў пункце $t_0\in T$ і $\varphi'(t_0)\neq 0$, а функцыя $y=\psi(t)$, вызначаная на адрэзку T,— дыферэнцавальная ў пункце t_0, то складаная функцыя $f(x)=\psi(\chi(x))$ ёсць дыферэнцавальная ў пункце $x_0=\varphi(t_0)$ і*

$$f'(x_0)=\psi'(t_0)/\varphi'(t_0). \tag{7.18}$$

□ Згодна з тэарэмаю 7.4, адваротная функцыя $t=\chi(x)$ ёсць дыферэнцавальная ў пункце x_0 і

$$\chi'(x_0)=1/\varphi'(t_0),\quad t_0=\chi(x_0). \qquad (7.19)$$

На падставе тэарэмы 7.3 складаная функцыя $f(x)=\psi(\chi(x))$ ёсць дыферэнцавальная ў пункце x_0, прычым

$$f'(x_0)=\psi'(\chi(x_0))\chi'(x_0)=\psi'(t_0)\chi'(x_0),$$

адкуль з улікам роўнасці (7.19) атрымаем формулу (7.18). ■

5°. Няяўная функцыя і яе дыферэнцаванне. Няхай значэнні дзвюх зменных x і y звязаны паміж сабою пэўным раўнаннем

$$F(x,\ y)=0. \qquad (7.20)$$

Кажуць, што функцыя $y=f(x)$ *зададзена няяўна* раўнаннем (7.20), калі пры падстанове ў яго замест зменнай y яе выразу $f(x)$ атрымоўваецца тоеснасць у дачыненні да зменнай x.

Так, напрыклад, раўнанне

$$x^2+y^2-1=0 \qquad (7.21)$$

няяўна вызначае дзве элементарныя функцыі:

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad y=-\sqrt{1-x^2},$$

бо пасля іх падстановы ў роўнасць (7.21) атрымаем тоеснасць

$$x^2+(1-x^2)-1\equiv 0.$$

Трэба заўважыць, што тэрмін «няяўная функцыя» характарызуе не сутнасць функцыі, а толькі спосаб яе задання. Так, кожную яўную функцыю $y=f(x)$ можна заўсёды падаць як няяўную $y-f(x)=0$.

Далей пакажам правіла дыферэнцавання няяўнай функцыі, не пераўтвараючы яе ў яўную, на прыкладзе няяўнай функцыі, што вызначаецца раўнаннем (7.21).

Калі y ёсць функцыя ад x, то роўнасць (7.21) ператвараецца ў тоеснасць. Дыферэнцуем гэтую тоеснасць па x, карыстаючыся правілам дыферэнцавання складанай функцыі, і атрымаем $2x+2yy'=0$, адкуль $y'=-x/y$.

Заўважым, што калі мы прадыферэнцуем адпаведную яўную функцыю $y=\sqrt{1-x^2}$, то атрымаем $y'=-x/\sqrt{1-x^2}=-x/y$, г. зн. той самы вынік.

1°. Вылічэнне вытворных элементарных функцый. Атрымаем формулы для вылічэння вытворных асноўных элементарных функцый.

1. *Вытворная лагарыфмічнай функцыі.* Няхай $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$, $x>0$). Для кожнага дастаткова малога $\Delta x\neq 0$ і для кожнага фіксаванага $x>0$ выканаем наступныя пераўтварэнні:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\,\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}.$$

Калі ўзяць $t=\Delta x/x$, то $t\to 0$ пры $\Delta x\to 0$, паколькі значэнне x ёсць фіксаванае. На падставе грунтоўнага ліміту (6.31) маем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e.$$

Згодна з азначэннем вытворнай, з прычыны непарыўнасці лагарыфмічнай функцыі атрымаем

$$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}=$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

У прыватнасці, $(\ln x)'=1/x$.

2. *Вытворная паказнікавай функцыі.* Для вылічэння вытворнай функцыі $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) скарыстаем тэарэму 7.4 пра дыферэнцаванне адваротнай функцыі.

Функцыя $y=a^x$, $x\in\mathbf{R}$, ёсць адваротная да функцыі $x=\log_a y$, $y\in\mathbf{R}_+$. Паколькі для функцыі $x=\log_a y$ выконваюцца ўсе ўмовы тэарэмы 7.4, то, згодна з гэтай тэарэмаю, функцыя a^x ёсць дыферэнцавальная ў кожным пункце x, дзе $x=\log_a y$. На падставе стасунку (7.16) для яе вытворнай у гэтым пункце справядлівая формула

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{1/(y\ln a)}=y\ln a\big|_{y=a^x}=a^x\ln a.$$

У прыватнасці, $(e^x)'=e^x$.

3. *Вытворная ступеневай функцыі.* Вытворную функ-

цыі $y=x^{\alpha}$ $(x>0,\ \alpha\in\mathbf{R})$ можна вылічыць на падставе асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці $b=a^{\log_a b}$ і тэарэмы 7.3 пра дыферэнцаванне складанай функцыі:

$$(x^{\alpha})'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}\alpha\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

(Калі выкарыстоўваць абазначэнні тэарэмы 7.3, то $f(t)=e^{t}$, $\varphi(x)=\alpha\ln x$.)

4. *Вытворныя трыганаметрычных функцый.* Калі $y=\sin x$, то

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2).$$

Паколькі функцыя $\cos x$ ёсць непарыўная на $\mathbf{R}$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x.$$

Згодна з азначэннем вытворнай, на падставе трыганаметрычнага грунтоўнага ліміту (6.36) маем:

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=$$
$$=\cos x.$$

Вытворную функцыі $y=\cos x$ можна вылічыць як вытворную складанай функцыі, карыстаючыся формулаю вытворнай сінуса:

$$(\cos x)'=(\sin(\pi/2-x))'=\cos(\pi/2-x)(\pi/2-x)'=$$
$$=-\sin x.$$

Для вылічэння вытворнай функцыі $y=\operatorname{tg}x$ выкарыстаем формулу (7.10):

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Аналагічна атрымаем:

$$(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$x\neq\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

5. *Вытворныя адваротных трыганаметрычных функцый.* Паколькі функцыя $y=\arcsin x$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ ёсць адваротная да функцыі $x=\sin y$ $(-\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2)$, то, згодна з тэарэмаю 7.4,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\bigg|_{\sin y = x} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1).$$

Аналагічна атрымаем:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}\bigg|_{\cos y = x} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1).$$

Функцыя $y = \operatorname{arctg} x$ ($x \in \mathbf{R}$) ёсць адваротная да функцыі $x = \operatorname{tg} y$ $(-\pi/2 < y < \pi/2)$. На падставе тэарэмы 7.4 справядлівыя роўнасці:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}\bigg|_{\operatorname{tg} y = x} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Аналагічна

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}\bigg|_{\operatorname{ctg} y = x} =$$
$$= -\frac{1}{1+x^2}.$$

6. *Гіпербалічныя функцыі і іх вытворныя.* Функцыі, што задаюцца формуламі $(e^x - e^{-x})/2$ і $(e^x + e^{-x})/2$, называюцца адпаведна *гіпербалічным сінусам* і *гіпербалічным косінусам* і абазначаюцца $\operatorname{sh} x$ і $\operatorname{ch} x$:

$$\operatorname{sh} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Гэтыя функцыі вызначаныя і непарыўныя на $\mathbf{R}$, прычым $\operatorname{ch} x$ — цотная функцыя, а $\operatorname{sh} x$ — няцотная функцыя. Графікі функцый $y = \operatorname{sh} x$ і $y = \operatorname{ch} x$ пададзены на рыс. 7.8.

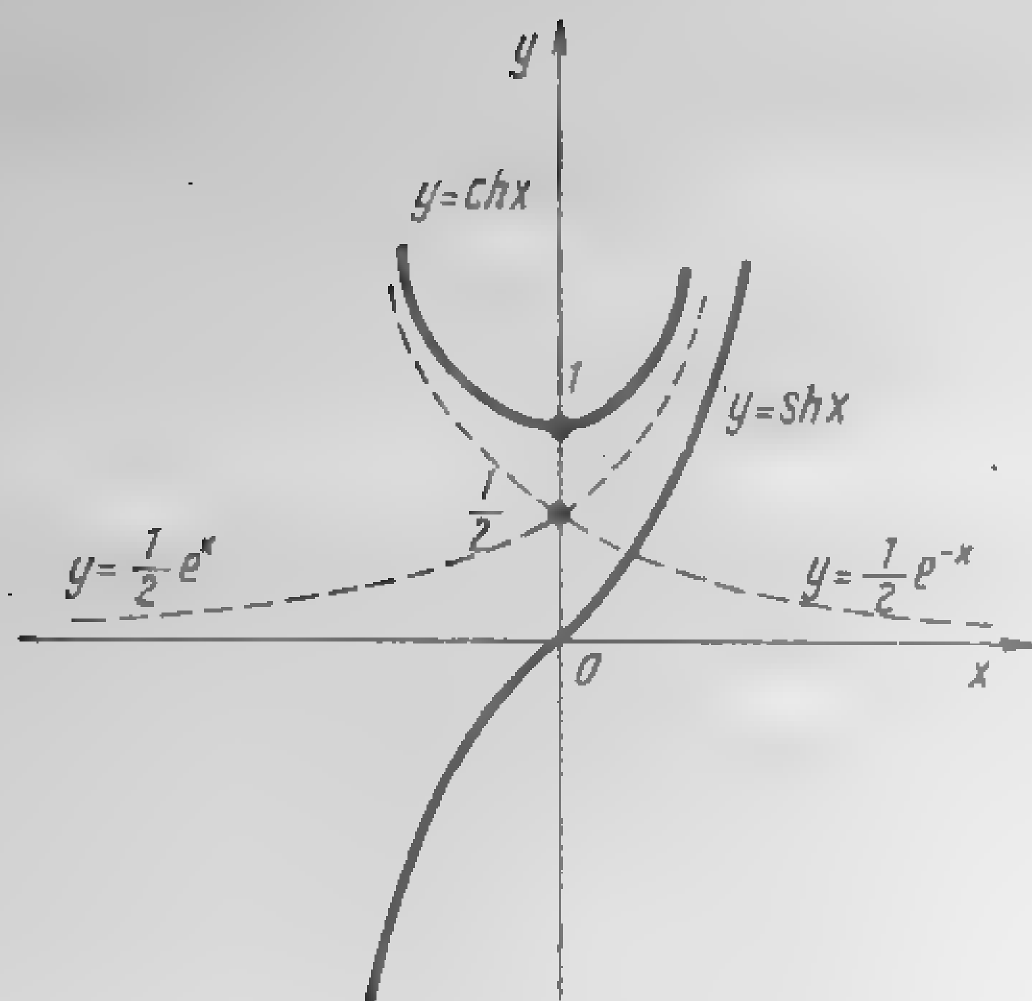
Функцыі $\operatorname{sh} x$ і $\operatorname{ch} x$ маюць уласцівасці, падобныя да ўласцівасцяў трыганаметрычных сінуса і косінуса. Так, напрыклад, маюць месца наступныя формулы:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \tag{7.22}$$

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}.$$

Праўдзівасць пададзеных формул выводзіцца з азначэння гіпербалічных функцый $\operatorname{sh} x$ і $\operatorname{ch} x$.

Назва «гіпербалічныя функцыі» тлумачыцца тым, што раўнанні $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbf{R}$, з'яўляюцца, згодна



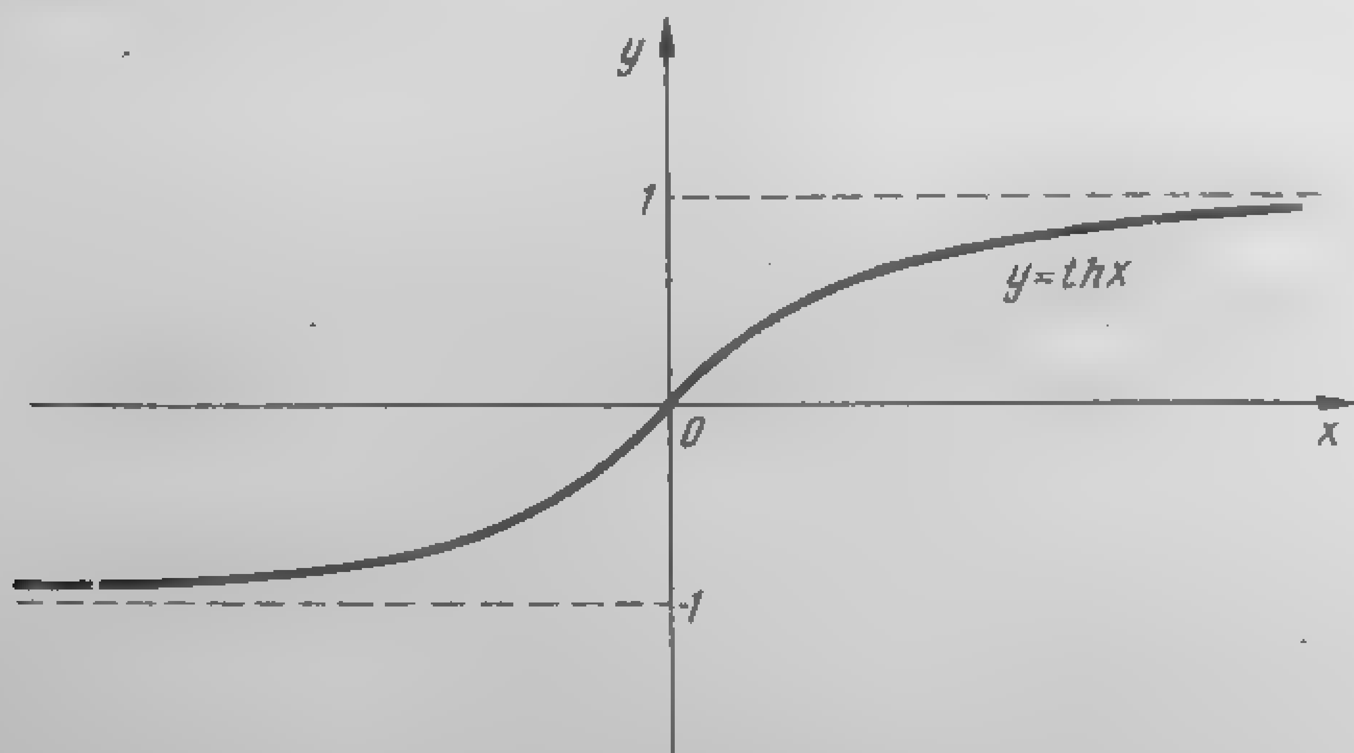
Рыс. 7.8

з формулаю (7.22), параметрычнымі раўнаннямі правай галіны гіпербалы $x^2-y^2=1$, падобна да таго, як раўнанні $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, ёсць параметрычныя раўнанні акружыны $x^2+y^2=1$, з прычыны чаго для трыганаметрычных функцый ужываецца назва «кругавыя функцыі».

Па аналогіі з трыганаметрычнымі функцыямі *гіпербалічныя тангенс* і *катангенс* азначаюцца формуламі:

$$\operatorname{th} x \overset{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x \overset{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Функцыя $\operatorname{th} x$ ёсць вызначаная і непарыўная на **R**, а функцыя $\operatorname{cth} x$ — на **R** з праколатым пунктам $x=0$. Абедзве функцыі — няцотныя, іх графікі пададзены на рыс. 7.9 і рыс. 7.10.



Рыс. 7.9

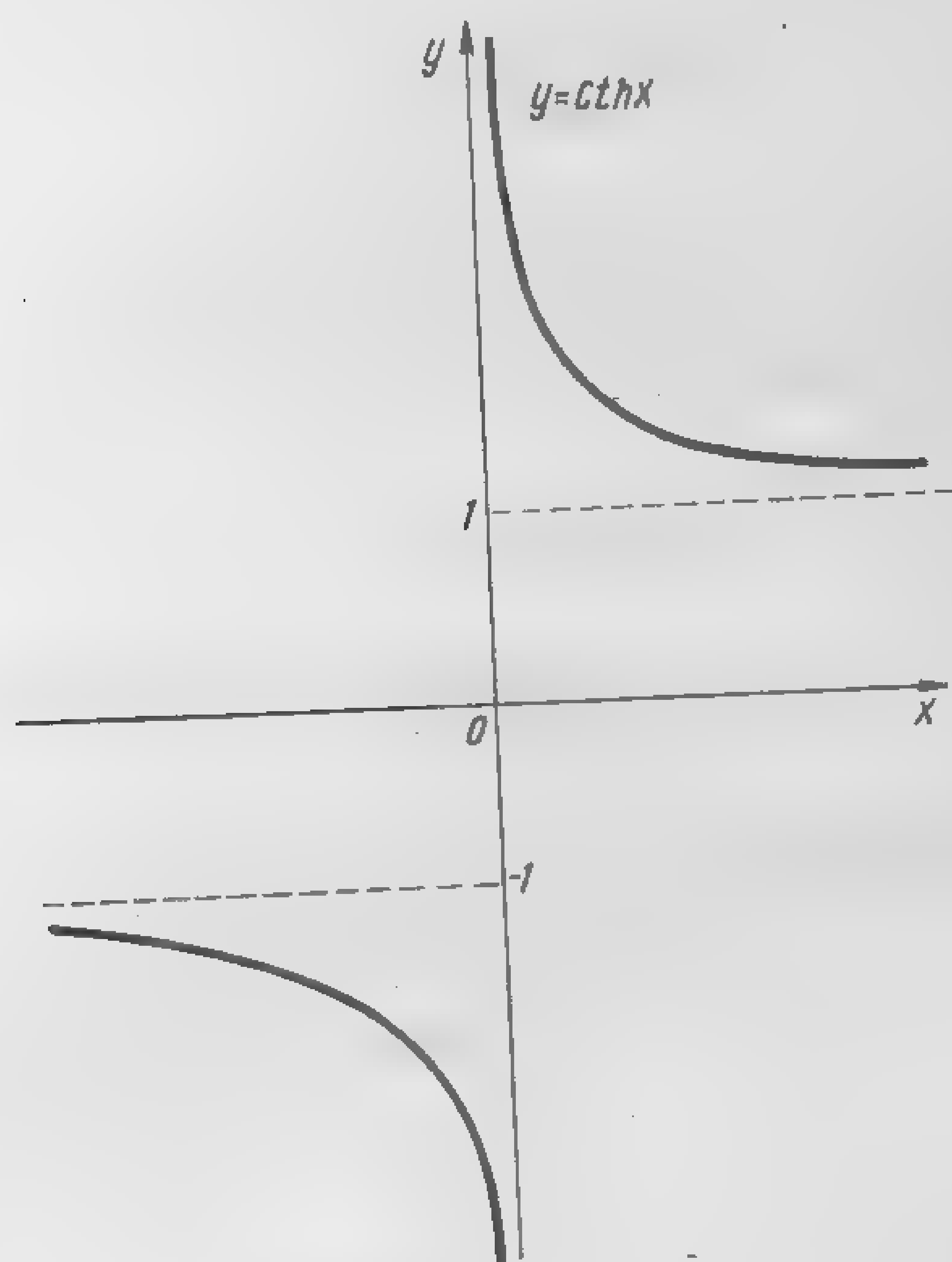
На падставе азначэння гіпербалічных функцый, тэарэмаў 7.2 і 7.3 і правіла дыферэнцавання паказнікавай функцыі атрымаем наступныя формулы для вылічэння вытворных гіпербалічных функцый:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$



Рыс. 7.10

З а ў в а г а 7.10. З доказаў формул, разгляданых у гэтым параграфе, вынікае, што асноўныя элементарныя функцыі ёсць дыферэнцавальныя на сваіх абсягах вызначэння, за выключэннем функцый $\arcsin x$ і $\arccos x$, якія пры $x=1$ і $x=-1$ маюць бясконцую вытворную.

2°. Табліца вытворных асноўных элементарных функцый. Даказаныя ў гэтым параграфе формулы дазваляюць вылічыць вытворныя складаных функцый, якія атрымліваюцца ў выніку арыфметычных дзеянняў з элементарнымі функцыямі і шматразовых падстановаў адных элементарных функцый у іншыя.

Напрыканцы пададзім *табліцу формул для вытворных складаных элементарных функцый*. Ва ўсіх ніжэй

пададзеных формулах $u=u(x)$ ёсць дыферэнцавальная функцыя ад незалежнай зменнай x, а u' — яе вытворная:

1) $(C)'=0,\ C=\text{const}$;   2) $(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}u',\ \alpha\in\mathbf{R}$;

3) $(u^2)'=2uu'$;   4) $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}},\ u>0$;

5) $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u',\ a>0,\ a\neq 1$;

6) $(e^u)'=e^u u'$;

7) $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a},\ a>0,\ a\neq 1,\ u>0$;

8) $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u},\ u>0$;

9) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;   10) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

11) $(\operatorname{tg} u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$;   12) $(\operatorname{ctg} u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

13) $(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}},\ |u|<1$;

14) $(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}},\ |u|<1$;

15) $(\operatorname{arctg} u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$;   16) $(\operatorname{arcctg} u)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$;

17) $(\operatorname{sh} u)'=\operatorname{ch} u\cdot u'$;   18) $(\operatorname{ch} u)'=\operatorname{sh} u\cdot u'$;

19) $(\operatorname{th} u)'=\dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$;   20) $(\operatorname{cth} u)'=-\dfrac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$.

Заўвага 7.11. Пры вылічэнні вытворнай *ступенева-паказнікавай функцыі* $y=u(x)^{v(x)}$, дзе $u(x)$ і $v(x)$ — дыферэнцавальныя на некаторым прамежку P функцыі і $u(x)>0$ на P, нельга карыстацца формуламі 2 і 5 табліцы вытворных. У такім разе выкарыстоўваюць асноўную лагарыфмічную тоеснасць:

$$(u(x)^{v(x)})'=(e^{v(x)\ln u(x)})'=e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)=$$

$$=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Такім чынам,

$$(u^v)'=u^v\ln u\cdot v'+vu^{v-1}u'.$$

7.4. ВЫТВОРНЫЯ І ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЫ ВЫШЭЙШЫХ ПАРАДКАЎ

1°. Паняцце вытворнай n-га парадку. Няхай функцыя $y=f(x)$ мае на прамежку P вытворную. Значэнне вытворнай $f'(x)$ у кожным фіксаваным пункце x ёсць пэўны лік, і, значыць, вытворная $f'(x)$ з'яўляецца функцыяй ад

незалежнай зменнай x. Калі функцыя $f'(x)$ ёсць дыферэнцавальная ў пункце $x_0 \in P$, то яе вытворную называюць *другой вытворнаю* або *вытворнаю другога парадку функцыі* $f(x)$ *у гэтым пункце* і абазначаюць $f''(x_0)$ або $y''(x_0)$.

Такім чынам,

$$f''(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Вытворную ад другой вытворнай функцыі f называюць *трэцяй вытворнаю* або *вытворнаю трэцяга парадку функцыі* f *у пункце* x_0 і абазначаюць $f'''(x_0)$ або $f^{(3)}(x_0)$.

Такім жа чынам уводзяцца вытворныя ўсіх наступных парадкаў.

Дапусцім, што функцыя $f(x)$ мае на прамежку P вытворныя $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$. Калі ў пункце $x_0 \in P$ існуе вытворная функцыі $f^{(n-1)}(x)$, то яе называюць *вытворнаю n-га парадку функцыі* $f(x)$ *у пункце* x_0 і абазначаюць $f^{(n)}(x_0)$ або $y^{(n)}(x_0)$.

Такім чынам, калі функцыя $f(x)$ мае ў пункце x вытворныя да n-га парадку ўлучна, то

$$f^{(n)}(x) \overset{\text{def}}{=} (f^{(n-1)}(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

Гэтая формула праўдзіцца для ўсіх $n \in \mathbf{N}$, калі лічыць, што *вытворная нулявога парадку* супадае з самою функцыяй, г. зн. $f^{(0)}(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)$. Заўважым таксама, што парадак вытворнай пазначаюць у дужках для таго, каб яго нельга было палічыць за паказнік ступені.

Функцыю, якая мае ў кожным пункце мноства X вытворныя да n-га парадку ўлучна, называюць *n разоў дыферэнцавальнаю на мностве* X.

Калі функцыя мае на мностве X вытворныя ўсіх парадкаў, то яе называюць *бясконца дыферэнцавальнай на мностве* X.

Напрыклад, функцыя $y = e^x$ ёсць бясконца дыферэнцавальная на ўсёй лікавай восі.

2°. Формула Ляйбніца. Калі функцыі u і v маюць у пункце x вытворныя n-га парадку, то функцыя $\lambda u + \mu v$, дзе λ і μ — канстанты, таксама мае вытворную n-га парадку ў пункце x, прычым

$$(\lambda u + \mu v)^{(n)} = \lambda u^{(n)} + \mu v^{(n)}.$$

Праўдзівасць формулы даказваецца метадам матэматычнай індукцыі на падставе азначэння вытворнай n-га парадку і адпаведнай формулы для першай вытворнай.

Для здабытку функцый u і v адпаведная формула мае больш складаны выгляд. Менавіта мае месца наступная тэарэма, дзе падаецца так званая *формула Ляйбніца**.

Тэарэма 7.6. *Калі функцыі u і v маюць у пункце x вытворныя n-га парадку, то функцыя uv таксама мае ў пункце x вытворную n-га парадку, прычым*

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \tag{7.23}$$

дзе $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *— біномныя каэфіцыенты.*

□ Дакажам формулу (7.23) метадам індукцыі. Пры $n=1$ гэтая формула праўдзівая, бо

$$(uv)^{(1)}=C_1^0 u^{(0)} v^{(1)}+C_1^1 u^{(1)} v^{(0)}=uv'+u'v=(uv)'.$$

Няхай формула Ляйбніца праўдзіцца для вытворнай парадку $n=m-1$, г. зн.

$$(uv)^{(m-1)}=\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k u^{(k)} v^{(m-1-k)}.$$

Дакажам праўдзівасць формулы для вытворнай парадку $n=m$, дапускаючы існаванне вытворных $u^{(m)}$ і $v^{(m)}$. Паколькі функцыі u і v маюць вытворныя да m-га парадку ўлучна, то будуць справядлівымі наступныя пераўтварэнні:

$$(uv)^{(m)}=((uv)^{(m-1)})'=\left(\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k u^{(k)} v^{(m-k-1)}\right)'=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k (u^{(k)} v^{(m-k-1)})'=\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k (u^{(k+1)} v^{(m-k-1)}+$$

$$+u^{(k)} v^{(m-k)})=\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k u^{(k+1)} v^{(m-k-1)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k u^{(k)} v^{(m-k)}. \tag{7.24}$$

У першай суме з правай часткі гэтай роўнасці вылучым асобна апошні складнік, а ў другой — першы і паменшым на адзінку індэкс сумавання ў першай суме. Атрымаем:

---

* *Ляйбніц Готфрыд Вільгельм* (Leibniz Gottfried Wilhelm, 1646—1716) — нямецкі філосаф, матэматык і фізік.

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^{k} u^{(k+1)} v^{(m-k-1)} = \sum_{k=0}^{m-2} C_{m-1}^{k} u^{(k+1)} v^{(m-k-1)} + u^{(m)} v^{(0)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} C_{m-1}^{k-1} u^{(k)} v^{(m-k)} + u^{(m)} v^{(0)}, \qquad (7.25)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^{k} u^{(k)} v^{(m-k)} = u^{(0)} v^{(m)} + \sum_{k=1}^{m-1} C_{m-1}^{k} u^{(k)} v^{(m-k)}. \qquad (7.26)$$

Такім чынам, калі ў правую частку роўнасці (7.24) падставіць замест сумаў іх выразы са стасункаў (7.25) і (7.26), то атрымаем

$$(uv)^{(m)} = u^{(0)} v^{(m)} + \sum_{k=1}^{m-1} (C_{m-1}^{k} + C_{m-1}^{k-1}) u^{(k)} v^{(m-k)} + u^{(m)} v^{(0)}.$$

Карыстаючыся роўнасцю (1.44) $C_{m-1}^{k} + C_{m-1}^{k-1} = C_m^k$, а таксама роўнасцямі $C_m^0 = 1$ і $C_m^m = 1$, атрымаем:

$$(uv)^{(m)} = C_m^0 u^{(0)} v^{(m)} + \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)} +$$

$$+ C_m^m u^{(m)} v^{(0)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)},$$

што і даказвае праўдзівасць формулы (7.23). ■

3°. **Формулы вылічэння n-х вытворных некаторых функцый.** Карыстаючыся формуламі вылічэння вытворных элементарных функцый, выведзем адпаведныя формулы для вытворных n-га парадку.

1. Вылічым n-ю вытворную ступеневай функцыі $y = x^\alpha$ ($x > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$). Падлічваючы паслядоўна вытворныя, атрымаем:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \; y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \; y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \; \ldots .$$

Адсюль лёгка выводзіцца агульная формула

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

У прыватным выпадку, калі $\alpha = m \in \mathbf{N}$, то $(x^m)^{(m)} = m!$, $(x^m)^{(n)} \equiv 0$, $n > m$. Такім чынам, n-я вытворная мнагасклада m-й ступені роўная нулю для ўсіх x пры $n > m$.

2. Калі вылічыць паслядоўна вытворныя паказнікавай функцыі $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), то атрымаем:

$$y' = a^x \ln a, \; y'' = a^x \ln^2 a, \; y''' = a^x \ln^3 a, \; \ldots .$$

Адсюль выводзіцца агульная формула

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

У прыватнасці, $(e^x)^{(n)} = e^x$.

3. Пры паслядоўным вылічэнні вытворных функцыі $y = \sin x$ маем:

$$y' = \cos x = \sin(x + \pi/2),$$
$$y'' = \cos(x + \pi/2) = \sin(x + 2\pi/2), \ \dots .$$

Такім чынам, дыферэнцаванне функцыі $y = \sin x$ дадае да аргумента гэтай функцыі велічыню $\pi/2$. Адсюль атрымліваем формулу

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \pi n/2).$$

Аналагічна

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \pi n/2).$$

Калі $a = \text{const}$, то:

$$(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin(ax + \pi n/2),$$
$$(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos(ax + \pi n/2).$$

Заўвага 7.12. Строгі доказ разгляданых формул вылічэння n-х вытворных вымагае скарыстання метаду матэматычнай індукцыі.

4. Калі функцыя $y = f(x)$ зададзена параметрычна раўнаннямі $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ і $t = \chi(x)$ ёсць адваротная функцыя для функцыі φ, то вытворная функцыі $f(x)$ вызначаецца паводле формулы (7.18):

$$f'(x) = \psi'(t)/\varphi'(t), \tag{7.27}$$

прычым
$$\frac{1}{\varphi'(t)} = \chi'(t) = \frac{dt}{dx}.$$

Калі функцыі $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ маюць вытворныя другога парадку, то, карыстаючыся формулаю (7.12) для вылічэння вытворнай складанай функцыі і беручы пад увагу, што t ёсць функцыя ад x, атрымаем:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]\frac{dt}{dx} =$$
$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}\chi'(x) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}. \tag{7.28}$$

Аналагічна падлічваюцца вытворныя $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$, ...

5. Спосаб вылічэння вытворных вышэйшых парадкаў ад няяўнай функцыі пакажам на прыкладзе няяўнай функцыі, разгледжанай у п. 5° § 7.3.

Няхай функцыя зададзена раўнаннем (7.21)

$$x^2+y^2-1=0.$$

Прадыферэнцуем гэтую роўнасць па x, улічваючы, што y ёсць функцыя ад x, і атрымаем

$$y'=-x/y. \qquad (7.29)$$

Гэтую роўнасць зноў дыферэнцуем па x, зважаючы на тое, што y ёсць функцыя ад x:

$$y''=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{y-xy'}{y^2}.$$

Падстаўляючы сюды замест y' яго выраз з роўнасці (7.29), атрымаем:

$$y''=-(x^2+y^2)/y^2=-1/y^2.$$

Калі прадыферэнцаваць апошнюю роўнасць зноў па x, то знойдзем y''' і г. д.

4°. Дыферэнцыялы вышэйшых парадкаў. Няхай функцыя $y=f(x)$ ёсць дыферэнцавальная ў кожным пункце x пэўнага інтэрвалу. Тады яе дыферэнцыял $dy=f'(x)dx$, які называюць таксама *першым дыферэнцыялам функцыі* f, залежыць ад дзвюх зменных x і dx.

Калі дыферэнцыял dx, які супадае з прыростам Δx незалежнай зменнай x, не змяняецца (зафіксаваны), то дыферэнцыял dy ёсць толькі функцыя ад x. Дыферэнцыял гэтай функцыі, г. зн. дыферэнцыял ад $f'(x)dx$, дзе dx — канстанта, называецца *другім дыферэнцыялам* або *дыферэнцыялам другога парадку функцыі* $y=f(x)$ у пункце x і абазначаецца d^2y або d^2f. Пры гэтым дамаўляемся, што пры вылічэнні дыферэнцыяла $d(dy)=d^2y$ прырост dx незалежнай зменнай выбіраецца той жа самы, што і пры вылічэнні першага дыферэнцыяла.

Няхай функцыя f мае другую вытворную ў пункце x. Тады на падставе таго, што dx ёсць канстанта, атрымаем:

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=dxd(f'(x))=dxf''(x)dx=$$
$$=f''(x)dx^2$$

(dx^2 азначае здабытак $dxdx$). Такім чынам,

$$d^2y=f''(x)dx^2 \qquad (7.30)$$

(d^2y чытаецца: «d два y», а dx^2 — «dx квадрат»).

Аналагічна, дапускаючы для функцыі $y=f(x)$ існаванне вытворнай n-га парадку ў пункце x, назавем

дыферэнцыял ад $d^{n-1}y$ *n-м дыферэнцыялам* або *дыферэнцыялам n-га парадку функцыі* $y=f(x)$, г. зн.

$$d^n y \overset{\text{def}}{=} d(d^{n-1}y).$$

Калі дамовіцца, што прырост незалежнай зменнай пры вылічэнні ўсіх дыферэнцыялаў выбіраецца той жа самы, то метадам індукцыі выводзіцца формула

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (7.31)$$

☐ Сапраўды, для $n=1$ яна даказаная. Калі дапусціць яе праўдзівасць для дыферэнцыяла $(n-1)$-га парадку, то:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) =$$
$$= dx^{n-1}d(f^{(n-1)}(x)) = dx^{n-1}f^{(n)}(x)dx = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Гэта і даказвае праўдзівасць формулы (7.31). ■

З формулы (7.31) вынікае

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n},$$

што выкарыстоўваюць як яшчэ адзін спосаб абазначэння вытворнай n-га парадку. З формулы (7.31) атрымліваецца таксама, што для незалежнай зменнай x

$$d^n x = 0 \quad \forall n > 1.$$

Адзначым *дзве важныя ўласцівасці дыферэнцыялаў n-га парадку* пры дапушчэнні існавання $u^{(n)}$ і $v^{(n)}$:

1) $d^n(\lambda u + \mu v) = \lambda d^n u + \mu d^n v$, λ, $\mu = \text{const}$;

2) $d^n(uv) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^k u d^{n-k} v$.

Іх праўдзівасць вынікае з адпаведных формул для вытворных n-га парадку і наступных пераўтварэнняў:

$$d^n(\lambda u + \mu v) = (\lambda u + \mu v)^{(n)}dx^n = \lambda u^{(n)}dx^n + \mu v^{(n)}dx^n =$$
$$= \lambda d^n u + \mu d^n v,$$

$$d^n(uv) = (uv)^{(n)}dx^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} dx^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (u^{(k)}dx^{(k)})(v^{(n-k)}dx^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k u d^{n-k} v.$$

Заўвага 7.13. У адрозненне ад дыферэнцыялаў першага парадку, якія маюць уласцівасць інварыянтавасці формы (вынік з тэарэмы 7.3), дыферэнцыялы парадку $n \geqslant 2$ не маюць такой уласцівасці.

□ Сапраўды, няхай $x=\varphi(t)$, тады $y=f(x)=f(\varphi(t))$. Калі існуюць $f''(x)$ і $\varphi''(t)$, то на падставе азначэння дыферэнцыяла і правілаў дыферэнцавання здабытку і складанай функцыі атрымаем:

$$dy=f'(x)dx=f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

адкуль

$$d^2y=(f'(\varphi(t))\varphi'(t))dt^2=f''(\varphi(t))(\varphi'(t)dt)^2+f'(\varphi(t))\varphi''(t)dt^2.$$

Паколькі $\varphi'(t)dt=dx$, $\varphi''(t)dt=d^2x$, то

$$d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x. \qquad (7.32)$$

З роўнасцяў (7.30) і (7.32) вынікае, што ўжо для $n=2$ пры замене x на функцыю $\varphi(t)$ мяняецца выгляд другога дыферэнцыяла — у ім узнікае складнік $f'(x)d^2x$. ■

Варта зазначыць, што формулы (7.30) і (7.32) супадаюць, калі $d^2x=0$. Апошняе мае месца не толькі ў выпадку незалежнай зменнай x, але таксама, калі x ёсць лінейная функцыя ад t.

8. ДАСТАСАВАННЕ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНАГА ЗЛІЧЭННЯ ДА ДАСЛЕДАВАННЯ ФУНКЦЫЙ

У гэтым раздзеле даказваецца шэраг тэарэм, якія выяўляюць уласцівасці дыферэнцавальных функцый і спрычыняюцца да даследавання паводзін функцыі як у наваколлі асобных пунктаў абсягу, так і на ўсім абсягу.

8.1. АСНОЎНЫЯ ТЭАРЭМЫ ПРА ДЫФЕРЭНЦАВАЛЬНЫЯ ФУНКЦЫІ

1°. Лакальны экстрэмум. Уласцівасць функцыі, якая мае месца толькі ў пэўным наваколлі разгляданага пункту, называецца *лакальнаю.*

Азначэнне 8.1. *Кажуць, што функцыя $y=f(x)$ мае ў пункце x_0 лакальны максімум (мінімум), калі існуе такая δ-акруга $U_\delta(x_0)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ пункта x_0, што*

$$f(x)\leqslant f(x_0)\ \ (f(x)\geqslant f(x_0))$$

для кожнага $x\in U_\delta(x_0)$.

Лакальны максімум і лакальны мінімум аб'ядноўваюць агульным тэрмінам *лакальны экстрэмум.*

***Тэарэма 8.1* (Фэрма*).** *Калі дыферэнцавальная ў пункце x_0 функцыя $f(x)$ мае ў гэтым пункце лакальны экстрэмум, то $f'(x_0)=0$.*

□ Няхай для пэўнасці функцыя $f(x)$ мае ў пункце x_0 лакальны максімум, тады для $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$ праўдзіцца няроўнасць

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0.$$

Калі перайсці ў гэтай няроўнасці да ліміту пры $x\to x_0+0$, то атрымаем

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0.$$

---

* *Фэрма П'ер* (Fermat Pierre, 1601—1665) — французскі матэматык.

Паколькі функцыя $f(x)$ ёсць дыферэнцавальная ў пункце x_0, то

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)\leqslant 0. \qquad (8.1)$$

З другога боку, калі $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$, праўдзіцца няроўнасць

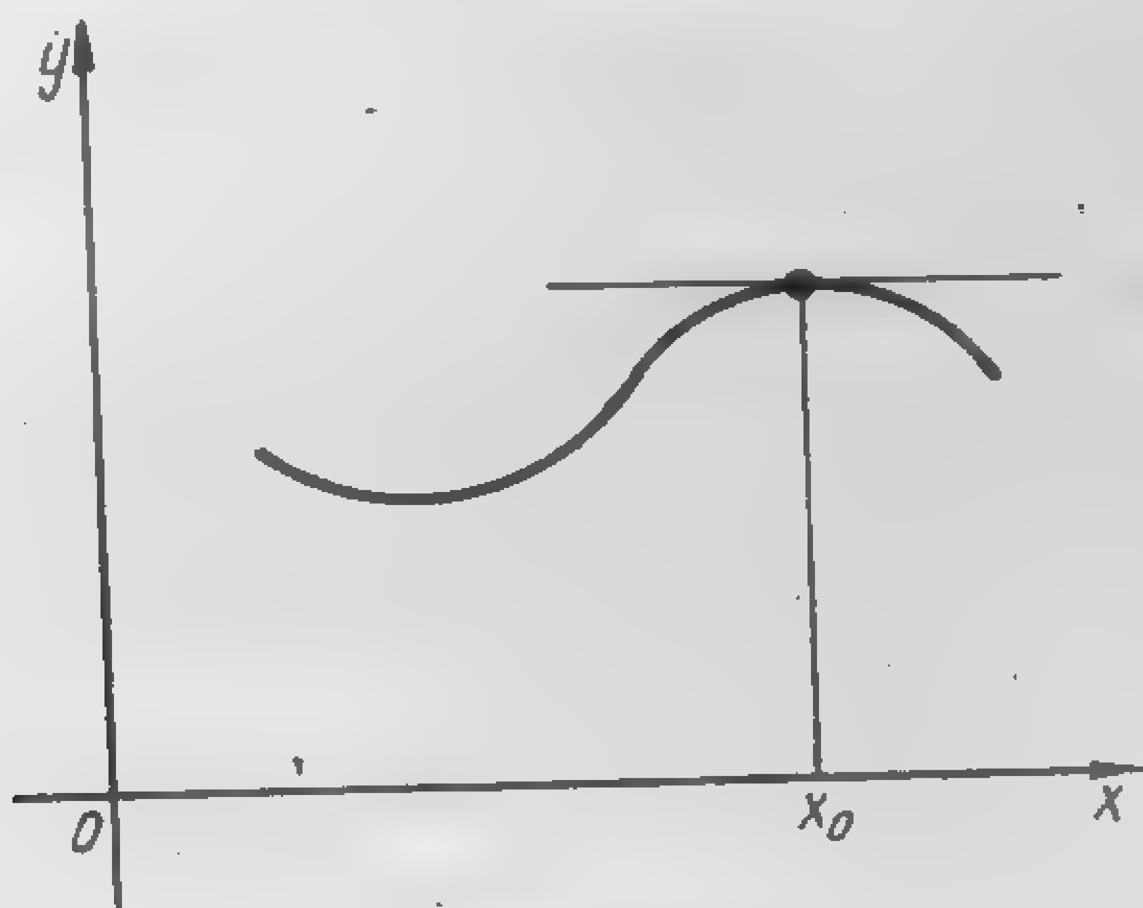
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0,$$

адкуль

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)\geqslant 0. \qquad (8.2)$$

З няроўнасцяў (8.1) і (8.2) вынікае, што $f'(x_0)=0$. ■

Даказаная тэарэма мае зусім просты геаметрычны сэнс: *датычная да графіка функцыі* $y=f(x)$ *у пункце лакальнага экстрэмуму* $(x_0;\ f(x_0))$ *паралельная восі* Ox (рыс. 8.1).



Рыс. 8.1

2°. Тэарэмы пра пасярэднія значэнні. Зараз разгледзім некалькі ўласцівасцяў дыферэнцавальных функцый, якія аб'ядноўваюцца агульнаю назваю *тэарэмы пра пасярэднія значэнні*. Гаворка ідзе пра існаванне на дадзеным адрэзку $[a,\ b]$ такога пункта (пасярэдняга значэння), у якім разгляданая функцыя мае тую або іншую ўласцівасць; пры гэтым месца знаходжання гэтага пункта ўнутры адрэзка $[a,\ b]$ ніяк не ўдакладняецца.

***Тэарэма 8.2* (Роля*).** *Калі функцыя f ёсць непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$, дыферэнцавальная на інтэрвале $(a,\ b)$ і $f(a)=f(b)$, то існуе хаця б адзін пункт $\xi\in(a,\ b)$, такі, што $f'(\xi)=0$.*

---

* *Роль Мішэль* (Rolle Michel, 1652—1719) — французскі матэматык.

□ Зго́дна з тэарэмаю Ваерштраса 6.14, функцыя $f(x)$ ёсць абмежаваная на адрэзку $[a, b]$. Няхай $M=\sup\limits_{[a, b]} f(x)$, $m=\inf\limits_{[a, b]} f(x)$, тады $m \leqslant M$.

Калі $m=M$, то $f(x)=\text{const}$ і за ξ можна узяць кожны пункт інтэрвала (a, b).

Калі $m<M$, то праўдзівая, прынамсі, адна з няроўнасцяў:

$$f(a)=f(b)>m, \quad f(a)=f(b)<M.$$

Няхай $f(a)=f(b)<M$. Згодна з тэарэмаю Ваерштраса 6.15, існуе хоць бы адзін пункт $\xi \in (a, b)$, такі, што $f(\xi)=M$. Тады існуе такі лік $\delta>0$, што $U_\delta(\xi) \subset (a, b)$. Паколькі для ўсіх $x \in U_\delta(\xi)$ выконваецца ўмова $f(x) \leqslant f(\xi)=M$, то функцыя $f(x)$ мае ў пункце ξ лакальны максімум і на падставе тэарэмы Фэрма $f'(\xi)=0$.

Выпадак, калі $f(a)=f(b)>m$, разглядаецца аналагічна. ■

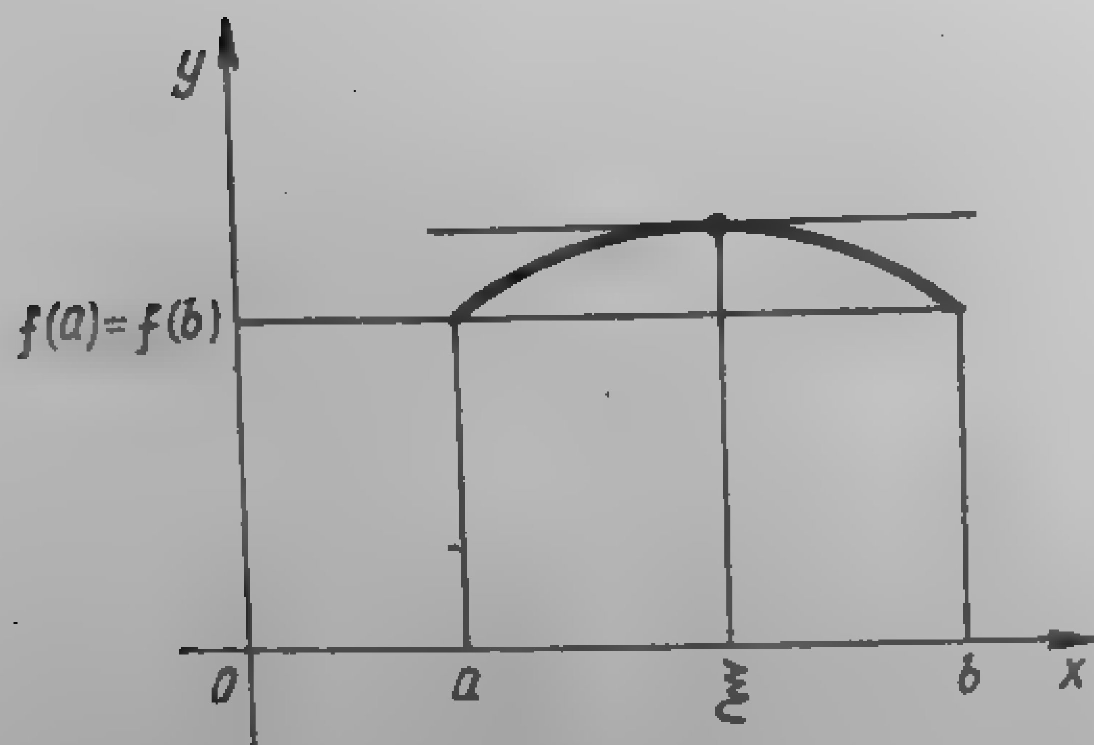
Тэарэма Роля мае наступны геаметрычны сэнс: *паміж двума пунктамі роўных значэнняў функцыі $f(x)$ знойдзецца хоць бы адзін пункт ξ, што датычная да графіка функцыі $y=f(x)$ у пункце $(\xi; f(\xi))$ паралельная восі Ox* (рыс. 8.2).

Заўвага 8.1. Усе тры ўмовы тэарэмы Роля істотныя. Напрыклад, функцыя

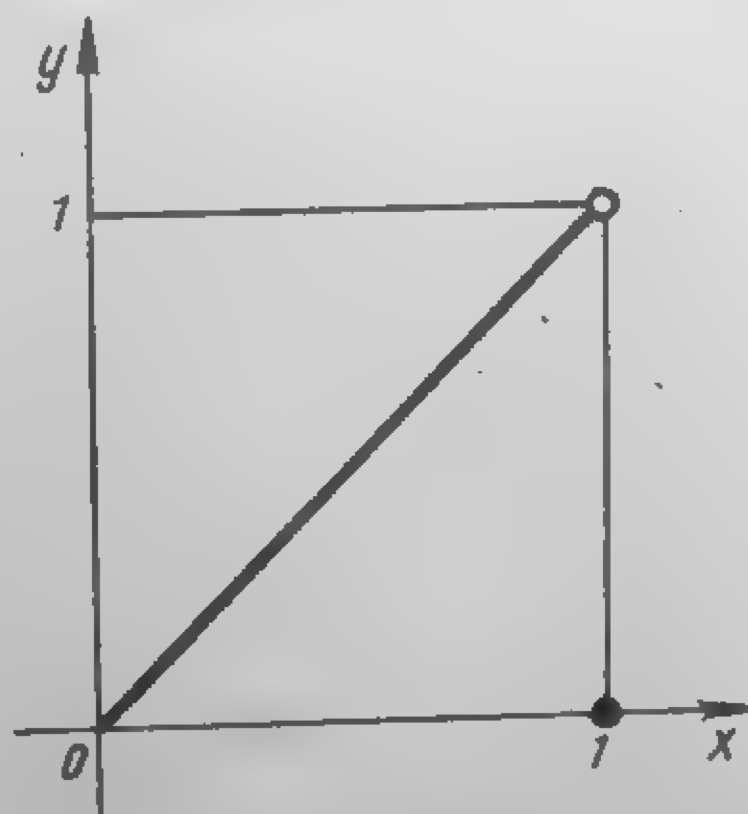
$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{калі } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{калі } x=1, \end{cases}$$

разрыўная ў пункце $x=1$, дыферэнцавальная на інтэрвале $(0, 1)$ і $f(0)=f(1)=0$. Але пры гэтым $f'(x)=1$ у кожным пункце інтэрвала $(0, 1)$, г. зн. $f'(x) \neq 0$ для ўсіх $x \in (0, 1)$ (рыс. 8.3).

Тэарэма 8.3 (Кашы). *Няхай функцыі f і g ёсць*



Рыс. 8.2



Рыс. 8.3

непарыўныя на адрэзку $[a, b]$ *і дыферэнцавальныя на інтэрвале* (a, b), *прычым* $g'(x) \neq 0$ *ва ўсіх пунктах гэтага інтэрвала. Тады знойдзецца хоць бы адзін пункт* $\xi \in (a, b)$, *такі, што*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{8.3}$$

□ Заўважым спачатку, што $g(b) \neq g(a)$, бо ў процілеглым выпадку, згодна з тэарэмаю Роля, існаваў бы пункт $c \in (a, b)$, такі, што $g'(c)=0$ насуперак умовам разгляданай тэарэмы Кашы.

Возьмем дапаможную функцыю

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x),$$

дзе лік λ выберам такім чынам, каб выконвалася роўнасць $\varphi(a) = \varphi(b)$, г. зн.

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{8.4}$$

Для функцыі φ выконваюцца ўсе ўмовы тэарэмы Роля, а таму існуе пункт $\xi \in (a, b)$, такі, што $\varphi'(\xi)=0$, г. зн. $f'(\xi)+\lambda g'(\xi)=0$, адкуль $f'(\xi)/g'(\xi) = -\lambda$. З гэтай роўнасці і з формулы (8.4) вынікае сцверджанне (8.3). ■

***Тэарэма 8.4* (Лягранжа*).** *Калі функцыя* f *ёсць непарыўная на адрэзку* $[a, b]$ *і дыферэнцавальная на інтэрвале* (a, b), *то знойдзецца хоць бы адзін пункт* $\xi \in (a, b)$, *такі, што*

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{8.5}$$

□ Тэарэма Лягранжа з'яўляецца прыватным выпадкам тэарэмы Кашы, калі ўзяць $g(x)=x$. Тады формула (8.3) набывае выгляд

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(\xi)}{1}, \tag{8.6}$$

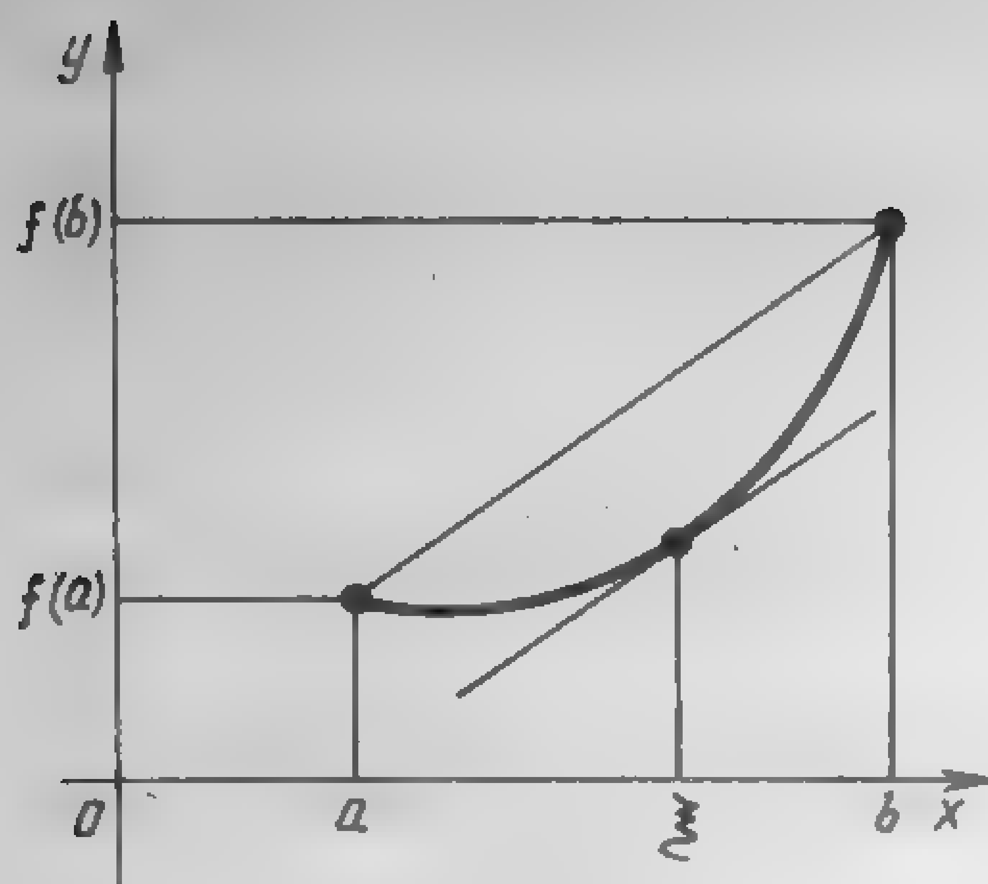
адкуль і выводзіцца формула (8.5). ■

Тэарэма Лягранжа мае наступны геаметрычны сэнс (рыс. 8.4): *датычная да графіка функцыі* $y=f(x)$ *у пункце* $(\xi; f(\xi))$ *паралельная хордзе, што злучае пункты* $(a; f(a))$ *і* $(b; f(b))$.

Заўвага 8.2. Тэарэма Роля ёсць прыватны выпадак тэарэмы Лягранжа, калі $f(a)=f(b)$.

---

* *Лягранж Жазэф Люі* (Lagrange Joseph Louis, 1736—1813) — французскі матэматык і механік.



Рыс. 8.4

Заўвага 8.3. Няхай функцыя f адпавядае ўмовам тэарэмы 8.4. Калі пункт $x_0 \in [a, b]$, а прырост $\Delta x \neq 0$ такі, што $x_0 + \Delta x$ таксама належыць адрэзку $[a, b]$, то, дастасоўваючы тэарэму Лягранжа да функцыі f на адрэзку l з канцамі x_0 і $x_0 + \Delta x$ (Δx можа быць і адмоўным), атрымаем

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x, \tag{8.7}$$

дзе ξ — некаторы ўнутраны пункт адрэзка l. Лёгка пагадзіцца з тым, што знойдзецца такі лік θ з інтэрвала $0 < \theta < 1$, што $\xi = x_0 + \theta\Delta x$. У такім разе формула (8.7) набывае выгляд

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x, \ 0 < \theta < 1. \tag{8.8}$$

Формула (8.8) называецца *формулаю Лягранжа* або *формулаю канечных прыростаў*. Гэтая формула дакладна выяўляе прырост функцыі ў адрозненне ад набліжанай роўнасці

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Тэарэма 8.5. *Калі вытворная функцыі f роўная нулю на прамежку P, то функцыя f ёсць сталая на гэтым прамежку.*

□ Няхай $f'(x) = 0$ для ўсіх $x \in P$. Возьмем фіксаваны пункт $x_0 \in P$ і адвольны пункт $x \in P$, $x \neq x_0$. Згодна з формулай Лягранжа (7.33),

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

дзе ξ знаходзіцца паміж x_0 і x. Паколькі $f'(\xi) = 0$, то $f(x) - f(x_0) = 0$ або $f(x) = f(x_0)$ для ўсіх $x \in P$, што азначае нязменнасць значэнняў функцыі f на прамежку P. ■

Тэарэма 8.6. *Калі вытворныя дзвюх функцый супадаюць на нейкім прамежку P, то гэтыя функцыі розняцца на прамежку P на сталы складнік.*

□ Няхай $f'(x) = g'(x)$ для ўсіх $x \in P$. Абазначым праз $h(x)$ розніцу функцый $f(x)$ і $g(x)$, $h(x) = f(x) - g(x)$. Адсюль вынікае, што $h'(x) = 0$. На падставе тэарэмы 8.5 $h(x) = C = \text{const}$ для ўсіх $x \in P$. Такім чынам, $f(x) - g(x) = C$ для ўсіх $x \in P$. ■

1°. Раскрыццё нявызначанасці 0/0. Будзем гаварыць, што функцыя $f(x)/g(x)$ мае *нявызначанасць* 0/0 пры $x \to a$, калі $f(x)$ і $g(x)$ з'яўляюцца бясконца малымі функцыямі, г. зн.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

і існуе такое праколатае наваколле пункта a, у якім функцыя $f(x)/g(x)$ ёсць вызначаная. У такім разе можна весці гаворку пра існаванне ліміту $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Раскрыць гэтую нявызначанасць — значыць вылічыць $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, калі ён існуе, або даказаць, што ён не існуе. Раскрыццё такіх нявызначанасцяў грунтуецца на наступных тэарэмах.

Тэарэма 8.7. *Калі функцыі f і g ёсць дыферэнцавальныя ў пункце $x=a$ і $f(a)=g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$, то існуе ліміт*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{8.9}$$

□ На падставе формулы (7.4) прырост дыферэнцавальнай функцыі выяўляецца ў выглядзе

$$\Delta f(a) = f(a+\Delta x) - f(a) = f(a+\Delta x) = f'(a)\Delta x + o(\Delta x).$$

Аналагічна

$$\Delta g(a) = g'(a)\Delta x + o(\Delta x).$$

Пасля відавочных пераўтварэнняў атрымаем:

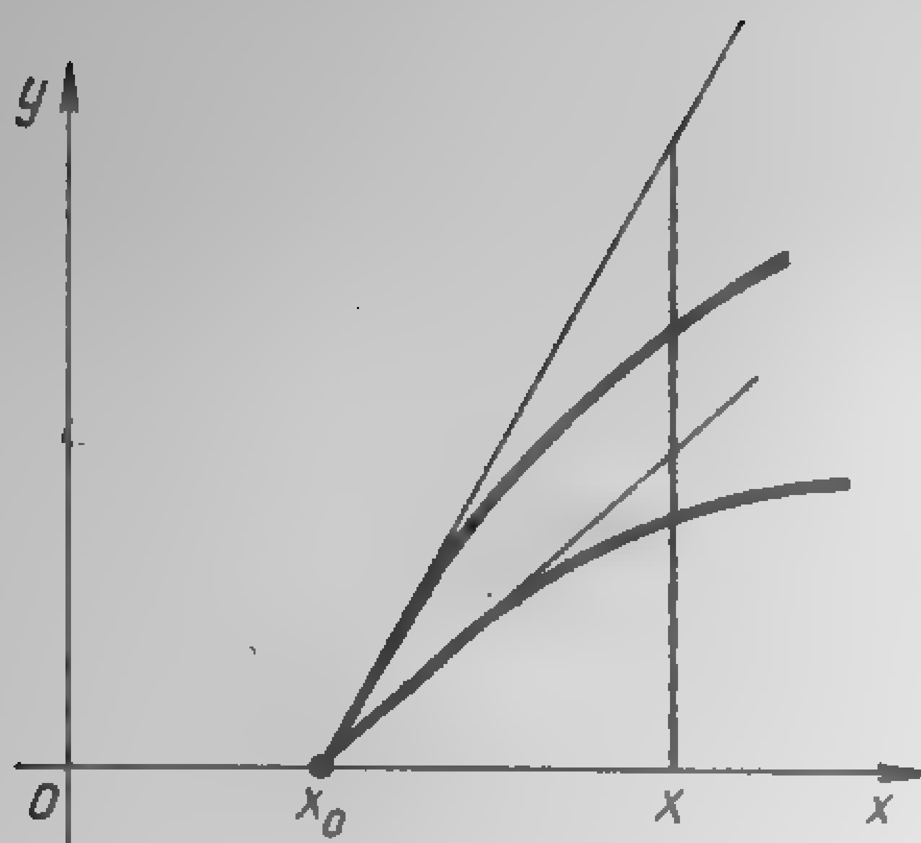
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)}{g(a+\Delta x)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f'(a)\Delta x + o(\Delta x)}{g'(a)\Delta x + o(\Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f'(a) + o(\Delta x)/\Delta x}{g'(a) + o(\Delta x)/\Delta x} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \quad ■$$

Геаметрычны сэнс роўнасці (8.9) складаецца з таго, што *ліміт тасунку ардынатаў графікаў функцый $y=f(x)$ і $y=g(x)$ роўны ліміту тасунку ардынатаў іх датычных $y=f'(x_0)(x-x_0)$ і $y=g'(x_0)(x-x_0)$, якія ёсць нязменны і роўны* $f'(x_0)/g'(x_0)$ (рыс. 8.5).

Аказваецца, што аналагічнае правіла раскрыцця нявызначанасці 0/0 дзейнічае і ў тым разе, калі функцыі $f(x)$ і $g(x)$ недыферэнцавальныя ў самім пункце a, але дыферэнцавальныя ў яго наваколлі.

Тэарэма 8.8. *Няхай функцыі $f(x)$ і $g(x)$ дыферэнцавальныя на інтэрвале (a, b),*



Рыс. 8.5

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0,$$

$g'(x)\neq 0$ на (a, b) і існуе $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тады $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$ таксама існуе і

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□ Няхай $x\in(a, b)$. Разгледзім функцыі:

$$F(t)=\begin{cases} f(t), & \text{калі } t\in(a, x], \\ 0, & \text{калі } t=a, \end{cases} \qquad G(t)=\begin{cases} g(t), & \text{калі } t\in(a, x], \\ 0, & \text{калі } t=a. \end{cases}$$

Функцыі $F(t)$ і $G(t)$ непарыўныя на адрэзку $[a, x]$, дыферэнцавальныя на інтэрвале (a, x) і $G'(t)=g'(t)\neq$ $\neq 0$ для ўсіх $t\in(a, x)$. На падставе тэарэмы Кашы маем

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(c)}{G'(c)},$$

дзе $c\in(a, x)$.

З гэтай роўнасці і з азначэння функцый F і G вынікае, што

$$f(x)/g(x)=f'(c)/g'(c).$$

Пры гэтым калі $x\to a+0$, то $c\to a+0$. Таму

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a+0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad ■$$

З а ў в а г а 8.4. Даказаная тэарэма (з адпаведнымі зменамі яе ўмоваў) застаецца праўдзіваю таксама пры $x\to a-0$ і $x\to a$, дзе a — канечны лік.

З а ў в а г а 8.5. Ліміт $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ можа існаваць і ў тым выпадку, калі ліміт тасунку вытворных $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не існуе. Напрыклад,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}\right)=0,$$

а пры гэтым

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\cos x}$$

не існуе, бо не існуе $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, а ліміт

$$\lim_{x\to 0}\left(2x\cos\frac{1}{x}\right)=0.$$

Тэарэма 8.9. *Няхай функцыі $f(x)$ і $g(x)$ ёсць дыферэнцавальныя для ўсіх $x>a$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ і $g'(x)\neq 0$ для ўсіх $x>a$. Калі існуе ліміт $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то ліміт $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ таксама існуе і*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□ Не абмяжоўваючы агульнасці разважанняў, можна лічыць $a>0$. Калі разгледзець функцыі $f(1/t)$, $g(1/t)$, то яны вызначаныя на інтэрвале $(0, 1/a)$, дыферэнцавальныя на ім,

$$\lim_{t\to+0}f(1/t)=\lim_{t\to+0}g(1/t)=0$$

і

$$\frac{d}{dt}g(1/t)=-\frac{1}{t^2}g'(1/t)\neq 0$$

на гэтым інтэрвале. З дапамогай тэарэмы 7.14 і правіла дыферэнцавання складанай функцыі атрымліваем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to+0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to+0}\frac{\frac{d}{dt}f(1/t)}{\frac{d}{dt}g(1/t)}=$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{(-1/t^2)f'(1/t)}{(-1/t^2)g'(1/t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \ ■$$

Заўвага 8.6. Гэтая тэарэма (з адпаведнымі зменамі яе ўмоваў) застаецца праўдзіваю таксама пры $x\to-\infty$.

2°. Раскрыццё нявызначанасці ∞/∞. Будзем гаварыць, што функцыя $f(x)/g(x)$ мае *нявызначанасць* ∞/∞ пры $x\to a$, калі функцыі $f(x)$ і $g(x)$ з'яўляюцца бясконца вялікімі функцыямі пры $x\to a$.

Тэарэма 8.10. *Няхай функцыі $f(x)$ і $g(x)$ ёсць дыферэнцавальныя на інтэрвале (a, b), $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=\infty$ і $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ на (a, b). Калі існуе ліміт*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A, \tag{8.10}$$

то ліміт $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ таксама існуе і

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

□ Няхай x і x_0 ёсць такія, што $a<x<x_0<b$. Згодна з тэарэмаю Кашы 8.3, існуе такі лік ξ $(x<\xi<x_0)$, што

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Адсюль вынікае, што

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}-\frac{g(x_0)}{g(x)}\,\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{8.11}$$

Возьмем адвольны лік $\varepsilon>0$. Згодна з формулай (8.10) і азначэннем ліміту існуе такі лік $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$, што для ўсіх x, якія праўдзяць няроўнасць $0<x-a<\delta_1$, выконваецца няроўнасць

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Выберам цяпер x_0 у δ_1-акрузе пункта a так, што $0<x_0-a<\delta_1$. Паколькі $x<\xi<x_0$, то $0<\xi-a<\delta_1$ і таму

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.12}$$

Згодна з умовамі тэарэмы, $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{1}{g(x)}=0$. Таму існуе такі лік $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$, што пры ўмове $0<x-a<\delta_2$ праўдзяцца няроўнасці:

$$|f(x_0)/g(x)|<\varepsilon/3, \quad |g(x_0)/g(x)|<\varepsilon/(3A+\varepsilon). \tag{8.13}$$

З роўнасці (8.11), улічваючы судачыненні (8.12) і (8.13), атрымаем:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|\leqslant\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right|+\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|+\left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3A+\varepsilon}\left(A+\frac{\varepsilon}{3}\right)=\varepsilon$$

пры $0<x-a<\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$. Такім чынам, $\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$. ■

Заўвага 8.7. Даказаная тэарэма (з адпаведнымі зменамі яе ўмоваў) ёсць праўдзівая і пры $x\to a-0$ (або $x\to a$), а таксама пры $x\to\pm\infty$.

Заўвага 8.8. Калі пры вылічэнні лімітаў з дапамогаю тэарэмаў 8.8—8.10 атрымаецца, што $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, то і $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$. Гэта вынікае з таго, што

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0.$$

Згодна з разгледжанымі тэарэмамі, існуе агульны спосаб раскрыцця нявызначанасцяў 0/0 або ∞/∞, які грунтуецца на роўнасці

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{8.14}$$

Гэты спосаб называецца *правілам Лёпіталя**.

Калі для вытворных $f'(x)$ і $g'(x)$ выконваюцца ўмовы адной з тэарэм 8.8—8.10, то правіла Лёпіталя (8.14) можна выкарыстоўваць паўторна:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Заўвага 8.9. Трэба адзначыць, што правіла Лёпіталя часам бывае «бездапаможным» у зусім простых выпадках. Так, яно не прыводзіць да мэты пры вылічэнні ліміту

---

* *Лёпіталь Гійом Франсуа Антуан дэ* (L'Hospital Guillaume François Antoine de, 1661—1704) — французскі матэматык.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dots.$$

У той жа час

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1.$$

3°. Раскрыццё нявызначанасцяў іншых тыпаў. Акрамя разгледжаных, сустракаюцца наступныя тыпы нявызначанасцяў: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Усе такія нявызначанасці можна прывесці да выгляду $0/0$ або ∞/∞ шляхам алгебраічных пераўтварэнняў. Пакажам гэта на прыкладах.

Прыклад 8.1. Вылічыць $\lim\limits_{x\to+0} x^\alpha \ln x$, $\alpha>0$.

▷ Ператворым нявызначанасць тыпу $0\cdot\infty$ да тыпу ∞/∞ і дастасуем правіла Лёпіталя:

$$\lim_{x\to+0} x^\alpha \ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{\alpha-1}}=-\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+0} x^2=0. \blacktriangleleft$$

Прыклад 8.2. Знайсці $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$.

▷ Нявызначанасць тыпу $\infty-\infty$ ператворым да тыпу $0/0$ і двойчы скарыстаем правіла Лёпіталя:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=0. \blacktriangleleft$$

Нявызначанасці тыпу 0^0, 1^∞, ∞^0 узнікаюць пры разглядзе функцый $y=u(x)^{v(x)}$, калі пры $x\to a$ функцыя $u(x)$ імкнецца да 0, 1 ці ∞, а $v(x)$ — адпаведна да 0, ∞ і 0. Гэтыя нявызначанасці з дапамогаю тоеснасці

$$u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$$

прыводзяцца да нявызначанасці $0\cdot\infty$, якая разгледжана ў прыкладзе 8.1.

Прыклад 8.3. Даказаць, што $\lim\limits_{x\to+0} x^x=1$.

▷ Нявызначанасць тыпу 0^0 пасля пераўтварэння

$$x^x=e^{x\ln x}=e^{\ln x/x^{-1}}$$

прыводзіцца да нявызначанасці тыпу ∞/∞. На падставе прыклада 8.1 атрымаем

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{\ln x/x^{-1}} = e^{\lim\limits_{x\to+0} \ln x/x^{-1}} = e^0 = 1. ◀$$

Прыклад 8.4. Вылічыць $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$.

▷ Маем нявызначанасць тыпу 1^∞. Пасля пераўтварэння

$$(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^{\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}}$$

атрымалі ў паказніку нявызначанасць 0/0. Паводле правіла Лёпіталя атрымаем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x/(1+x^2)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)\cdot 2x} = 2.$$

Такім чынам,

$$\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}\right) = e^2. ◀$$

Прыклад 8.5. Знайсці $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$.

▷ Маем нявызначанасць тыпу ∞^0. Але

$$(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^{2\cos x \ln \operatorname{tg} x} = e^{2\ln \operatorname{tg} x/\sec x}$$

і ў паказніку атрымалася нявызначанасць ∞/∞. Дастасоўваючы да гэтай нявызначанасці правіла Лёпіталя, маем:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{2\ln \operatorname{tg} x}{\sec x} = 2\lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\sec^2 x}{\sec x \operatorname{tg} x} =$$

$$= 2\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} = 2\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 2\cdot\frac{0}{1} = 0.$$

Такім чынам,

$$\lim_{x\to\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = \exp\left(\lim_{x\to\pi/2} 2\cos x \ln \operatorname{tg} x\right) = e^0 = 1. ◀$$

8.3. ФОРМУЛА ТЭЙЛАРА

1°. Формула Тэйлара з рэшткавым складнікам у форме Пэана. Няхай функцыя $f(x)$ мае ў некаторым наваколлі пункта a вытворныя да n-га парадку ўлучна. Будзем мець на мэце адшуканне такога мнагаскладу n-й

ступені $T_n(x)$, значэнне якога ў пункце $x=a$ было б роўным $f(a)$, а значэнні яго вытворных да n-га парадку супадалі б у пункце $x=a$ са значэннямі адпаведных вытворных функцыі $f(x)$ у гэтым пункце:

$$T_n(a)=f(a),\ T'_n(a)=f'(a),\ \dots,\ T_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a). \quad (8.15)$$

Будзем шукаць такі мнагасклад у выглядзе мнагаскладу па ступенях розніцы $x-a$ з нявызначанымі каэфіцыентамі:

$$T_n(x)=c_n(x-a)^n+c_{n-1}(x-a)^{n-1}+\dots+ \\ +c_1(x-a)+c_0. \quad (8.16)$$

Каэфіцыенты $c_0, c_1, \dots, c_n$ вызначым так, каб праўдзіліся роўнасці (8.15).

Спачатку знойдзем вытворныя мнагаскладу (8.16):

$$\left.\begin{aligned} &T'_n(x)=nc_n(x-a)^{n-1}+\dots+3c_3(x-a)^2+2c_2(x-a)+c_1,\\ &T''_n(x)=n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}+\dots+3\cdot 2c_3(x-a)+2c_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &T_n^{(n)}(x)=n(n-1)\cdots 2\cdot 1c_n. \end{aligned}\right\} \quad (8.17)$$

Калі падставіць у абедзве часткі роўнасцяў (8.16) і (8.17) значэнне $x=a$, то будзем мець:

$$T_n(a)=c_0,\quad T'_n(a)=c_1,\quad T''_n(a)=2\cdot 1c_2,\ \dots, \\ T_n^{(n)}(a)=n(n-1)\cdots 2\cdot 1c_n,$$

адкуль з улікам роўнасцяў (8.15) атрымаем:

$$c_0=f(a),\ c_1=f'(a),\ c_2=\frac{1}{2!}f''(a),\ \dots,\ c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a). \quad (8.18)$$

Падстаўляючы гэтыя значэнні $c_0, c_1, \dots, c_n$ у формулу (8.16), знойдзем шуканы мнагасклад

$$T_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+ \\ +\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (8.19)$$

Гэты мнагасклад называюць *мнагаскладам Тэйлара** n-га парадку для функцыі $f(x)$ у пункце a.

---

* *Тэйлар Брук* (Taylor Brook, 1685—1731) — англійскі матэматык.

Абазначым праз $R_n(x)$ розніцу значэнняў функцыі $f(x)$ і пабудаванага для яе мнагаскладу Тэйлара:

$$R_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - T_n(x), \qquad (8.20)$$

адкуль з улікам формулы (8.19)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \qquad (8.21)$$

Формула (8.21) называецца *формулаю Тэйлара*, а выраз $R_n(x)$ — *рэшткавым складнікам формулы Тэйлара.*

З формулы (8.20) і ўмоў (8.15) вынікае

$$R_n(a) = R_n'(a) = \ldots = R_n^{(n)}(a) = 0.$$

Разгледзім надалей $\lim\limits_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n}$, для вылічэння якога выкарыстаем спачатку $n-1$ разоў правіла Лёпіталя, а пасля тэарэму 8.7:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \ldots = \\ = \lim_{x\to a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \frac{R_n^{(n)}(a)}{n!} = 0.$$

Гэта азначае, што пры $x\to a$

$$R_n(x) = o((x-a)^n).$$

Падстаўляючы атрыманае значэнне $R_n(x)$ у роўнасць (8.21), прыходзім да формулы

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n), \qquad (8.22)$$

якая называецца *формулаю Тэйлара з рэшткавым складнікам у форме Пэана**.

Тэарэма 8.11. *Калі функцыя $f(x)$ мае непарыўныя вытворныя да n-га парадку ў наваколлі пункта a і калі пры $x\to a$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + o((x-a)^n), \qquad (8.23)$$

---

* *Пэана Джузэпэ* (Peano Giuseppe, 1858—1932) — італьянскі матэматык.

то

$$c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},\quad k=\overline{0,\ n}. \qquad (8.24)$$

□ Прыраўняем выяўленне функцыі $f(x)$ паводле формулы Тэйлара (8.22) да выразу (8.23) і атрымаем:

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n+o((x-a)^n)=$$
$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n).$$

Пераходзячы ў гэтай роўнасці да ліміту пры $x\to a$, маем $c_0=f(a)$. Адкідаючы ў той жа роўнасці ў абедзвюх частках роўныя складнікі c_0 і $f(a)$, атрымаем пасля дзялення на $x-x_0$ роўнасць

$$c_1+c_2(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^{n-1}+o((x-a)^{n-1})=$$
$$=f'(a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1}+$$
$$+o((x-a)^{n-1}).$$

Пераходзячы ў гэтай роўнасці да ліміту пры $x\to a$, знойдзем $c_1=f'(a)$. Працягваючы далей гэтыя развažанні, атрымаем роўнасці (8.24). ■

Заўвага 8.10. Тэарэма 8.11 паказвае адзінасць выяўлення функцыі $f(x)$, якая мае ў наваколлі пункта a непарыўныя вытворныя да n-га парадку ўлучна, у выглядзе (8.23), бо каэфіцыенты гэтага выяўлення знаходзяцца паводле формул (8.24) і з'яўляюцца каэфіцыентамі Тэйлара.

Прыклад 8.6. Раскласці функцыю $1/(1-x)$ паводле формулы Тэйлара ў наваколлі пункта $a=0$.

▷ Скарыстаем формулу сумы геаметрычнай прагрэсіі

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

адкуль

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+R_n(x),$$

дзе $R_n(x)=x^{n+1}/(1-x)=o(x^n)$ пры $x\to 0$. Такім чынам, шуканая роўнасць мае выгляд

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n). \qquad (8.25)$$

Паколькі функцыя $1/(1-x)$ ёсць бясконца дыферэнцавальная пры $x\neq 1$, то, згодна з тэарэмаю 8.11, формула (8.25) падае шуканы расклад паводле формулы Тэйлара. ◀

2°. Рэшткавы складнік формулы Тэйлара ў форме Лягранжа. Для тых значэнняў x, для якіх рэшткавы складнік $R_n(x)$ малы, мнагасклад Тэйлара $T_n(x)$ дае набліжанае выяўленне функцыі $f(x)$.

Далейшая наша задача — зрабіць ацэнку велічыні $R_n(x)$ пры розных значэннях x.

***Тэарэма 8.12* (Тэйлара).** *Няхай функцыя $f(x)$ мае ў некаторым наваколлі пункта a вытворную $(n+1)$-га парадку. Няхай x ёсць адвольнае значэнне аргумента з названага наваколля, $x \neq a$. Тады паміж пунктамі a і x знойдзецца такі пункт ξ, што праўдзіцца формула*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (8.26)$$

□ Тэарэма будзе даказана, калі мы пакажам, што рэшткавы складнік у формуле Тэйлара (8.21) можа быць пададзены ў выглядзе

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Зафіксуем адвольнае значэнне $x \neq a$ з разгляданага наваколля. Для пэўнасці будзем лічыць $x>a$. Абазначым праз t зменную велічыню на адрэзку $[a, x]$ і разгледзім на гэтым адрэзку дапаможную функцыю

$$F(t)\overset{\text{def}}{=}f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1!}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)-\ldots-$$
$$-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}R_n(x). \quad (8.27)$$

Пакажам, што функцыя $F(t)$ адпавядае на адрэзку $[a, x]$ усім умовам тэарэмы 8.2.

З формулы (8.27) і з умоваў тэарэмы вынікае, што функцыя $F(t)$ ёсць непарыўная і дыферэнцавальная на адрэзку $[a, x]$. Сапраўды, з існавання у функцыі $f(t)$ у наваколлі пункта a вытворнай $(n+1)$-га парадку вынікае непарыўнасць і дыферэнцавальнасць самой функцыі $f(t)$ і ўсіх яе вытворных да n-га парадку ўлучна ў названым наваколлі, і таму і на адрэзку $[a, x]$. Далей пераканаемся ў тым, што $F(a)=F(x)$. Беручы ў формуле (8.27) $t=a$, атрымаем

$$F(a)=f(x)-T_n(x)-R_n(x)=R_n(x)-R_n(x)=0.$$

Калі ў роўнасці (8.27) узяць $t=x$, то $F(x)=f(x)-f(x)=0$. На падставе тэарэмы Роля існуе пункт $\xi\in(a, x)$, такі, што

$$F'(\xi)=0. \qquad (8.28)$$

Вылічым вытворную $F'(t)$. Калі прадыферэнцаваць па t роўнасць (8.27), то знойдзем

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}R_n(x).$$

Возьмем у гэтай роўнасці $t=\xi$, тады з улікам стасунку (8.28) атрымаем

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (8.29)$$

Выпадак $x<a$ разглядаецца аналагічна. ■

Рэштkавы складнік (8.29) называецца *рэштkавым складнікам у форме Лягранжа.*

Паколькі пункт ξ змяшчаецца паміж пунктамі a і x, то яго можна падаць у форме $\xi=a+\theta(x-a)$, дзе $0<\theta<1$. Рэштkавы складнік (8.29) у форме Лягранжа набывае выгляд

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)),\quad 0<\theta<1.$$

Гэтую форму рэштkавага складніка найбольш часта выкарыстоўваюць у дастасаваннях да набліжанага вылічэння функцыі.

3°. Раскладанне асноўных элементарных функцый паводле формулы Маклёрэна. Калі $a=0$ і ў наваколлі гэтага пункта функцыя $f(x)$ мае вытворныя да $(n+1)$-га парадку, то роўнасць (8.21) набывае выгляд

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x). \qquad (8.30)$$

Формулу (8.30) называюць *формулаю Маклёрэна** з адвольным рэштkавым складнікам. Пры гэтым *рэштkавы складнік у форме Лягранжа* мае выгляд

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^n,\quad 0<\theta<1, \qquad (8.31)$$

а *ў форме Пэана* — $R_n(x)=o(x^n)$.

---

* *Маклёрэн Колін* (Maclaurin Colin, 1698—1746) — шатландскі матэматык.

Далей выведзем расклад некаторых элементарных функцый паводле формулы Маклёрэна.

1. Няхай $f(x)=e^x$. Паколькі $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ для ўсякага n і $f(0)=1$, то формула Маклёрэна (8.30) набывае выгляд

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x), \qquad (8.32)$$

дзе рэшткавы складнік у форме Лягранжа, згодна з формулаю (8.31), роўны

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \quad 0<\theta<1. \qquad (8.33)$$

2. Няхай $f(x)=\sin x$. Тады $f^n(x)=\sin(x+n\pi/2)$, адкуль

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & \text{калі } n=2m \text{ — цотны,}\\ (-1)^m, & \text{калі } n=2m+1 \text{ — няцотны,}\end{cases}$$

і формула Маклёрэна для сінуса мае выгляд

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+$$
$$+(-1)^{2m+1}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+R_{2m+2}(x), \qquad (8.34)$$

а рэшткавы складнік у форме Лягранжа роўны

$$R_{2m+2}(x)=\frac{x^{2m+3}}{(2m+3)!}\sin\left(\theta x+(2m+3)\frac{\pi}{2}\right), \quad 0<\theta<1. \qquad (8.35)$$

3. Няхай $f(x)=\cos x$. Аналагічна $f^{(n)}(x)=\cos(x+ +n\pi/2)$,

$$f^{(n)}(0)=\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & \text{калі } n=2m+1,\\ (-1)^m, & \text{калі } n=2m.\end{cases}$$

З формул (8.30) і (8.31) атрымаем:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+$$
$$+(-1)^m x^{2m}+R_{2m+1}(x), \qquad (8.36)$$

$$R_{2m+1}(x)=\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos\left(\theta x+(2m+2)\frac{\pi}{2}\right), \quad 0<\theta<1. \qquad (8.37)$$

Заўвага 8.11. Паколькі функцыя $\sin x$ ёсць няцотная, а $\cos x$ — цотная, то расклад (8.34) функцыі $\sin x$ змяшчае толькі няцотныя ступені x, а расклад (8.36) функцыі $\cos x$ — толькі цотныя.

4. Калі $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}$, то

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n},$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1)),$$

і формула Маклёрэна (8.30) набывае выгляд

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+R_n(x), \tag{8.38}$$

дзе рэшткавы складнік у форме Лягранжа роўны

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1},$$
$$0<\theta<1. \tag{8.39}$$

У прыватнасці, калі $\alpha=n$, $n\in\mathbf{N}$, то $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$, а тым самым $R_{n+1}(x)=0$, і мы атрымаем *формулу бінома Ньютана* (1.51):

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+x^n.$$

Адзначым яшчэ два важныя прыватныя выпадкі формулы (8.38):

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+R_n(x), \tag{8.40}$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^nx^n+R_n(x).$$

Заўважым, што расклад паводле формулы (8.40) быў атрыманы іншым спосабам у прыкладзе 8.6.

5. Няхай $f(x)=\ln(1+x)$. Паколькі $f(0)=0$,

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

то формула Маклёрэна (8.30) набывае выгляд

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x), \tag{8.41}$$

дзе рэшткавы складнік у форме Лягранжа роўны

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}. \tag{8.42}$$

4°. Дастасаванне формулы Маклёрэна да набліжаных вылічэнняў. Пададзеныя вышэй расклады функцый паказваюць, што пры дапамозе формулы Маклёрэна можна з пэўнай ступенню дакладнасці замяняць элементарныя функцыі мнагаскладамі, якія з'яўляюцца найбольш простымі сярод элементарных функцый.

З формулы (8.20) вынікае, што хібнасць ад замены функцыі яе мнагаскладам Тэйлара роўная значэнню рэшткавага складніка ў разгляданым пункце. Для таго каб зрабіць ацэнку хібнасці набліжанага вылічэння, мы дакажам наступную тэарэму.

Тэарэма 8.13. *Калі функцыя $f(x)$ ёсць бясконца дыферэнцавальная ў некатарым наваколлі пункта $x=0$ і існуе такі лік M, што для ўсіх $n\in\mathbf{N}$ і для ўсіх значэнняў x з разгляданага наваколля праўдзіцца няроўнасць*

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M, \tag{8.43}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0. \tag{8.44}$$

□ Паколькі $0<\theta<1$, то $|\theta x|\leqslant|x|$, і таму з няроўнасці (8.43) вынікае, што

$$|f^{(n)}(\theta x)|\leqslant M,$$

а з формулы (8.31) маем

$$|R_n(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\theta x)|\leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Такім чынам, мы атрымалі ўніверсальную ацэнку рэшткавага складніка для функцыі $f(x)$:

$$|R_n(x)|\leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{8.45}$$

Далей пакажам, што для кожнага фіксаванага значэння x

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0. \tag{8.46}$$

Для фіксаванага значэння x знойдзецца такі натуральны лік N, што

$$|x|<n+1\quad\forall n\geqslant N.$$

Абазначым $a_n \overset{\text{def}}{=} x^{n+1}/(n+1)!$. Тады

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{n+1} < 1,$$

і мы атрымаем

$$|a_{n+1}| < |a_n| \quad \forall n \geqslant N.$$

Гэта азначае, што, пачынаючы з нумара N, паслядоўнасць $(|a_n|)$ ёсць спадальная. Паколькі гэтая паслядоўнасць ёсць абмежаваная знізу (напрыклад, лікам нуль), то, згодна з тэарэмаю 6.1, яна збягаецца да нейкага ліміту a. Паколькі

$$|a_{n+1}| = |a_n| \frac{|x|}{n+1},$$

то пасля пераходу ў гэтай роўнасці да ліміту пры $n \to \infty$ атрымаем

$$a = a \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Такім чынам, паслядоўнасць $(|a_n|)$ ёсць бясконца малая, а гэта і азначае праўдзівасць роўнасці (8.46).

Пераходзячы да ліміту пры $x \to \infty$ у няроўнасці (8.45), на падставе стасунку (8.46) атрымаем роўнасць (8.44). ■

Даказаная тэарэма азначае, што, выбіраючы дастаткова вялікім нумар n, можна зрабіць правую частку няроўнасці (8.45) наколькі пажадана малою. Гэта дае нам магчымасць выкарыстоўваць формулу Маклёрэна для набліжанага вылічэння функцый, што задавальняюць умовы тэарэмы 8.13,з адвольнаю наперад зададзенаю дакладнасцю.

Возьмем, напрыклад, функцыю $f(x) = e^x$. Паколькі ўсе яе вытворныя на адрэзку $[-a, a]$ праўдзяць няроўнасць $|f^{(n)}(x)| = e^x \leqslant e^a$, то, згодна з формулаю (8.45), атрымаем наступную ацэнку для рэшткавага складніка (8.33):

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = e^a. \tag{8.47}$$

Калі ўзяць $x = a = 1$, то з формулы (8.32) атрымаем

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n(1), \tag{8.48}$$

дзе, згодна з няроўнасцю (8.47),

$$|R_n(1)| \leqslant \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}, \qquad (8.49)$$

паколькі $2<e<3$. Калі ў няроўнасці (8.49) узяць $n=8$, то

$$|R_8| < \frac{1}{9!}\cdot 3 < 10^{-5}.$$

У такім разе роўнасць

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!}$$

задае значэнне ліку e з дакладнасцю 10^{-5}. Пасля адпаведных вылічэнняў атрымаем

$$e \approx 2{,}71828.$$

У сваю чаргу функцыя $f(x)=\sin x$ і ўсе яе вытворныя задавальняюць умовы тэарэмы 8.13, і для рэшткавага складніка (8.35) выконваецца роўнасць $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ для ўсіх значэнняў x.

Выкарыстаем формулу (8.34) для набліжанага вылічэння $\sin 20°$, беручы $m=1$:

$$\sin 20° = \sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0{,}342.$$

Ацэнім хібнасць вылічэння:

$$|R_4| = \left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 \frac{1}{5!}\sin\left(\theta\frac{\pi}{9}+\frac{5}{2}\pi\right)\right| \leqslant \left(\frac{\pi}{9}\right)^5 \frac{1}{5!} \approx 0{,}00043 < 0{,}001.$$

Такім чынам, $\sin 20° \approx 0{,}342$ з дакладнасцю 0,001.

5°. Выкарыстанне формулы Маклёрэна пры вылічэнні лімітаў. Калі ў формулах Маклёрэна (8.32), (8.34), (8.36), (8.38), (8.41) узяць рэштвавы складнік у форме Пэана, то для функцый e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$, $\ln(1+x)$ мы атрымаем наступныя выяўленні:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n), \qquad (8.50)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}), \qquad (8.51)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}), \qquad (8.52)$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o(x^n), \qquad (8.53)$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+$$
$$+(-1)^n\frac{x^n}{n}+o(x^n). \qquad (8.54)$$

Няхай функцыя $f(x)/g(x)$ пры $x\to 0$ мае нявызначанасць тыпу 0/0. Дапусцім, што

$$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0, \quad f^{(n)}(0)\neq 0.$$

Тады расклад функцыі $f(x)$ паводле формулы Маклёрэна мае выгляд

$$f(x)=ax^n+o(x^n), \quad a\neq 0, \quad x\to 0. \qquad (8.55)$$

Аналагічна, дапускаючы, што

$$g(0)=g'(0)=\ldots=g^{(m-1)}(0)=0, \quad g^{(m)}(0)\neq 0,$$

атрымаем

$$g(x)=bx^m+o(x^m), \quad b\neq 0, \quad x\to 0. \qquad (8.56)$$

З роўнасцяў (8.55) і (8.56) вынікае:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{ax^n+o(x^n)}{bx^m+o(x^m)}, \quad x\to 0.$$

Калі $m=n$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^n+o(x^n)}{bx^n+o(x^n)}=\lim_{x\to 0}\frac{a+o(x^n)/x^n}{b+o(x^n)/x^n}=\frac{a}{b}.$$

Калі $n>m$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$; калі ж $n<m$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Прыклад 8.7. Вылічыць $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^3\sin x}$.

▷ Карыстаючыся формуламі (8.50) — (8.52), атрымаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^3\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2/2+x^4/8+o(x^4)-1+x^2/2-x^4/24+o(x^4)}{x^3(x+o(x))}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4/12+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\frac{1}{12}. \blacktriangleleft$$

Прыклад 8.8. Знайсці $\lim\limits_{x\to 0}(e^{-\sin x}-\ln(1-x))^{1/(1-\cos x)}$.

▷ Няхай

$$f(x)\overset{\text{def}}{=}e^{-\sin x}-\ln(1-x),\quad g(x)\overset{\text{def}}{=}1-\cos x.$$

Карыстаючыся формуламі (8.50), (8.51), (8.54), атрымаем:

$$f(x)=e^{-x+o(x^2)}+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)=1+(-x+o(x^2))+$$

$$+\frac{1}{2}(-x+o(x^2))^2+o(x^2)+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)=$$

$$=1-x+\frac{x^2}{2}+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)=1+x^2+o(x^2).$$

На падставе формулы (8.52) маем $g(x)=x^2/2+o(x^2)$. Далей для вылічэння ліміту выкарыстаем асноўную лагарыфмічную тоеснасць і формулу (8.54):

$$\lim_{x\to 0}f(x)^{1/g(x)}=\lim_{x\to 0}\exp(\ln f(x)/g(x))=$$

$$=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln(1+x^2+o(x^2))}{x^2/2+o(x^2)}\right)=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{x^2+o(x^2)}{x^2/2+o(x^2)}\right)=e^2. \blacktriangleleft$$

8.4. ДАСЛЕДАВАННЕ ФУНКЦЫЙ І БУДАВАННЕ ГРАФІКАЎ

1°. Манатоннасць функцыі. Згодна з азначэннем 6.13, *манатоннымі* называюцца нарастальныя, спадальныя, неспадальныя, ненарастальныя функцыі, пры гэтым нарастальныя і спадальныя функцыі называюцца *строга манатоннымі.*

Тэарэма 8.14. *Для таго каб дыферэнцавальная на прамежку P функцыя $f(x)$ была неспадальнаю (ненарастальнаю) на гэтым прамежку, неабходна і дастаткова, каб $f'(x)\geqslant 0$ ($f'(x)\leqslant 0$) для ўсіх $x\in P$.*

□ Абмяжуемся доказам тэарэмы толькі для выпадку нарастальнай функцыі.

Неабходнасць. Няхай функцыя $f(x)$ ёсць нарастальная на прамежку P. Возьмем адвольнае значэнне $x=x_0$ з гэтага прамежку і нададзім аргументу такі прырост Δx, каб $x_0+\Delta x\in P$. Паколькі функцыя $f(x)$ ёсць нарастальная на P, то

$$f(x_0+\Delta x)>f(x_0)\ \text{пры}\ \Delta x>0$$

i

$$f(x_0+\Delta x)<f(x_0) \text{ пры } \Delta x<0.$$

У абодвух выпадках праўдзіцца няроўнасць

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0.$$

На падставе тэарэмы пра лімітавы пераход у няроўнасці маем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

Паколькі функцыя $f(x)$ ёсць дыферэнцавальная ў пункце x_0, то з апошняй няроўнасці вынікае

$$f'(x_0)\geqslant 0 \quad \forall x_0\in P.$$

Д а с т а т к о в а с ц ь. Няхай $f'(x)\geqslant 0$ $\forall x\in P$ і x_1, x_2 — адвольныя пункты прамежку P, прычым $x_1<x_2$. Карыстаючыся тэарэмаю 8.4 Лягранжа на адрэзку $[x_1, x_2]$, атрымаем:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\quad x_1<\xi<x_2,$$

дзе $f'(\xi)\geqslant 0$, паколькі $\xi\in P$. Адсюль вынікае $f(x_2)\geqslant f(x_1)$ для ўсіх $x_1, x_2\in P$, $x_1<x_2$, а гэта азначае, што функцыя $f(x)$ — неспадальная на прамежку P. ■

Тэарэма 8.15. *Калі функцыя $f(x)$ ёсць дыферэнцавальная на прамежку P і $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для ўсіх $x\in P$, то функцыя $f(x)$ ёсць нарастальная (спадальная) на прамежку P.*

□ Няхай $f'(x)>0$ $\forall x\in P$. Няхай x_1, x_2 — адвольныя пункты прамежку P, прычым $x_1<x_2$. Паводле тэарэмы Лягранжа

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$

дзе $\xi\in P$, і таму $f'(\xi)>0$. З апошняй роўнасці вынікае $f(x_2)>f(x_1)$. Гэта азначае, што функцыя $f(x)$ ёсць нарастальная на P.

Выпадак $f'(x)<0$ $\forall x\in P$ разглядаецца аналагічна. ■

З а ў в а г а 8.12. Умова $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) не з'яўляецца неабходнаю ўмоваю строгай манатоннасці функцыі. Напрыклад, функцыя $f(x)=x^3$ ёсць нарастальная на $\mathbb{R}$. Сапраўды,

$$x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=(x_1-x_2)\left(\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right)<0,$$

калі $x_1<x_2$. У той жа час $f'(0)=0$.

2°. Лакальны экстрэмум функцыі. Даказаная намі тэарэма 8.1 Фэрма дае магчымасць сфармуляваць *неабходную ўмову экстрэмуму дыферэнцавальнай у зададзеным пункце функцыі: калі дыферэнцавальная ў пункце x_0 функцыя мае ў гэтым пункце экстрэмум, то* $f'(x_0)=0$.

Пункты, у якіх вытворная функцыі роўная нулю, называюць *стацыянарнымі пунктамі.* Кожны стацыянарны пункт — гэта пункт магчымага экстрэмуму.

З другога боку, непарыўная ў пункце функцыя можа мець экстрэмум у некаторым пункце, але не быць у ім дыферэнцавальнай.

Так, напрыклад, пункт $x=0$ для функцыі $y=|x|$ ёсць пункт мінімуму, але вытворная гэтай функцыі ў пункце $x=0$ не існуе.

Пункты, у якіх функцыя ёсць непарыўная, а яе вытворная або роўная нулю, або не існуе, называюцца *крытычнымі пунктамі.* Разам з тым не кожны крытычны пункт функцыі ёсць яе пункт экстрэмуму.

Так, для функцыі $y=x^3$ пункт $x=0$ — стацыянарны, але функцыя не мае экстрэмумаў.

Для таго каб высветліць, ці з'яўляецца крытычны пункт функцыі пунктам экстрэмуму, патрабуюцца дадатковыя даследаванні. Для гэтай мэты мы дакажам наступныя дзве тэарэмы.

Будзем гаварыць, што пры пераходзе праз пункт x_0 вытворная функцыі $f(x)$ *змяняе знак з «мінуса» на «плюс»* (*з. «плюса» на «мінус»*), калі існуе лік $\delta>0$, такі, што:

$$f'(x)<0 \quad \forall x\in(x_0-\delta,\ x_0),$$
$$f'(x)>0 \quad \forall x\in(x_0,\ x_0+\delta), \qquad (8.57)$$
$$(f'(x)>0 \quad \forall x\in(x_0-\delta,\ x_0),$$
$$f'(x)<0 \quad \forall x\in(x_0,\ x_0+\delta)).$$

Тэарэма 8.16 **(першая дастатковая ўмова экстрэмуму).** *Няхай функцыя $f(x)$ ёсць дыферэнцавальная ў некаторым праколатым наваколлі пункта x_0 і непарыўная ў пункце x_0. Тады:*

1) *калі вытворная функцыі змяняе знак з «мінуса» на «плюс» пры пераходзе праз пункт x_0, то x_0 — пункт мінімуму функцыі $f(x)$;*

2) *калі вытворная $f'(x)$ змяняе знак з «плюса» на*

«мінус» пры пераходзе праз пункт x_0, то x_0 — пункт максімуму функцыі $f(x)$.

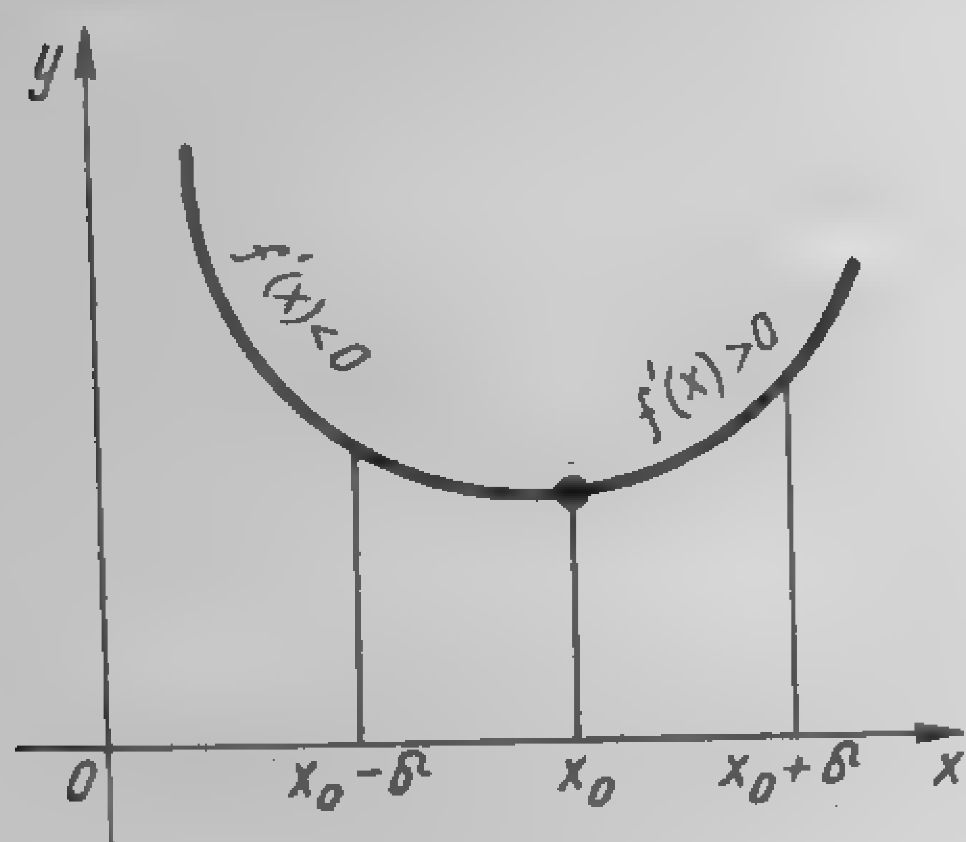
□ Няхай $f'(x)$ змяняе знак з «мінуса» на «плюс» пры пераходзе праз пункт x_0 (рыс. 8.6), г. зн. існуе такі лік $\delta>0$, што выконваюцца ўмовы (8.57). На падставе тэарэмы 8.15 функцыя $f(x)$ ёсць спадальная на інтэрвале $(x_0-\delta, x_0)$ і нарастальная на інтэрвале $(x_0, x_0+\delta)$. У такім разе

$$f(x)>f(x_0)\ \forall x\in(x_0-\delta,\ x_0),$$

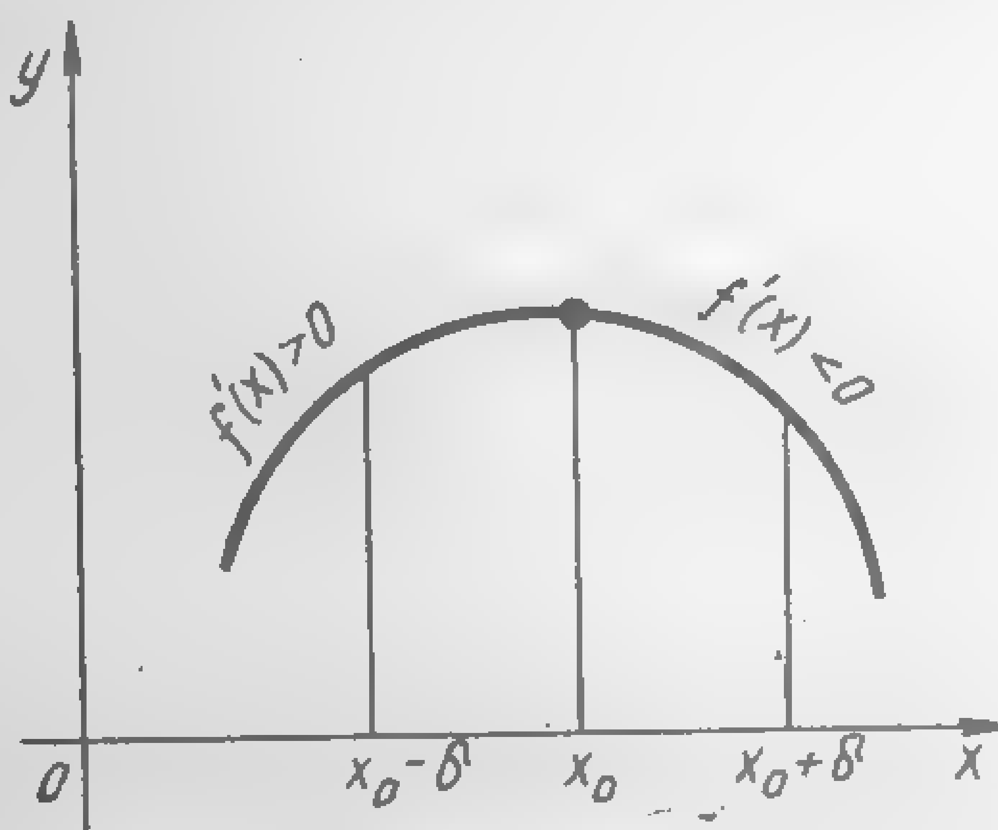
$$f(x_0)<f(x)\ \forall x\in(x_0,\ x_0+\delta).$$

З апошніх дзвюх няроўнасцяў вынікае, што x_0 ёсць пункт мінімуму функцыі $f(x)$.

Аналагічна разглядаецца выпадак 2 тэарэмы (рыс. 8.7). ■



Рыс. 8.6



Рыс. 8.7

Здараецца, што пры карыстанні тэарэмаю 8.16 узнікаюць цяжкасці даследавання знака вытворнай па абодва бакі ад стацыянарнага пункта. На такі выпадак мы дакажам другую дастатковую ўмову экстрэмуму ў стацыянарным пункце, але ў такім разе ад функцыі патрабуецца існаванне ў гэтым пункце вытворнай больш высокага парадку, чым першы.

Тэарэма 8.17 **(другая дастатковая ўмова экстрэмуму).** *Няхай x_0 ёсць стацыянарны пункт функцыі $f(x)$, у якім існуе $f^{(n)}(x_0)$, дзе $n\geqslant 2$, і выконваюцца ўмовы:*

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \tag{8.58}$$

$$f^{(n)}(x_0)\neq 0. \tag{8.59}$$

Тады:

1) калі n — цотны лік, то x_0 — пункт экстрэмуму, прычым пункт максімуму ў выпадку $f^{(n)}(x_0)<0$ і пункт мінімуму ў выпадку $f^{(n)}(x_0)>0$;

2) *калі n — няцотны лік, то x_0 не з'яўляецца пунктам экстрэмуму.*

□ Паводле формулы Тэйлара (8.22) з рэшткавым складнікам у форме Пэана з улікам роўнасцяў (8.58) атрымаем

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

Улічваючы ўмову (8.59), апошнюю роўнасць можна запісаць у выглядзе

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n(1+\alpha(x)), \quad (8.60)$$

дзе $\alpha(x)$ ёсць бясконца малая функцыя пры $x\to x_0$. Дзеля гэтага існуе лік $\delta>0$, такі, што для ўсякага $x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$ выконваецца няроўнасць $|\alpha(x)|<1$, адкуль вынікае

$$1+\alpha(x)>0\quad\forall x\in\mathring{U}_\delta(x_0). \quad (8.61)$$

З роўнасці (8.60), згодна з умоваю (8.61), атрымаем

$$\operatorname{sign}(f(x)-f(x_0))=\operatorname{sign}(f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n)\quad\forall x\in\mathring{U}_\delta(x_0). \quad (8.62)$$

1. Няхай далей $n=2k$ — цотны лік, тады

$$(x-x_0)^n=(x-x_0)^{2k}>0\quad\forall x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$$

і з роўнасці (8.62) атрымаем

$$\operatorname{sign}(f(x)-f(x_0))=\operatorname{sign}f^{(n)}(x_0).$$

Калі $f^{(n)}(x_0)>0$, то

$$f(x)-f(x_0)>0\quad\forall x\in\mathring{U}_\delta(x_0).$$

Гэта азначае, што x_0 — пункт мінімуму функцыі f.

Аналагічна калі $f^{(n)}(x_0)<0$, то

$$f(x)-f(x_0)<0\quad\forall x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$$

і x_0 — пункт максімуму функцыі f.

2. Няхай зараз $n=2k+1$ — няцотны лік, тады з формулы (8.62) вынікае, што розніца $f(x)-f(x_0)$ змяняе знак пры пераходзе праз пункт x_0, бо функцыя $(x-x_0)^{2k+1}$ змяняе знак пры пераходзе праз пункт x_0. Гэта азначае, што x_0 не з'яўляецца пунктам экстрэмуму функцыі f. ■

Заўвага 8.13. У прыватным выпадку, калі $n=2$, $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, пры $f''(x_0)<0$ функцыя $f(x)$ у пункце x_0 мае максімум, а пры

$f''(x_0)>0$ — мінімум; калі $n=3$, $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, то x_0 не з'яўляецца пунктам экстрэмуму функцыі f.

3°. Глабальны экстрэмум функцыі. Найбольшае $\max_P f(x)$ (найменшае $\min_P f(x)$) значэнне функцыі $f(x)$ на прамежку P называецца *глабальным максімумам (глабальным мінімумам)* або *глабальным экстрэмумам*.

З тэарэмы 6.15 Ваерштраса вынікае, што непарыўная на адрэзку $[a, b]$ функцыя $f(x)$ мае на гэтым адрэзку найбольшае і найменшае значэнні. Калі пункт ξ, у якім функцыя $f(x)$ мае глабальны экстрэмум, ёсць унутраны пункт адрэзка $[a, b]$, то ў пункце ξ функцыя мае лакальны экстрэмум, і таму ξ ёсць крытычны пункт функцыі $f(x)$.

Такім чынам, функцыя $f(x)$ мае глабальны экстрэмум або ў адным з крытычных пунктаў інтэрвала (a, b), або ў адным з канцавых пунктаў a, b.

Прыклад 8.9. Даказаць, што пры $x\in[0, \pi/2]$ праўдзіцца няроўнасць $0\leqslant \sin^3 x\cos x\leqslant 3\sqrt{3}/16$.

▷ Станоўчы вынік атрымаем тады, калі дакажам, што найбольшае і найменшае значэнні функцыі

$$f(x)\overset{\text{def}}{=}\sin^3 x\cos x,$$

разгляданай на адрэзку $[0, \pi/2]$, належаць адрэзку $[0, 3\sqrt{3}/16]$. Функцыя $f(x)$ непарыўная і дыферэнцавальная на гэтым адрэзку. Знойдзем яе вытворную:

$$f'(x)=\sin x\sin 3x.$$

Раўнанне $f'(x)=0$ мае адзін развязак $x_0=\pi/3$ на інтэрвале $(0, \pi/2)$. Падлічым значэнні функцыі ў стацыянарным пункце і на канцах адрэзка: $f(0)=0$, $f(\pi/3)=3\sqrt{3}/16$, $f(\pi/2)=0$. Такім чынам,

$$\min_{[0,\,\pi/2]} f(x)=0,\quad \max_{[0,\,\pi/2]} f(x)=3\sqrt{3}/16.$$

Паколькі абодва значэнні належаць адрэзку $[0, 3\sqrt{3}/16]$, то няроўнасць даказаная. ◀

Заўвага 8.14. Калі прамежак P, на якім функцыя $f(x)$ ёсць непарыўная, не з'яўляецца адрэзкам, то ў такім разе для знаходжання глабальнага экстрэмуму параўноўваюць мноства значэнняў функцыі ў крытычных пунктах са значэннямі яе лімітаў на канцах прамежку.

Прыклад 8.10. Знайсці глабальныя экстрэмумы функцыі $y=xe^x$ на $\mathbb{R}$.

▷ Калі вытворную $y'=(x+1)e^x$ прыраўняць да нуля, то атрымаецца, што функцыя мае адзін стацыянарны пункт $x_0=-1$. Падлічым:

$$f(-1)=-e^{-1}, \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0, \quad \lim_{x\to+\infty} xe^x=+\infty.$$

Параўноўваючы паміж сабою гэтыя лікі, атрымаем, што найменшае значэнне $y=-e^{-1}$ функцыя мае ў пункце $x=-1$, а найбольшага значэння функцыя не дасягае. ◀

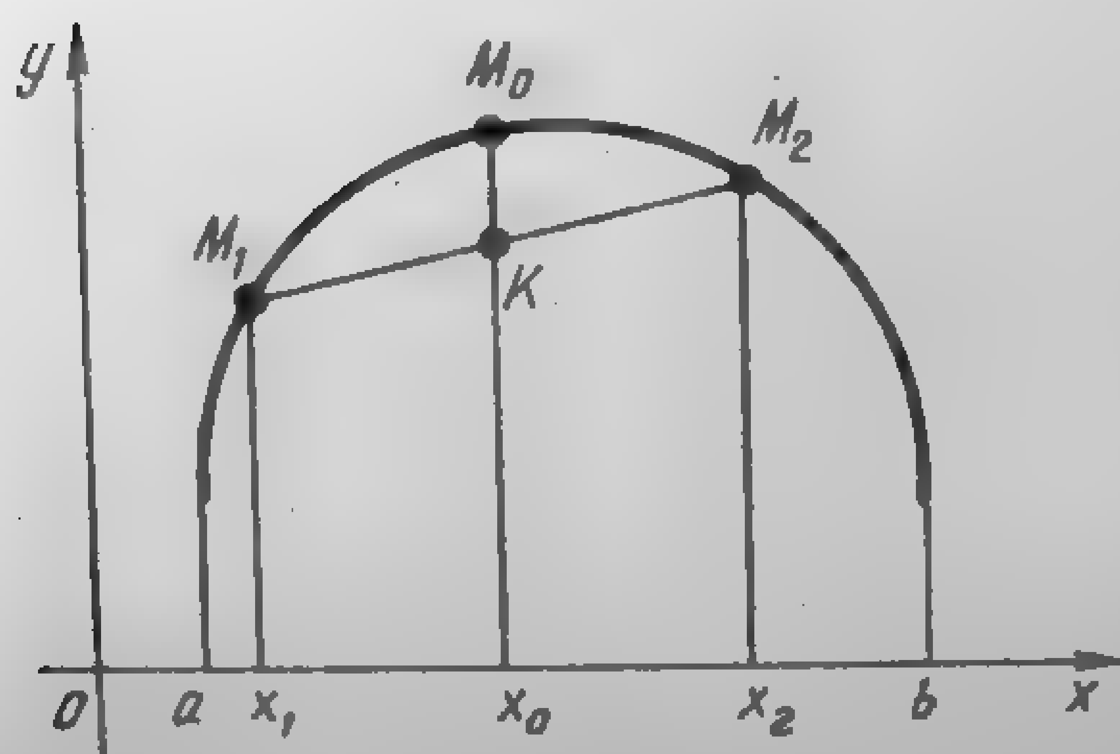
4°. Выпукласць і пункты перагіну функцыі. Важнаю характарыстыкай функцыі, а тым самым і яе графіка, ёсць паняцце выпукласці.

Азначэнне 8.2. *Непарыўная функцыя $f(x)$ называецца выпуклаю ўверх (выпуклаю ўніз) на інтэрвале (a, b), калі для ўсіх пунктаў x_1 і x_2 з інтэрвала (a, b) праўдзіцца няроўнасць*

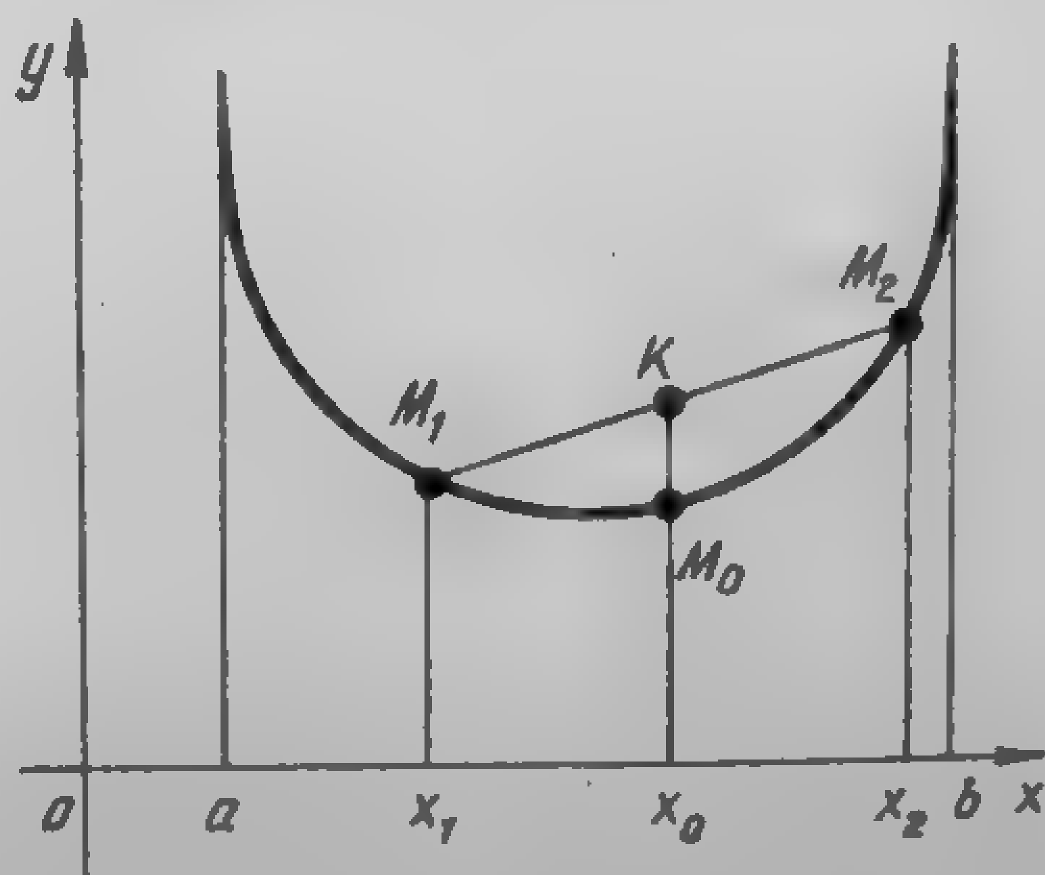
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right). \tag{8.63}$$

Разгледзім геаметрычную сутнасць паняцця выпукласці (рыс. 8.8). Няхай M_1, M_2, M_0 — пункты графіка функцыі $y=f(x)$, абцысы якіх адпаведна роўныя x_1, x_2, $x_0=(x_1+x_2)/2$. Тады $(f(x_1+f(x_2))/2$ ёсць ардыната пункта K — сярэдзіны адрэзка M_1M_2, а $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f(x_0)$ ёсць ардыната пункта M_0 графіка функцыі з абцысай, роўнай абцысе пункта K.

Умова (8.63) выпукласці функцыі ўверх (уніз) азначае, што для кожных пунктаў M_1 і M_2 графіка функцыі $y=f(x)$ сярэдзіна K хорды M_1M_2 ляжыць ніжэй (гл. рыс. 8.8), або вышэй (рыс. 8.9) адпаведнага пункта M_0 графіка, або супадае з пунктам M_0.



Рыс. 8.8



Рыс. 8.9

Прыклад 8.11. Функцыя $f(x)=x^2$ ёсць выпуклая ўніз на кожным інтэрвале.

▷ Сапраўды, няроўнасць

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2<\frac{x_1^2+x_2^2}{2}$$

раўназначная няроўнасці $(x_1-x_2)^2>0$, якая праўдзіцца для ўсіх $x_1\neq x_2$. ◀

Тэарэма 8.18. *Калі $f''(x)\geqslant 0$ ($f''(x)\leqslant 0$) для ўсіх пунктаў x з інтэрвала (a, b), то функцыя $y=f(x)$ ёсць выпуклая ўніз (выпуклая ўверх) на інтэрвале (a, b).*

□ Абмяжуемся доказам тэарэмы толькі ў тым выпадку, калі выконваецца ўмова

$$f''(x)\geqslant 0\ \forall x\in(a, b). \tag{8.64}$$

Трэба даказаць, што для кожных пунктаў x_1, x_2 інтэрвала (a, b) праўдзіцца няроўнасць

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \tag{8.65}$$

Няхай, напрыклад, $x_1<x_2$ (пры $x_1=x_2$ няроўнасць (8.65) праўдзівая). Абазначым $x_0\overset{\text{def}}{=}\frac{x_1+x_2}{2}$, тады

$$x_2-x_0=x_0-x_1. \tag{8.66}$$

Калі да функцыі f дастасаваць на адрэзках $[x_1, x_0]$ і $[x_0, x_2]$ формулу Тэйлара (8.26) з рэшткавым складнікам у форме Лягранжа пры $n=1$, атрымаем:

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x_0)^2,\ x_1<\xi_1<x_0,$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x_0)^2,\ x_0<\xi_2<x_2.$$

Складваючы гэтыя роўнасці і беручы пад увагу судачыненне (8.66), прыходзім да роўнасці

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+\frac{(x_1-x_0)^2}{2}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2)). \tag{8.67}$$

Паколькі $\xi_1\in(a, b)$, $\xi_2\in(a, b)$, то, згодна з умовaю (8.64), $f''(\xi_1)\geqslant 0$, $f''(\xi_2)\geqslant 0$ і з роўнасці (8.67) вынікае няроўнасць $f(x_1)+f(x_2)\geqslant 2f(x_0)$, раўназначная няроўнасці (8.65). ■

З а ў в а г а 8.15. Калі $f''(x)=0$ паўсюды на інтэрвале (a, b), то, як можна ўпэўніцца, $y=f(x)$ — лінейная функцыя, г. зн. яе графік ёсць прамая лінія. У гэтым выпадку кірунак выпукласці можна лічыць адвольным.

Азначэнне 8.3. *Пункт $M(x_0;\ f(x_0))$ называецца пунктам перагіну графіка функцыі $y=f(x)$, калі ў пункце M графік мае датычную і існуе такое наваколле пункта x_0, у якім графік функцыі $y=f(x)$ злева і справа ад пункта x_0 мае розныя кірункі выпукласці. Пры гэтым пункт x_0 называецца пунктам перагіну функцыі $f(x)$.*

На рыс. 8.10 паказаны графік функцыі, якая мае перагін у пункце x_0.

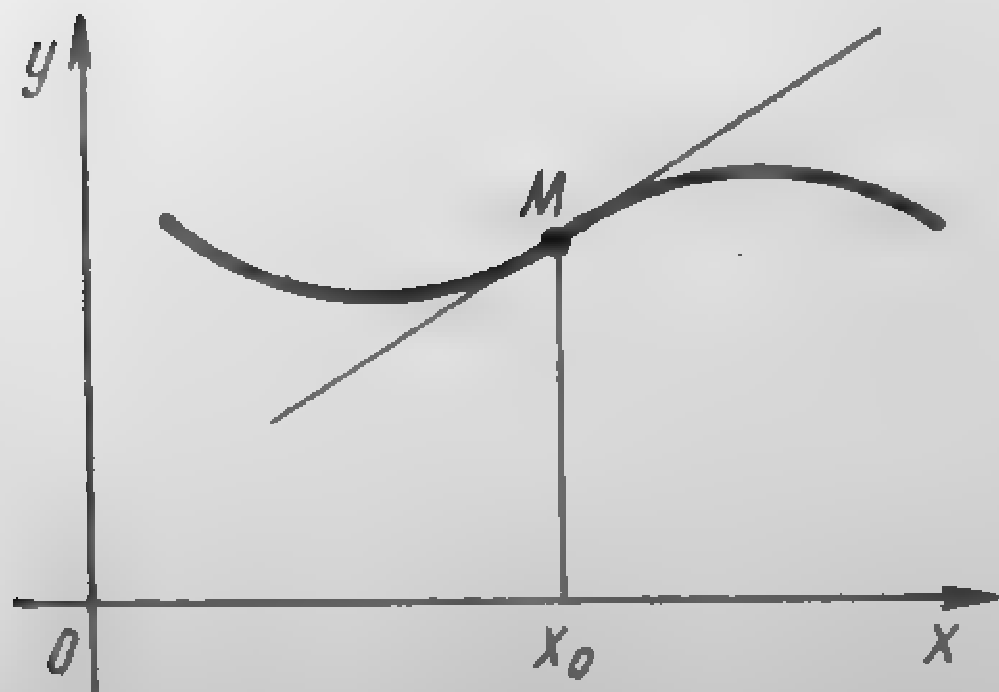
Тэарэма 8.19 **(неабходная ўмова пункта перагіну).** *Калі x_0 ёсць пункт перагіну функцыі $f(x)$ і функцыя $f(x)$ мае ў пункце x_0 непарыўную другую вытворную, то $f''(x_0)=0$.*

□ Дапусцім адваротнае, што $f''(x_0)\neq 0$. Тады на падставе лемы 6.2 пра захаванне знака непарыўнай функцыі існуе наваколле пункта x_0, дзе $f''(x)<0$ (або $f''(x)>0$), а значыць, згодна з тэарэмаю 8.18, функцыя $f(x)$ мае пэўны кірунак выпукласці ў гэтым наваколлі. Але гэта супярэчыць наяўнасці перагіну ў пункце x_0 (гл. рыс. 8.10). ■

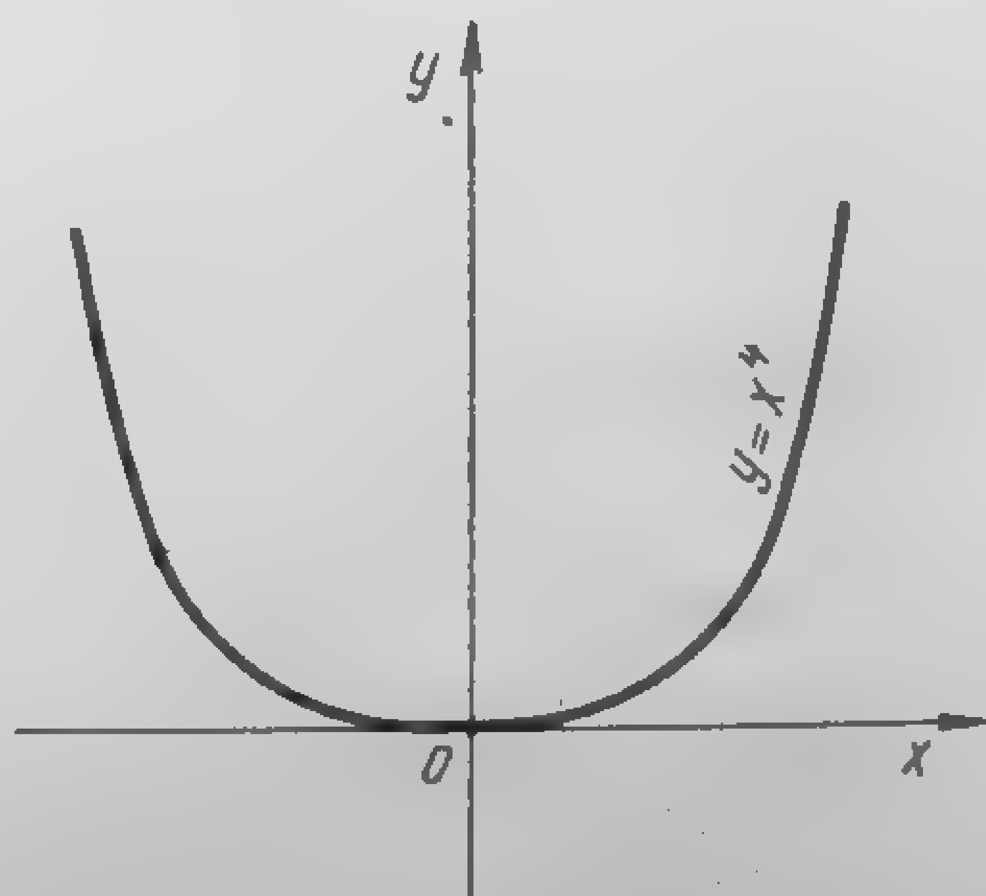
Трэба адзначыць, што не ўсякі пункт $M(x_0;\ f(x_0))$, для якога $f''(x_0)=0$, ёсць пункт перагіну графіка функцыі.

Так, графік функцыі $y=x^4$ не мае перагіну ў пункце (0; 0), хоць $f''(x)=12x^2=0$ пры $x=0$ (рыс. 8.11).

Таму роўнасць нулю другой вытворнай ёсць толькі неабходная ўмова перагіну. Патрэбна дадатковае даследаванне ў кожным такім пункце, дзе другая вытворная



Рыс.8.10



Рыс. 8.11

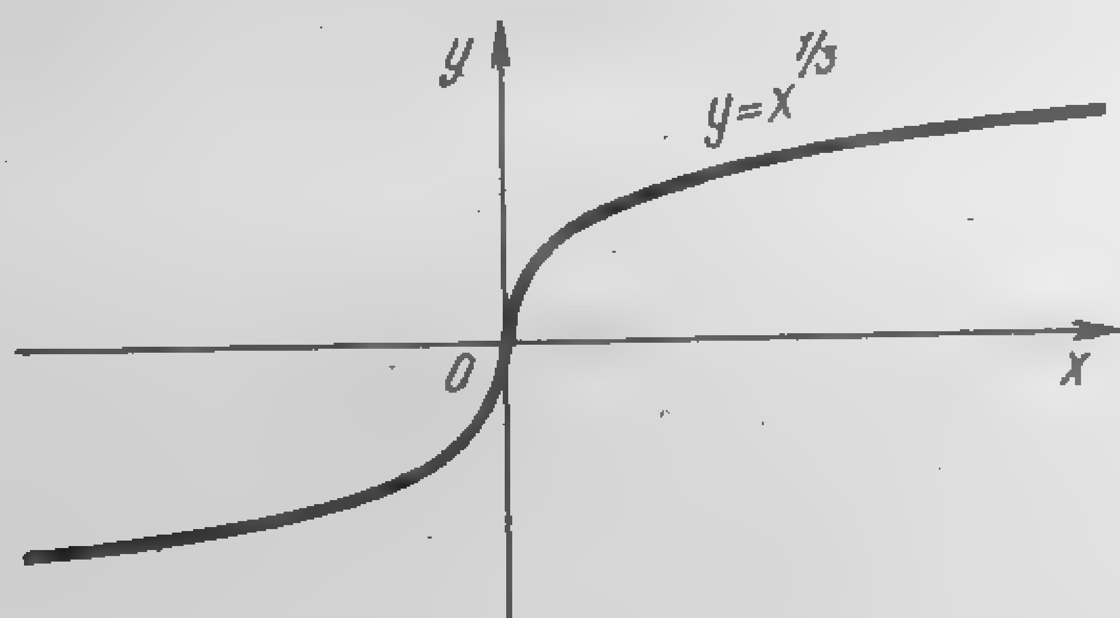
роўная нулю, для чаго спатрэбіцца дастатковая ўмова перагіну.

Тэарэма 8.20 **(дастатковая ўмова пункта перагіну).** *Няхай функцыя $f(x)$ мае другую вытворную ў некаторым наваколлі пункта x_0. Калі ў гэтым наваколлі $f''(x)$ мае розныя знакі злева і справа ад пункта x_0, то функцыя $f(x)$ мае перагін у пункце x_0.*

□ З таго, што $f''(x)$ злева і справа ад пункта x_0 мае розныя знакі, на падставе тэарэмы 8.18 робім выснову, што кірункі выпукласці функцыі злева і справа ад пункта x_0 розныя. Гэта і азначае, што x_0 ёсць пункт перагіну. ■

Заўвага 8.16. Тэарэма застаецца праўдзіваю, калі функцыя $f(x)$ мае другую вытворную ў некаторым наваколлі пункта x_0, за выключэннем самога пункта x_0, і існуе датычная да графіка функцыі ў пункце $M(x_0; f(x_0))$. Калі $f''(x)$ у названым наваколлі мае розныя знакі злева і справа ад пункта x_0, то функцыя $f(x)$ мае перагін у пункце x_0.

Напрыклад, функцыя $f(x)=x^{1/3}$ у пункце $x=0$ мае бясконцую вытворную, а датычная да графіка функцыі ў пункце (0; 0) супадае з воссю Oy. Другая вытворная ў пункце $x=0$ не існуе. Але графік функцыі $y=x^{1/3}$ мае перагін у пункце (0; 0), бо другая вытворная $f''(x)=2/(9x^{5/3})$ мае злева і справа ад пункта $x=0$ розныя знакі (рыс. 8.12).



Рыс. 8.12

5°. Будаванне графіка функцыі. Пры будаванні графіка функцыі $y=f(x)$ можна прытрымлівацца наступнай схемы:

1) знайсці абсяг вызначэння функцыі і даследаваць характар пунктаў разрыву функцыі;

2) знайсці асімптоты графіка функцыі;

3) даследаваць функцыю на перыядычнасць, цотнасць або няцотнасць;

4) вылічыць вытворную $f'(x)$ і даследаваць функцыю на манатоннасць і экстрэмум;

5) вылічыць $f''(x)$ і знайсці прамежкі выпукласці функцыі і пункты перагіну;

6) знайсці пункты перасячэння графіка функцыі з восямі каардынат;

7) пабудаваць графік.

Прыклад 8.12. Пабудаваць графік функцыі $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$.

▷ Пры даследаванні функцыі будзем прытрымлівацца пададзенай вышэй схемы.

1. Функцыя вызначаная на ўсёй лікавай восі і не мае пунктаў разрыву.

2. Вертыкальных асімптот не існуе, бо функцыя не мае пунктаў разрыву другога роду. Для знаходжання нахіленых асімптот падлічым адпаведныя ліміты (гл. формулы (6.60)):

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{6x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{6}{x}-1}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x^2}=2.$$

Такім чынам, прамая $y=-x+2$ ёсць нахіленая асімптота графіка функцыі.

3. Функцыя не з'яўляецца ні перыядычнаю, ні цотнаю, ні няцотнаю.

4. Вылічым вытворную функцыі:

$$y'=\frac{4-x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}.$$

Вытворная існуе ўсюды, за выключэннем пунктаў $x_1=0$, $x_2=6$. Для даследавання функцыі ў крытычным пункце x_1 вызначым аднабаковыя ліміты вытворнай пры $x\to-0$ і пры $x\to+0$:

$$\lim_{x\to-0}\frac{4-x}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(6-x)^2}}=-\infty,\quad \lim_{x\to+0}\frac{4-x}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(6-x)^2}}=+\infty.$$

У крытычным пункце x_2 ліміт вытворнай пры $x\to6$ роўны $-\infty$. Пункт $x_3=4$ ёсць стацыянарны пункт функцыі, бо $f'(-4)=0$. Вынікі даследавання пададзім у выглядзе табл. 8.1.

Табліца 8.1

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, 6)$	6	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	∞	0	0	$-$	$-\infty$	$-$
$f(x)$	↘	0 min	↗	$2\sqrt[3]{4}$ max	↘	0	↘

У гэтай табліцы стрэлка «↗» паказвае нарастальнасць функцыі на адпаведным прамежку, а стрэлка «↘» — спадальнасць. З табліцы

відаць, што ў пункце $x_1=0$ функцыя мае лакальны мінімум, а ў пункце $x_3=4$ — лакальны максімум.

5. Знаходзім другую вытворную функцыі:

$$y''=\frac{8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

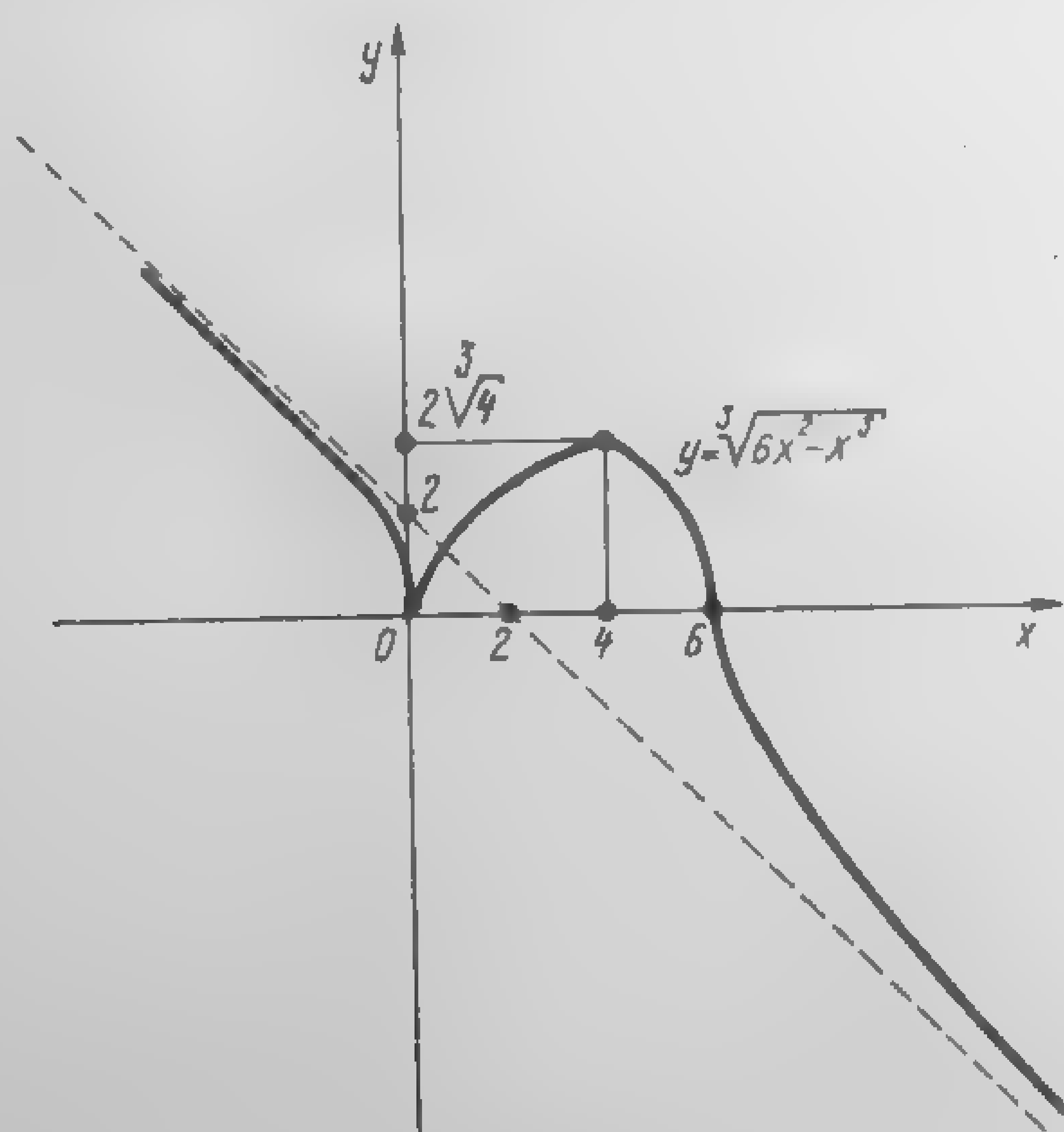
Пункты $x_4=0$ і $x_5=6$, у якіх не існуе другая вытворная, з'яўляюцца пунктамі магчымага перагіну. Гэтыя пункты падзяляюць абсяг вызначэння функцыі на тры прамежкі: $(-\infty, 0)$, $(0, 6)$, $(6, +\infty)$. Вынікі даследавання знака другой вытворнай пададзім у табл. 8.2.

Табліца 8.2

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 6)$	6	$(6, +\infty)$
$f''(x)$	—	∞	—	∞	+
$f(x)$	Выпуклая ўверх	Перагіну няма	Выпуклая ўверх	Перагін	Выпуклая ўніз

6. З раўнання $\sqrt[3]{6x^2-x^3}=0$ атрымаем $x_6=0$, $x_7=6$ — абцысы пунктаў перасячэння графіка з воссю абцысаў. Значэнне $f(0)=0$ задае ардынату пункта перасячэння графіка з воссю ардынат.

7. З дапамогаю атрыманых звестак пабудуем графік функцыі (рыс. 8.13). ◄



Рыс. 8.13

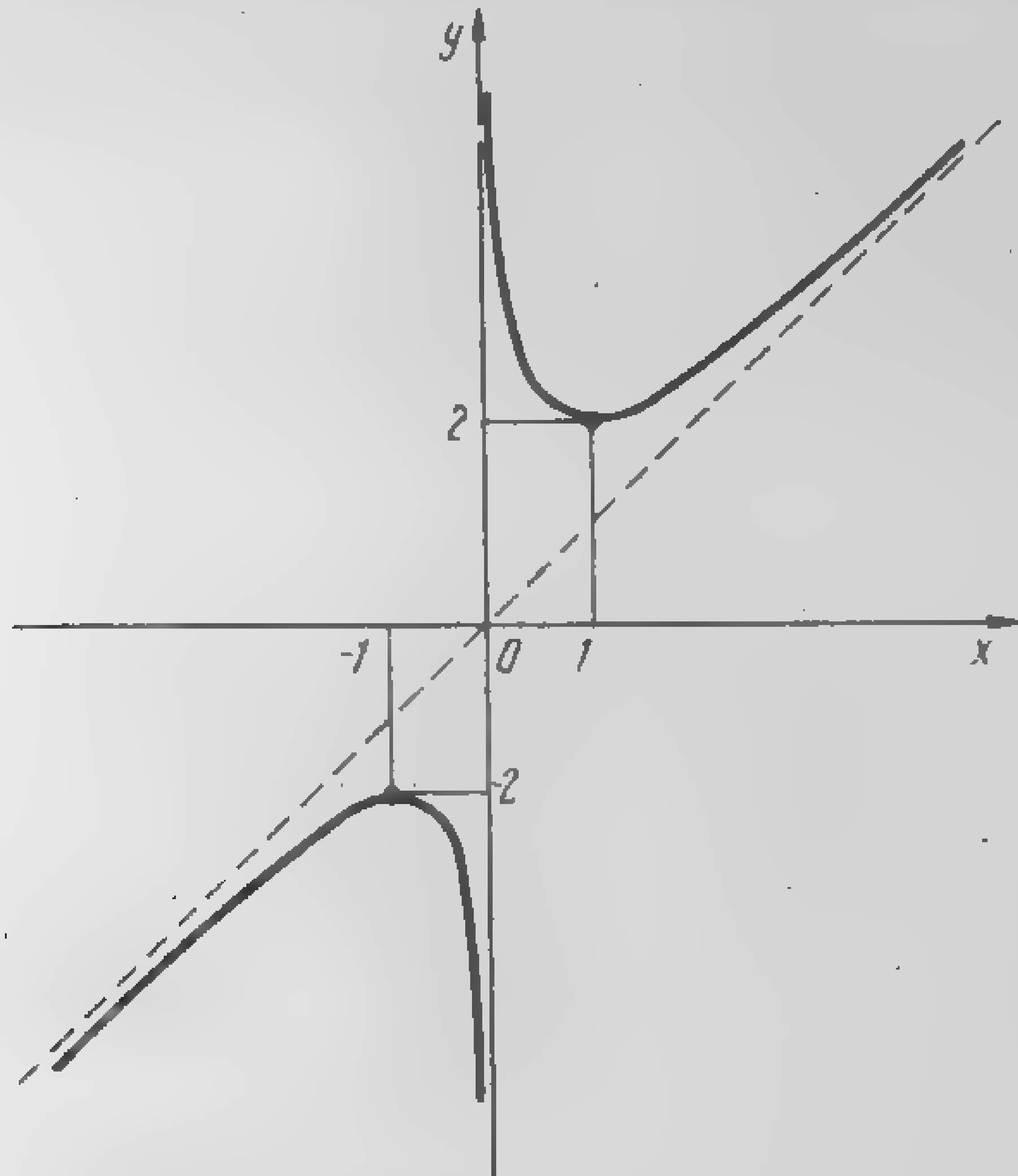
Пры пабудове крывой, што задаецца параметрычнымі раўнаннямі $x=x(t)$, $y=y(t)$, звычайна падзяляюць вось t на інтэрвалы, на кожным з якіх функцыі $x(t)$ і $y(t)$ манатонныя. Пры гэтым бывае карысным пабудаваць папярэдне графікі функцый $x=x(t)$ і $y=y(t)$.

Прыклад 8.13. Пабудаваць крывую $x=\frac{t^2+1}{t}$, $y=\frac{(t+5)^2}{t+2}$.

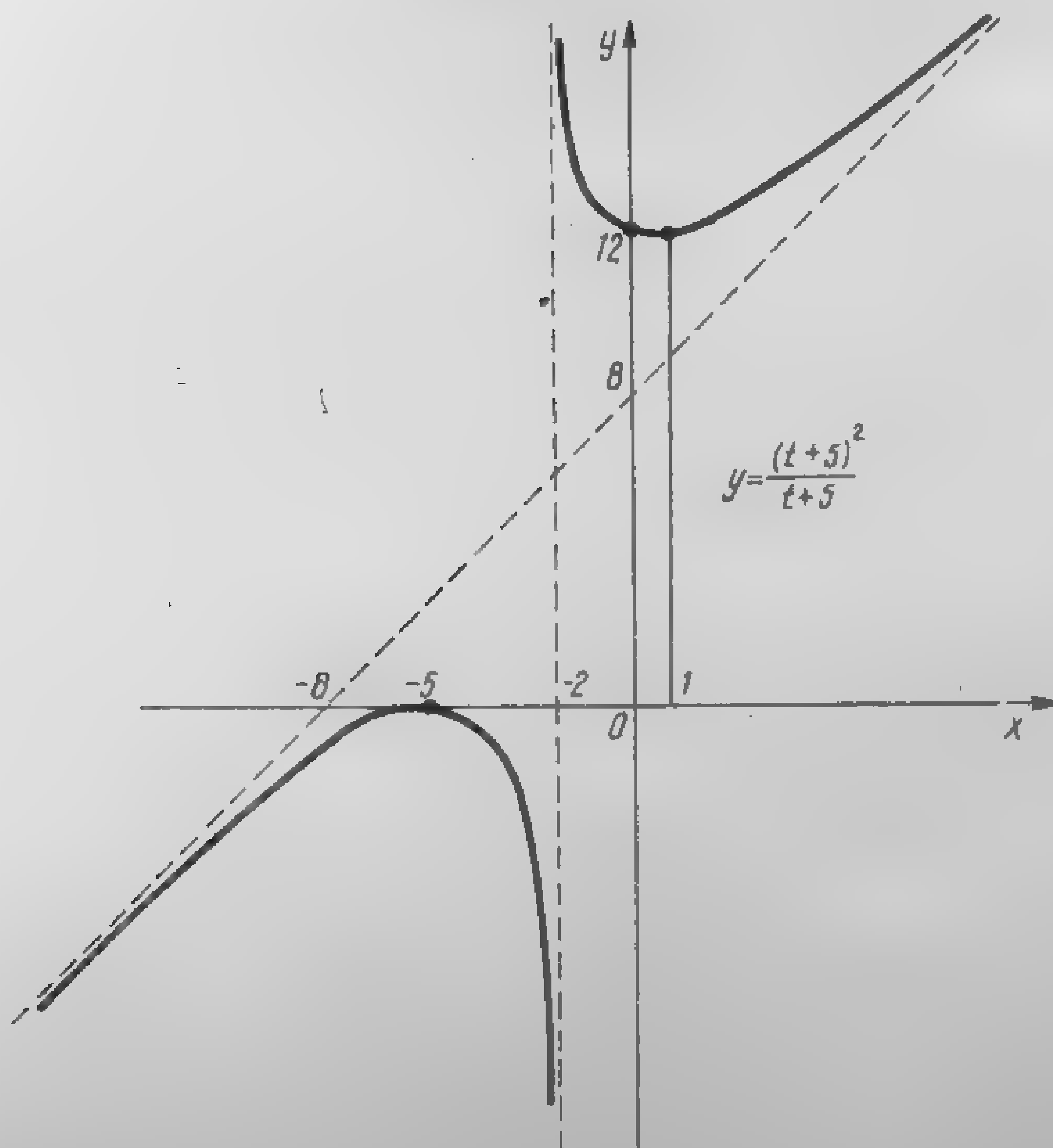
▷ Спачатку вылічым вытворныя:

$$x'_t=\frac{t^2-1}{t},\ y'_t=\frac{(t+5)(t-1)}{(t+2)^2}, \tag{8.68}$$

якія выкарыстаем для даследавання функцый $x=x(t)$, $y=y(t)$ і пабудовы іх графікаў (рыс. 8.14, 8.15).



Рыс. 8.14



Рыс. 8.15

Карыстаючыся формуламі (7.24) і (7.25), знойдзем:

$$y'_x=\frac{t^2(t+5)}{(t+1)(t+2)^2}, \qquad (8.69)$$

$$y''_{xx}=\frac{4t^3(t+5)}{(t+1)^3(t+2)^3(t-1)}. \qquad (8.70)$$

Пунктамі $t=-5$, $t=-2$, $t=-5/4$, $t=-1$, $t=0$, $t=1$ падзелім вось t на 7 інтэрвалаў. На кожным з гэтых інтэрвалаў функцыі $x(t)$, $y(t)$ манатонныя, а вытворныя y'_x і y'_{xx} захоўваюць знак. Складзем табліцу значэнняў x і y (табл. 8.3), карыстаючыся графікамі функцый $x=x(t)$ і $y=y(t)$ (гл. рыс. 8.14, 8.15), і знакаў y'_x, y''_{xx}, карыстаючыся формуламі (8.69) і (8.70).

Табліца 8.3

t	x	y	y'_x	y''_{xx}
$(-\infty,\ -5)$	$(-\infty,\ -26/5)$	$(-\infty,\ 0)$	+	−
$(-5,\ -2)$	$(-26/5,\ -5/2)$	$(0,\ -\infty)$	−	−
$(-2,\ -5/4)$	$(-5/2,\ -41/20)$	$(+\infty,\ 75/4)$	−	+
$(-5/4,\ -1)$	$(-41/20,\ -2)$	$(75/4,\ 16)$	−	−
$(-1,\ 0)$	$(-2,\ -\infty)$	$(16,\ 25/2)$	+	+
$(0,\ 1)$	$(+\infty,\ 2)$	$(25/2,\ 12)$	+	−
$(1,\ +\infty)$	$(2,\ +\infty)$	$(12,\ +\infty)$	+	+

Знойдзем асімптоты. Паколькі $y\to\infty$ і $x\to-5/2$ пры $t\to-2$, то $x=-5/2$ — вертыкальная асімптота крывой. Калі $t\to\infty$, то $x\to\infty$ і $y\to 25/2$, таму прамая $y=25/2$ ёсць гарызантальная асімптота крывой.

Калі $t\to\infty$, то $x\to\infty$ і $y\to\infty$. Высветлім, ці мае крывая нахіленую асімптоту. Паколькі

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=1,\quad \lim_{t\to\infty}(y(t)-x(t))=\lim_{t\to\infty}\frac{8t^2+24t+2}{t(t+2)}=8,$$

то прамая $y=x+8$ ёсць нахіленая асімптота.

З табл. 8.3 і формул (8.68) вынікае, што інтэрвалу $(-\infty,\ -2)$ зменнай t адпавядае частка (галіна) крывой, якая з'яўляецца графікам функцыі $y=y_1(x)$, выпуклай уверх, прычым значэнню $t=-5$ адпавядае пункт максімуму $x_0=-26/5$ гэтай функцыі і $y_1(x_0)=0$.

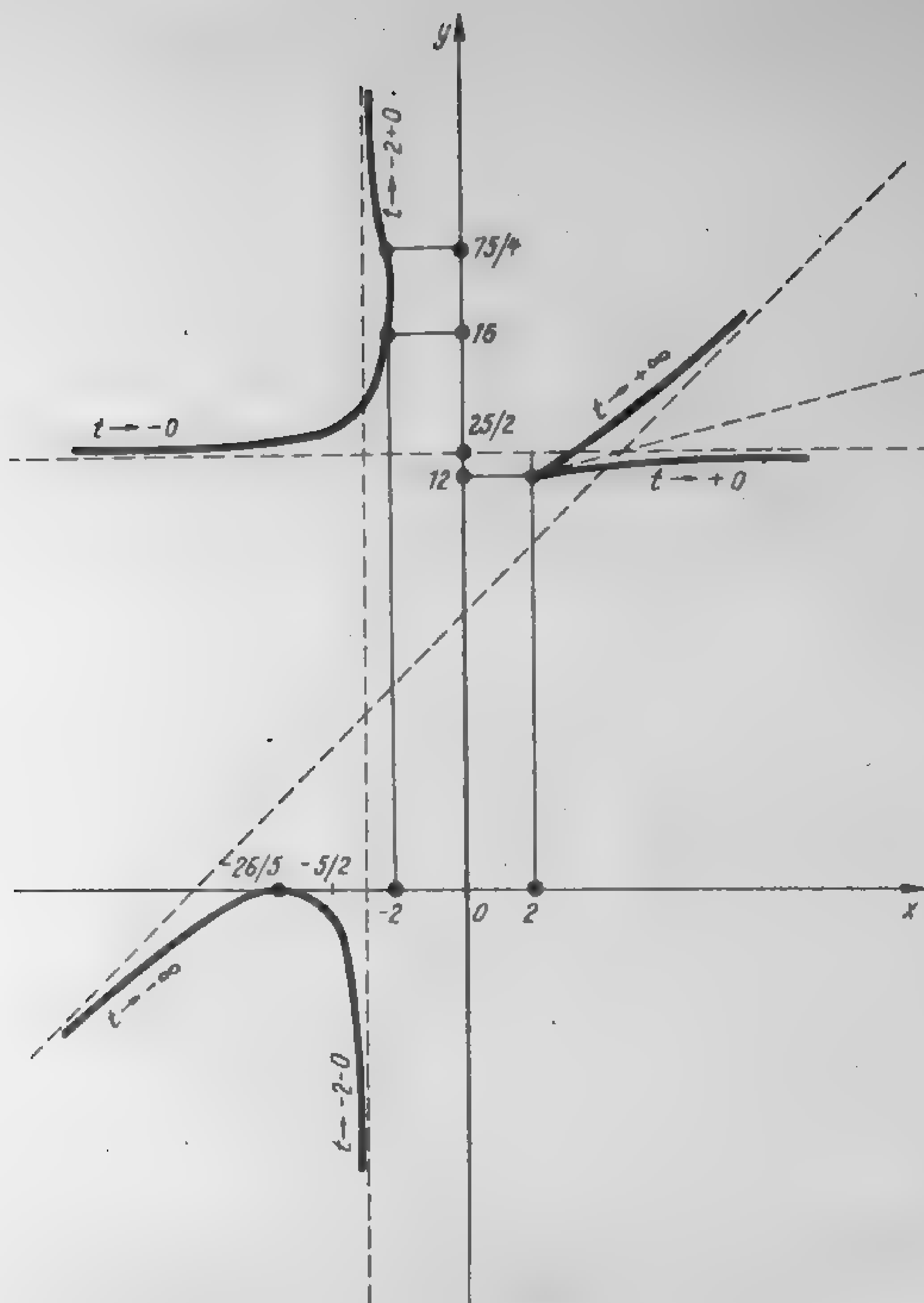
Інтэрвалу $(-2,\ -1)$ адпавядае галіна крывой, што з'яўляецца графікам функцыі $y=y_2(x)$, выпуклай уніз пры $t\in(-2,\ -5/4)$ і выпуклай уверх пры $t\in(-5/4,\ -1)$; пункт $(-41/20;\ 75/4)$ гэтага графіка, які адпавядае значэнню $t=-5/4$, ёсць пункт перагіну. Пры $t=-1$ функцыя $x=x(t)$ мае максімум, прычым $x(-1)=-2$.

Інтэрвалу $(-1,\ 0)$ адпавядае графік функцыі $y=y_3(x)$, выпуклай уніз, а інтэрвалу $(0,\ 1)$ — графік функцыі $y=y_4(x)$, выпуклай уверх.

Нарэшце, інтэрвалу $(1,\ +\infty)$ адпавядае графік функцыі $y=y_5(x)$, выпуклай уніз.

Адзначым яшчэ, што $x(1)=2$, $y(1)=12$ і, акрамя таго, правыя вытворныя функцый $y_3(x)$ і $y_4(x)$ у пункце $x=2$ роўныя $1/3$.

Выкарыстоўваючы табл. 8.3 і праведзенае даследаванне, будуем крывую (рыс. 8.16). ◀



Рыс. 8.16

8.5. НАБЛІЖАНАЕ ВЫЛІЧЭННЕ КАРАНЁЎ РАЎНАННЯЎ

1°. Тэарэма пра ўкладзеныя адрэзкі. Няхай зададзена паслядоўнасць адрэзкаў $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ..., такіх, што кожны наступны ўлучаны ў папярэдні: $[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\ldots\supset[a_n, b_n]\supset\ldots$, г. зн.

$$a_n\leqslant a_{n+1}<b_{n+1}\leqslant b_n \;\; \forall n\in\mathbf{N}, \qquad (8.71)$$

і няхай даўжыня адрэзка $[a_n, b_n]$, г. зн. розніца b_n-a_n, імкнецца да нуля пры $n\to\infty$. Такую паслядоўнасць будзем называць *паслядоўнасцю ўкладзеных адрэзкаў*.

Тэарэма 8.21. *Для кожнай паслядоўнасці ўкладзеных адрэзкаў існуе адзіны пункт, які належыць усім адрэзкам гэтай паслядоўнасці.*

□ З няроўнасцяў (8.71) вынікае, што левыя канцы адрэзкаў утвараюць неспадальную паслядоўнасць

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\ldots, \qquad (8.72)$$

а правыя канцы — ненарастальную паслядоўнасць

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant \ldots . \qquad (8.73)$$

Пры гэтым паслядоўнасць (8.72) ёсць абмежаваная зверху, а паслядоўнасць (8.73) — знізу, паколькі $a_n \leqslant b_1$ і $b_n \geqslant a_1$ $\forall n \in \mathbf{N}$. На падставе тэарэмы 6.1 гэтыя паслядоўнасці збягаюцца. Калі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c_1$, і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c_2$, то $a_n \leqslant c_1$, $c_2 \leqslant b_n$. З умовы

$$0 = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = c_1 - c_2$$

вынікае $c_1 = c_2$, г. зн. паслядоўнасці (a_n) і (b_n) збягаюцца да супольнага ліміту, які мы абазначым праз c, прычым $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ $\forall n$. Гэта азначае, што пункт c належыць усім адрэзкам паслядоўнасці (8.71).

Дакажам зараз, што такі пункт толькі адзін. Дапусцім, што існуе пункт d $(d \neq c)$, які належыць усім адрэзкам паслядоўнасці (8.71). Для пэўнасці дапусцім, што $c < d$, тады атрымаем, што адрэзак $[c, d]$ належыць усім адрэзкам $[a_n, b_n]$. У такім разе для ўсіх n праўдзяцца няроўнасці $b_n - a_n \geqslant d - c > 0$, што немагчыма, бо $b_n - a_n \to 0$ пры $n \to \infty$. Гэтая супярэчнасць і даказвае адзінасць пункта c. ■

Заўвага 8.17. Тэарэма будзе непраўдзіваю, калі замест адрэзкаў разглядаць інтэрвалы. Напрыклад, для паслядоўнасці ўкладзеных інтэрвалаў

$$(0, 1) \supset \left(0, \frac{1}{2}\right) \supset \left(0, \frac{1}{4}\right) \supset \ldots \supset \left(0, \frac{1}{2^n}\right) \supset \ldots$$

не існуе пункт, які належыць усім інтэрвалам. Сапраўды, які б пункт c з інтэрвала (0, 1) мы ні ўзялі, заўсёды знойдзецца нумар N, што пры $n > N$ будзе $1/2^n < c$, і, такім чынам, пункт c не належыць інтэрвалам разгляданай паслядоўнасці, якія змяшчаюцца ў інтэрвале $(1, 1/2^N)$.

2°. Метад накіраванага перабору. Метады даследавання паводзін функцыі даюць магчымасць знаходзіць набліжаныя значэнні каранёў раўнання

$$f(x) = 0, \qquad (8.74)$$

дзе $f(x)$ — некаторая непарыўная функцыя. Будзем лічыць, што шуканы корань гэтага раўнання ёсць *ізаляваны на адрэзку* $[a, b]$, г. зн. корань з'яўляецца ўнутраным пунктам адрэзка $[a, b]$, які не змяшчае іншых каранёў разгляданага раўнання. Дапусцім, што функцыя $f(x)$ не-

парыўная на $[a, b]$ і мае на канцах гэтага адрэзка значэнні розных знакаў.

Для пэўнасці будзем лічыць, што $f(a)<0$, $f(b)>0$. Падзелім $[a, b]$ папалам і выберам той з двух атрыманых адрэзкаў, на канцах якога $f(x)$ мае розныя знакі. Абазначым яго $[a_1, b_1]$. (Калі б функцыя $f(x)$ у сярэдзіне адрэзка $[a, b]$ мела значэнне 0, то корань быў бы знойдзены.) Падзелім $[a_1, b_1]$ папалам і выберам той з атрыманых адрэзкаў, на канцах якога $f(x)$ мае розныя знакі, і г. д.

Працягваючы гэты працэс, мы або натрапім на корань раўнання, або пабудуем паслядоўнасць укладзеных адрэзкаў:

$$[a, b]\supset[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\ldots\supset[a_n, b_n]\supset\ldots,$$

прычым $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$ $\forall n\in\mathbf{N}$. Згодна з тэарэмаю 8.21 пра ўкладзеныя адрэзкі, існуе адзіны пункт c, што належыць усім адрэзкам, да якога збягаецца кожная з паслядоўнасцяў (a_n) і (b_n).

Дакажам, што пункт c ёсць шуканы корань. Паколькі функцыя $f(x)$ ёсць непарыўная ў пункце c, то кожная з паслядоўнасцяў $(f(a_n))$ і $(f(b_n))$ збягаецца да $f(c)$. А таму з умоваў $f(a_n)<0$ і $f(b_n)>0$ на падставе лімітавага пераходу ў няроўнасці атрымаем, што адначасова праўдзяцца няроўнасці $f(c)\leqslant 0$ і $f(c)\geqslant 0$, адкуль $f(c)=0$. Калі за набліжанае значэнне гэтага кораня ўзяць сярэдзіну адрэзка $[a_n, b_n]$, г. зн. $\xi=(a_n+b_n)/2$, то лік ξ адрозніваецца ад дакладнага значэння кораня не больш, чым на $(b-a)/2^{n+1}$.

Сапраўды, даўжыня адрэзка $[a_n, b_n]$ роўная $(b-a)/2^n$, а адлегласць ад кораня c да пункта ξ не перавышае паловы даўжыні адрэзка $[a_n, b_n]$.

Такім чынам, апісаны метад дазваляе вылічыць шуканы корань c з адвольнай дакладнасцю, калі ўзяць n дастаткова вялікім. Гэты метад зручны тым, што патрабуе аднатыпных вылічэнняў, і таму яго часта выкарыстоўваюць для вылічэнняў на сучасных вылічальных машынах.

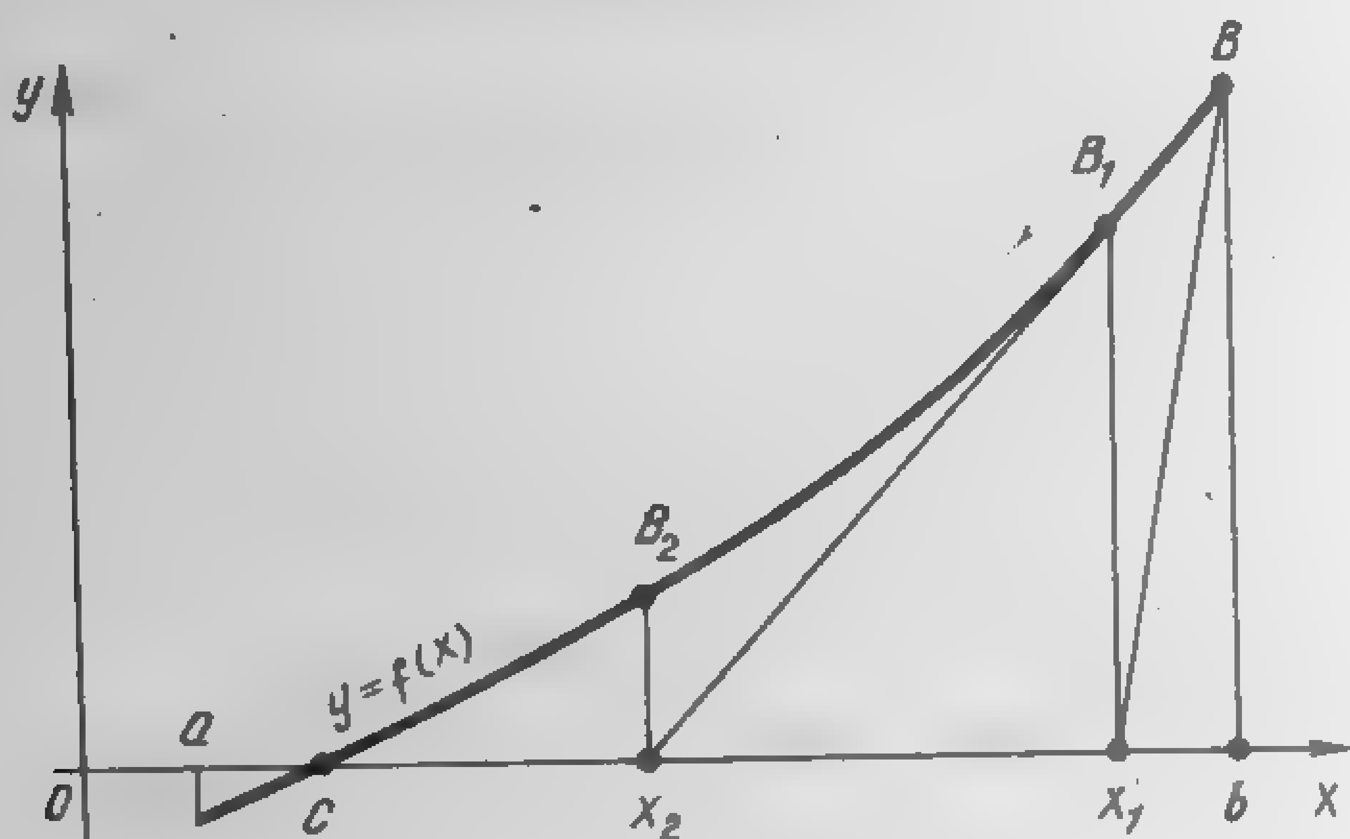
3°. Метад датычных. Гэта адзін з найбольш эфектыўных метадаў знаходжання каранёў раўнання (8.74).

Як і раней, будзем лічыць, што корань раўнання (8.74) ёсць унутраны пункт адрэзка $[a, b]$. Дапусцім таксама, што функцыя f на $[a, b]$ мае непарыўныя знакасталыя вытворныя $f'(x)$ і $f''(x)$, а яе значэнні $f(a)$ і $f(b)$ маюць розныя знакі. Паколькі знак $f'(x)$ нязменны на $[a, b]$, то функцыя $f(x)$ або нарастае, або спадае на

гэтым адрэзку, і, такім чынам, у абодвух выпадках графік функцыі $y=f(x)$ перасякае вось Ox толькі ў адным пункце, г. зн. $x=c$ ёсць адзіны корань на $[a, b]$. Паколькі знак $f''(x)$ сталы, то кірунак выпукласці графіка функцыі $y=f(x)$ на гэтым адрэзку не змяняецца.

Для пэўнасці разгледзім выпадак, калі $f'(x)>0$ і $f''(x)>0$. У такім разе $f(a)<0$, $f(b)>0$ і графік функцыі выпуклы ўніз (рыс. 8.17). Правядзем праз пункт $B(b;\ f(b))$ датычную да графіка функцыі $y=f(x)$. Яе раўнанне мае выгляд

$$y=f(b)+f'(b)(x-b).$$



Рыс. 8.17

Беручы $y=0$, знойдзем абцысу x_1 пункта перасячэння датычнай з воссю Ox:

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{8.75}$$

Паколькі $f(b)/f'(b)>0$, то $x_1<b$.

З формулы (8.75) з улікам роўнасці $f(c)=0$ вынікае

$$b-x_1=\frac{f(b)-f(c)}{f'(b)}.$$

Дастасоўваючы да розніцы, якая стаіць у лічніку апошняга дробу, формулу Лягранжа (8.5), атрымаем

$$b-x_1=\frac{f'(\xi)(b-c)}{f'(b)}, \tag{8.76}$$

дзе $c<\xi<b$. Паколькі $f''(x)>0$, то функцыя $f'(x)$ ёсць нарастальная на $[a, b]$, значыць, $f'(\xi)/f'(b)<1$, прычым $f'(\xi)/f'(b)>0$. Таму з формулы (8.76) выводзім $b-x_1<$ $<b-c$ або $c<x_1$. Такім чынам, $c<x_1<b$.

Возьмем за першае набліжанае значэнне кораня

пункт x_1. Затым правядзем датычную да графіка ў пункце $B_1(x_1;\ f(x_1))$ і, дзейнічаючы аналагічна, возьмем за другое набліжанае значэнне кораня пункт x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Пры гэтым, як і вышэй, паказваецца, што $c < x_2 < x_1$. Працягваючы гэты працэс, атрымаем для ўсякага n формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (8.77)$$

Такім чынам, намі пабудавана паслядоўнасць набліжаных значэнняў кораня c, прычым

$$b > x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots > c. \qquad (8.78)$$

Дакажам, што паслядоўнасць (x_n) збягаецца да шуканага кораня c, і ацэнім *хібнасць*, г. зн. адхіленне набліжанага значэння x_n ад дакладнага значэння кораня c. Згодна з формулаю (8.78), паслядоўнасць (x_n) ёсць спадальная і абмежаваная знізу лікам c. На падставе тэарэмы 6.1 яна мае ліміт $c' \geqslant c$. Калі ў роўнасці (8.77) перайсці да ліміту і ўлічыць непарыўнасць функцый $f(x)$ і $f'(x)$, то атрымаем

$$c' = c' - \frac{f(c')}{f'(c')},$$

адкуль вынікае, што $f(c') = 0$, г. зн. c' ёсць корань раўнання (8.74). Але на адрэзку $[a, b]$ маецца толькі адзін корань c, таму $c' = c$. Такім чынам, паслядоўнасць (x_n) збягаецца да кораня c.

Ацэнім зараз адхіленне n-га набліжання x_n ад дакладнага значэння кораня c. Дастасоўваючы да выразу $f(x_n) = f(x_n) - f(c)$ $(f(c) = 0)$ формулу Лягранжа, маем $f(x_n) = f'(\xi_n)(x_n - c)$, дзе $c < \xi_n < x_n$, адкуль

$$|x_n - c| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \qquad (8.79)$$

дзе m — найменшае значэнне $|f'(x)|$ на адрэзку $[a, b]$. Формула (8.79) дазваляе ацаніць адхіленне набліжанага значэння x_n ад дакладнага значэння кораня c.

Формула (8.77) ёсць *асноўная разліковая формула метаду датычных*. Яна ўяўляе сабою *метад паслядоўных набліжанняў (ітэрацый)*.

Мы разглядзелі выпадак, калі $f'(x) > 0$ і $f''(x) > 0$ на

адрэзку $[a, b]$. У залежнасці ад камбінацыі знакаў $f'(x)$ і $f''(x)$ магчымыя яшчэ тры выпадкі: 1) $f'(x)>0$, $f''(x)<0$; 2) $f'(x)<0$, $f''(x)>0$; 3) $f'(x)<0$, $f''(x)<0$. У кожным з іх абгрунтаванне метада датычных аналагічнае разгледжанаму выпадку. Аднак трэба заўважыць, што датычную неабходна праводзіць у тым канцы дугі крывой, дзе знакі функцыі і яе другой вытворнай супадаюць.

Прыклад 8.14. Вылічыць корань раўнання $x^2-5=0$ метадам датычных.

▷ Разгледзім функцыю $f(x)=x^2-5$. Яна ёсць непарыўная на ўсёй лікавай восі. Знойдзем адрэзак, на канцах якога функцыя $f(x)$ мае значэнні розных знакаў. Паколькі $f(2)=-1$, $f(3)=4$, то такім будзе адрэзак $[2, 3]$. Унутры яго знаходзіцца шуканы корань раўнання. Функцыя $f(x)$ мае на гэтым адрэзку непарыўныя дадатныя вытворныя $f'(x)=2x$ і $f''(x)=2$. Такім чынам, першую датычную да графіка функцыі трэба праводзіць праз пункт (3; 4). У формуле (8.77) возьмем $x_0=3$ і атрымаем першае набліжанне кораня:

$$x_1=3-\frac{4}{2\cdot 3}=2\frac{1}{3}.$$

Беручы ў формуле (8.77) $x_1=2\frac{1}{3}$, атрымаем:

$$x_2=2\frac{1}{3}-\frac{2}{21}=2\frac{5}{21}.$$

Нарэшце, беручы $x_2=2\frac{5}{21}$ у формуле (8.77), маем:

$$x_3=2\frac{5}{21}-\frac{2}{987}=2{,}23607.$$

Для знаходжання хібнасці набліжання x_3 скарыстаем формулу (8.79). Паколькі вытворная $f'(x)$ нарастае на адрэзку $[2, 3]$, то найменшае яе значэнне на гэтым адрэзку ёсць $f'(2)=4$, г. зн. $m=4$. Падлічым:

$$f(x_3)=x_3^2-5=(2{,}23607)^2-5=0{,}00001,$$

Затым на падставе формулы (8.79) маем

$$|x_3-c|<\frac{0{,}00001}{4}=0{,}0000025=2{,}5\cdot 10^{-6}.$$

Калі, згодна з умоваю задачы, такая дакладнасць вылічэння кораня дастатковая, то працэс пабудовы набліжанняў спыняецца. У процілеглым выпадку гэты працэс трэба працягваць. ◀

9. НЯВЫЗНАЧАНЫ ІНТЭГРАЛ

Знаходжанне вытворнай дадзенай функцыі ёсць адна з асноўных задач дыферэнцыяльнага злічэння. Разнастайныя пытанні матэматычнага аналізу і яго дастасаванні ў геаметрыі, механіцы, фізіцы і тэхніцы прыводзяць да адваротнай задачы: знайсці функцыю, для якой зададзеная функцыя з'яўляецца вытворнай. Аднаўленне функцыі па вядомай вытворнай гэтай функцыі ёсць адна з асноўных задач інтэгральнага злічэння.

9.1. НЯВЫЗНАЧАНЫ ІНТЭГРАЛ І МЕТАДЫ ІНТЭГРАВАННЯ

1°. Першаісная. Няхай P ёсць канечны або бясконцы прамежак (інтэрвал, паўінтэрвал або адрэзак), на якім вызначаны функцыі $f(x)$ і $F(x)$.

Азначэнне 9.1. *Функцыя $F(x)$ называецца першаіснаю для функцыі $f(x)$ на прамежку P, калі для кожнага $x \in P$ праўдзіцца роўнасць*

$$F'(x)=f(x). \qquad (9.1)$$

Калі прамежку P належыць нейкі яго канец, то пад вытворнаю ў гэтым пункце разумеюць адпаведную аднабаковую вытворную. Паколькі функцыя, што мае вытворную ў дадзеным пункце, ёсць непарыўная ў гэтым пункце (аднабакова непарыўная, калі гаворка ідзе пра аднабаковую вытворную), то першаісная $F(x)$ функцыі $f(x)$ ёсць непарыўная функцыя на прамежку P.

Задача знаходжання для дадзенай функцыі $f(x)$ яе першаіснай развязваецца неадназначна. Сапраўды, калі $F(x)$ — першаісная для функцыі $f(x)$, г. зн. $F'(x)=f(x)$, то $F(x)+C$, дзе $C=\text{const}$, ёсць таксама першаісная для функцыі $f(x)$, бо

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x).$$

Мае месца таксама адваротнае сцверджанне.

Тэарэма 9.1. *Калі $F_1(x)$ і $F_2(x)$ — дзве першаісныя для функцыі $f(x)$, то $F_1(x)-F_2(x)=\text{const}$, г. зн. усякія дзве*

першаісныя для адной і той самай функцыі розняцца на сталы складнік.

□ Паколькі $F_1(x)$ і $F_2(x)$ ёсць першаісныя для функцыі $f(x)$, то $F_1'(x)=f(x)$, $F_2'(x)=f(x)$ для ўсіх $x\in P$. Адсюль вынікае, што калі $x\in P$, то $(F_1(x)-F_2(x))'=0$. Згодна з тэарэмаю 8.5 $F_1(x)-F_2(x)=\text{const}$. ■

Такім чынам, калі для функцыі $f(x)$ існуе хоць бы адна першаісная $F(x)$, то ўсякая яе першаісная мае выгляд $F(x)+C$, дзе C — адвольная канстанта.

2°. Нявызначаны інтэграл і яго ўласцівасці. Няхай функцыя $f(x)$ вызначана на пэўным прамежку P.

Азначэнне 9.2. *Сукупнасць усіх першаісных для функцыі $f(x)$ на прамежку P называецца нявызначаным інтэгралам ад функцыі $f(x)$ на гэтым прамежку і абазначаецца $\int f(x)dx$.*

Такім чынам,

$$\int f(x)dx \overset{\text{def}}{=} F(x)+C, \tag{9.2}$$

дзе $F(x)$ ёсць адна з першаісных для функцыі $f(x)$, а C — адвольная канстанта. Сімвал $\int$ называецца *знакам інтэграла*, $f(x)$ — *падынтэгральнай функцыяй*, а $f(x)dx$ — *падынтэгральным выразам.*

Аднаўленне функцыі па яе вытворнай або знаходжанне нявызначанага інтэграла па зададзенай падынтэгральнай функцыі называецца *інтэграваннем* гэтай функцыі. Каб праверыць, ці правільна зроблена інтэграванне, дастаткова прадыферэнцаваць вынік і атрымаць пры гэтым падынтэгральную функцыю.

З азначэння нявызначанага інтэграла непасрэдна вынікаюць наступныя яго ўласцівасці.

1. *Вытворная нявызначанага інтэграла роўная падынтэгральнай функцыі; дыферэнцыял ад нявызначанага інтэграла роўны падынтэгральнаму выразу, г. зн.*

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x),\quad d\int f(x)dx=f(x)dx.$$

□ Сапраўды,

$$\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+C)'=F'(x)=f(x),$$

а

$$d\int f(x)dx=\left(\int f(x)dx\right)'dx=f(x)dx. \ ■$$

2. *Нявызначаны інтэграл ад дыферэнцыяла функцыі роўны суме гэтай функцыі і адвольнай канстанты, г. зн.*

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

□ На самай справе, паколькі $dF(x)=F'(x)dx$, то

$$\int dF(x)=\int F'(x)dx=F(x)+C. \blacksquare$$

3. *Сталы множнік можна вылучаць з-пад знака інтэграла, г. зн. калі* $k=\text{const}\neq 0$, *то*

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx. \quad (9.3)$$

□ Няхай $F(x)$ ёсць першаісная для функцыі $f(x)$, тады $kF(x)$ ёсць першаісная для функцыі $kf(x)$, паколькі $(kF(x))'=kF'(x)=kf(x)$. Згодна з азначэннем нявызначанага інтэграла,

$$\int kf(x)dx=kF(x)+C_1,$$
$$k\int f(x)dx=k(F(x)+C_2).$$

Паколькі $k\neq 0$, то з роўнасці $C_1=kC_2$ для кожнага C_2 можна вылічыць адно значэнне C_1 і наадварот. Тым самым сукупнасці функцый $kF(x)+C_1$ і $kF(x)+kC_2$ супадаюць. Гэта і даказвае ўласцівасць (9.3). ■

4. *Нявызначаны інтэграл ад сумы дзвюх функцый роўны суме інтэгралаў ад гэтых функцый, г. зн.*

$$\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$$

□ Няхай $F(x)$ і $G(x)$ — першаісныя для функцый $f(x)$ і $g(x)$ адпаведна, г. зн. $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$. Таму функцыя $F(x)+G(x)$ ёсць першаісная для функцыі $f(x)+$ $+g(x)$. Такім чынам,

$$\int f(x)dx+\int g(x)dx=(F(x)+C_1)+(G(x)+C_2)=$$
$$=F(x)+G(x)+(C_1+C_2)=F(x)+G(x)+C=$$
$$=\int (f(x)+g(x))dx. \blacksquare$$

З уласцівасцяў 3 і 4 вынікае, што аперацыя інтэгравання мае *ўласцівасць лінейнасці: інтэграл ад лінейнай камбінацыі функцый роўны лінейнай камбінацыі інтэгралаў ад разгляданых функцый, г. зн.*

$$\int (\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int f(x)dx+\mu\int g(x)dx,$$

дзе λ *і* μ *ёсць канстанты,* $|\lambda|+|\mu|\neq 0$.

3°. Метад падстановы. Гэты метад грунтуецца на правіле дыферэнцавання складанай функцыі.

Тэарэма 9.2. *Няхай* $\Phi(t)$ *ёсць першаісная для функцыі* $\varphi(t)$ *на прамежку* T, *а* $f(x)$ *ёсць дыферэнцавальная на прамежку* X *функцыя, прычым* $f(X)\subset T$. *У такім разе на прамежку* X *праўдзіцца формула*

$$\int \varphi(f(x))f'(x)dx=\Phi(f(x))+C. \quad (9.4)$$

□ Дастаткова паказаць, што $\Phi(f(x))$ ёсць першаісная для падынтэгральнай функцыі. Згодна з умоваю тэарэмы, $\Phi'(t)=\varphi(t)$. На падставе правіла дыферэнцавання складанай функцыі атрымаем:

$$(\Phi(f(x)))'=\Phi'(f(x))f'(x)=\varphi(f(x))f'(x). \blacksquare$$

Формулу (9.4) называюць *формулай замены зменнай у нявызначаным інтэграле,* а метад інтэгравання, што грунтуецца на выкарыстанні формулы (9.4), называюць *метадам падстановы.* Для практычнага ўжывання гэтай формулы больш зручным з'яўляецца яе наступнае выяўленне:

$$\int \varphi(f(x))df(x)=\int \varphi(t)dt\,|_{t=f(x)}. \qquad (9.5)$$

Пры інтэграванні паводле формулы (9.5) кажуць, што выкарыстоўваецца *метад паднясення пад дыферэнцыял.*

Прыклад 9.1. Вылічыць $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

▷ Маем:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx=\begin{bmatrix}\cos x=t,\\ dt=-\sin x dx\end{bmatrix}^{*}=$$

$$=\int \frac{-dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C$$

або непасрэдна метадам паднясення пад дыферэнцыял

$$\int \operatorname{tg} x\,dx=-\int \frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C. \blacktriangleleft$$

4°. Метад інтэгравання часткамі. Метад інтэгравання часткамі грунтуецца на выкарыстанні формулы дыферэнцавання здабытку дзвюх функцый.

Тэарэма 9.3. *Няхай функцыі $u(x)$ і $v(x)$ ёсць дыферэнцавальныя на прамежку P і існуе першаісная для функцыі $v(x)u'(x)$ на гэтым прамежку. Тады існуе першаісная для функцыі $u(x)v'(x)$ і праўдзіцца формула*

$$\int u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\,dx. \qquad (9.6)$$

□ З роўнасці

$$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

вынікае, што

---

* Тут і далей у квадратных дужках даюцца прамежкавыя вылічэнні.

$$u(x)v'(x)=(u(x)v(x))'-u'(x)v(x).$$

Функцыя $u(x)v(x)$ ёсць першаісная для функцыі $(u(x)v(x))'$ на прамежку P. Функцыя $u'(x)v(x)$ мае першаісную, згодна з умоваю тэарэмы. Такім чынам і функцыя $u(x)v'(x)$ мае першаісную на прамежку P. Калі праінтэграваць апошнюю роўнасць, то атрымаецца формула (9.6):

$$\int u(x)v'(x)dx=\int (u(x)v(x))'dx-\int v(x)u'(x)dx=$$
$$=u(x)v(x)+C-\int v(x)u'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx.$$

(Канстанта C улучаная ў інтэграл $\int v(x)u'(x)dx$.) ■

Формулу (9.6) для вылічэння нявызначанага інтэграла называюць *формулай інтэгравання часткамі.*

Калі ўлічыць, што $v'(x)dx=dv$, $u'(x)dx=du$, то формулу (9.6) можна падаць у іншым выглядзе

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Прыклад 9.2. Няхай

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n},\ n\in\mathbf{N},\ a\neq 0.$$

Вывесці рэкурэнтную формулу для вылічэння інтэграла I_n.

▷ Калі $u=(x^2+a^2)^{-n}$, $v=x$, то $u'=-2n(x^2+a^2)^{-n-1}$, $v'=1$. Паводле формулы (9.6) атрымаем

$$I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx,$$

дзе

$$\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=I_n-a^2I_{n+1}.$$

Такім чынам,

$$I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1},$$

адкуль

$$I_{n+1}=\frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n. \blacktriangleleft \qquad (9.7)$$

Пры вылічэнні інтэгралаў метадам інтэгравання часткамі ў асобных прыватных выпадках выкарыстоўваюць наступныя прыёмы:

1) у інтэгралах ад функцый $x^m\sin ax$, $x^m\cos ax$, x^me^{ax}, $x^m\operatorname{sh} ax$, $x^m\operatorname{ch} ax$ бяруць $u=x^m$, а за dv — астатні выраз;

2) пры інтэграванні функцый $x^\alpha\ln x$, $x^\alpha\operatorname{arctg}\beta x$, $x^\alpha\operatorname{arcctg}\beta x$, $x^\alpha\arcsin x$, $x^\alpha\arccos x$ бяруць $dv=x^\alpha dx$, а за u лічаць астатні множнік;

3) інтэграванне функцый $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, $\sin(\ln ax)$, $\cos(\ln ax)$ прыводзіць да раўнання ў дачыненні да зыходнага інтэграла.

Прыклад 9.3. Вылічыць інтэграл $\int e^x \cos x dx$.

▷ Абазначым праз I значэнне гэтага інтэграла і двойчы выкарыстаем пры яго вылічэнні метад інтэгравання часткамі:

$$I=\int e^x\cos x dx=\int \cos x\, de^x=e^x\cos x+\int e^x \sin x dx=$$
$$=e^x\cos x+\int \sin x\, de^x=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\, dx.$$

Такім чынам, мы прыйшлі да раўнання

$$I=e^x\cos x+e^x\sin x-I,$$

адкуль

$$I=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C. ◀$$

З дапамогаю аперацыі дыферэнцавання лёгка праверыць праўдзівасць наступных формул, якія ўтвараюць *табліцу нявызначаных інтэгралаў*. Усюды ў табліцы пад u маем на ўвазе дыферэнцавальную функцыю $u(x)$ ад незалежнай зменнай x:

1) $\int 0\cdot du=C$;
2) $\int 1\cdot du=u+C$;
3) $\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C$;
4) $\int u^\alpha du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq -1$;
5) $\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C,\ a>0,\ a\neq 1$;
6) $\int e^u du=e^u+C$;
7) $\int \sin u du=-\cos u+C$;
8) $\int \cos u du=\sin u+C$;
9) $\int \frac{du}{\cos^2 u}=\mathrm{tg}\, u+C$;
10) $\int \frac{du}{\sin^2 u}=-\mathrm{ctg}\, u+C$;
11) $\int \mathrm{sh}\, u du=\mathrm{ch}\, u+C$;
12) $\int \mathrm{ch}\, u du=\mathrm{sh}\, u+C$;
13) $\int \frac{du}{\mathrm{ch}^2 u}=\mathrm{th}\, u+C$;

14) $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C;$

15) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, \ a>0;$

16) $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C;$

17) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, \ a \neq 0;$

18) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C, \ a>0;$

19) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln |u+\sqrt{u^2+a}| + C, \ a \neq 0.$

Інтэгралы, пададзеныя ў гэтай табліцы, звычайна называюць *таблічавымі*.

9.2. ІНТЭГРАВАННЕ РАЦЫЯНАЛЬНЫХ ФУНКЦЫЙ

1°. Раскладанне правільнага рацыянальнага дробу на суму простых дробаў. Будзем разглядаць *рацыянальную функцыю,* г. зн. функцыю выгляду

$$f(x) = P_m(x)/Q_n(x), \tag{9.8}$$

дзе $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ — мнагасклады ступеняў m і n адпаведна. Надалей усюды будзем меркаваць, што каэфіцыенты мнагаскладаў P_m і Q_n ёсць рэчаісныя лікі.

Калі $m<n$, то функцыю $f(x)$ называюць *правільным рацыянальным дробам;* калі $m \geqslant n$, то $f(x)$ называюць *няправільным рацыянальным дробам.*

Лема 9.1. *Калі функцыя $P_m(x)/Q_n(x)$ ёсць правільны рацыянальны дроб і $x=a$ — рэчаісны корань мнагаскладу $Q_n(x)$ кратнасці $k \geqslant 1$, то існуюць рэчаісны лік A і мнагасклад $P(x)$ з рэчаіснымі каэфіцыентамі, такія, што*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x)}{(x-a)^{k-1} Q_{n-k}(x)}, \tag{9.9}$$

дзе $Q_{n-k}(x)$ ёсць дзель ад дзялення $Q_n(x)$ на $(x-a)^k$. Другі складнік у правай частцы роўнасці (9.9) ёсць правільны рацыянальны дроб, лік A і мнагасклад $P(x)$ вызначаюцца адназначна.

□ Паколькі лік a ёсць корань кратнасці k мнагаскладу $Q_n(x)$, то, згодна з азначэннем кратнага кораня (1.59), мнагасклад $Q_n(x)$ мае наступнае выяўленне

$$Q_n(x) = (x-a)^k Q_{n-k}(x), \ Q_{n-k}(a) \neq 0. \tag{9.10}$$

Знойдзем такі лік A, каб мнагасклад

$$\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} P_m(x) - AQ_{n-k}(x) \tag{9.11}$$

быў падзельны на $x-a$.

Паводле тэарэмы Бэзу мнагасклад $\varphi(x)$ ёсць падзельны на $x-a$, калі і толькі калі $\varphi(a)=0$, г. зн.

$$P_m(a) - AQ_{n-k}(a) = 0,$$

адкуль, згодна з умоваю (9.10), знаходзім

$$A = P_m(a)/Q_{n-k}(a). \tag{9.12}$$

Такім чынам, лік A ёсць рэчаісны і знаходзіцца аднaзначна паводле формулы (9.12).

Паколькі мнагасклад $\varphi(x)$, дзе лік A вызначаецца формулаю (9.12), ёсць падзельны на $x-a$, то існуе адзіны мнагасклад з рэчаіснымі каэфіцыентамі $P(x)$, такі, што

$$\varphi(x) = (x-a)P(x). \tag{9.13}$$

З роўнасцяў (9.11) і (9.13) вынікае, што

$$P_m(x) - AQ_{n-k}(x) = (x-a)P(x). \tag{9.14}$$

Калі падзяліць абедзве часткі роўнасці (9.14) на $Q_n(x) = (x-a)^k Q_{n-k}(x)$, то атрымаем судачыненне (9.9).

Няхай r — ступень мнагаскладу $\varphi(x)$, тады $r \leqslant \max\{m, n-k\}$, дзе $m<n$, $n-k \leqslant n-1 < n$, і таму $r<n$. Такім чынам,

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{k-1}Q_{n-k}(x)} = \frac{\varphi(x)}{Q_n(x)}$$

ёсць правільны дроб. ■

Вынік. *Карыстаючыся гэтаю лемаю k разоў, атрымаем роўнасць*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P(x)}{Q_{n-k}(x)}, \tag{9.15}$$

дзе лікі $A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k$ ёсць рэчаісныя, $P(x)$ — мнагасклад з рэчаіснымі каэфіцыентамі, дроб $P(x)/Q_{n-k}(x)$ ёсць правільны, а лік $x=a$ не з'яўляецца коранем мнагаскладу $Q_{n-k}(x)$.

Лема 9.2. *Калі функцыя $P_m(x)/Q_n(x)$ ёсць правільны рацыянальны дроб, а лік $x_0=\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$, камплексны корань мнагаскладу $Q_n(x)$ кратнасці l, то існуюць рэ-*

чаісныя лікі B і D, а таксама мнагасклад S(x) з рэчаіснымі каэфіцыентамі, такія, што

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^l}+\frac{S(x)}{(x^2+px+q)^{l-1}Q_{n-2l}(x)}, \qquad (9.16)$$

прычым другі складнік у правай частцы гэтай роўнасці ёсць правільны дроб, лікі B, D і каэфіцыенты мнагаскладу S(x) вызначаюцца адназначна; мнагасклад $Q_{n-2l}(x)$ — *дзель ад дзялення* $Q_n(x)$ *на* $(x^2+px+q)^l$, *дзе* x^2+px+ $+q=(x-x_0)(x-\overline{x_0})$.

☐ Паколькі $x_0=\alpha+i\beta$ ёсць корань мнагаскладу $Q_n(x)$ кратнасці l, то, згодна з роўнасцямі (1.60) і (1.61), мнагасклад $Q_n(x)$ можна падаць у выглядзе

$$Q_n(x)=(x^2+px+q)^l Q_{n-2l}(x),$$

дзе

$$Q_{n-2l}(x_0)\neq 0, \quad Q_{n-2l}(x_0)\neq 0. \qquad (9.17)$$

Знойдзем зараз такія рэчаісныя лікі B і D, каб мнагасклад

$$\psi(x)\overset{\text{def}}{=}P_m(x)-(Bx+D)Q_{n-2l}(x) \qquad (9.18)$$

быў падзельны на x^2+px+q. Згодна з тэарэмамі 1.4 і 1.10, гэта будзе выконвацца, калі і толькі калі лік x_0 будзе коранем мнагаскладу $\psi(x)$, г. зн. у выпадку, калі $\psi(x_0)=0$ або

$$P_m(x_0)-(Bx_0+D)Q_{n-2l}(x_0)=0. \qquad (9.19)$$

З роўнасці (9.19) з улікам умоў (9.17) атрымаем

$$Bx_0+D=\frac{P_m(x_0)}{Q_{n-2l}(x_0)}. \qquad (9.20)$$

Няхай c і d ёсць адпаведна рэчаісная і ўяўная часткі дробу, які стаіць у правай частцы роўнасці (9.20). Тады гэтая роўнасць набывае выгляд

$$D+B(\alpha+i\beta)=c+id,$$

адкуль

$$\left.\begin{aligned} B\alpha+D&=c,\\ \beta B&=d.\end{aligned}\right\} \qquad (9.21)$$

Паколькі $\beta\neq 0$, то з сістэмы раўнанняў (9.21) адназначна вызначаюцца рэчаісныя лікі B і D, такія, што для іх праўдзіцца ўмова $\psi(x_0)=0$, і таму для гэтых значэнняў

B і D мнагасклад $\psi(x)$ ёсць падзельны на x^2+px+q. Такім чынам, існуе адзіны мнагасклад з рэчаіснымі каэфіцыентамі $S(x)$, такі, што

$$\psi(x)=(x^2+px+q)S(x). \qquad (9.22)$$

З роўнасцяў (9.18) і (9.22) вынікае, што

$$P_m(x)-(Bx+D)Q_{n-2l}(x)=(x^2+px+q)S(x). \qquad (9.23)$$

Калі падзяліць абедзве часткі роўнасці (9.23) на $Q_n(x)=(x^2+px+q)^l Q_{n-2l}(x)$, то атрымаем стасунак (9.16), у якім дроб

$$\frac{S(x)}{(x^2+px+q)^{l-1}Q_{n-2l}(x)}=\frac{\psi(x)}{Q_n(x)}$$

ёсць правільны. Сапраўды, калі r — ступень мнагасклада $\psi(x)$, то $r\leqslant m$ і $r\leqslant n-2l+1$, адкуль вынікае, што $r\leqslant n-1$. ■

Вынік. *Карыстаючыся гэтаю лемай l разоў, атрымаем*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{B_lx+D_l}{(x^2+px+q)^l}+\frac{B_{l-1}x+D_{l-1}}{(x^2+px+q)^{l-1}}+\ldots+ \\ +\frac{B_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{S(x)}{Q_{n-2l}(x)}, \qquad (9.24)$$

дзе B_j, D_j $(j=\overline{1,\ l})$ ёсць рэчаісныя лікі; $S(x)$ — мнагасклад з рэчаіснымі каэфіцыентамі, дроб $S(x)/Q_{n-2l}(x)$ з'яўляецца правільным, прычым мнагасклад $Q_{n-2l}(x)$ не дзеліцца на x^2+px+q.

Тэарэма 9.4. *Калі $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ — мнагасклады ступеняў m і n адпаведна, прычым $m<n$ і каэфіцыенты гэтых мнагаскладаў ёсць рэчаісныя лікі, а $Q_n(x)$ можа быць пададзены ў выглядзе (1.62), то*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1^{(k_1)}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_1^{(k_1-1)}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\ldots+ \\ +\frac{A_r^{(k_r)}}{(x-a_r)^{k_r}}+\ldots+\frac{A_r^{(1)}}{x-a_r}+\frac{B_1^{(l_1)}x+D_1^{(l_1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\ldots+ \\ +\frac{B_1^{(1)}x+D_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{B_s^{(l_s)}x+D_s^{(l_s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}+\ldots+\frac{B_s^{(1)}x+D_s^{(1)}}{x^2+p_sx+q_s},$$

або

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\sum_{m=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_m}\frac{A_m^{(j)}}{(x-a_m)^j}+\sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{l_m}\frac{B_m^{(j)}x+D_m^{(j)}}{(x^2+p_mx+q_m)^j}. \quad (9.25)$$

Усе каэфіцыенты раскладу (9.25) ёсць рэчаісныя лікі і вызначаюцца адназначна.

☐ Карыстаючыся вынікам з лемы 9.1, вылучым спачатку простыя дробы тыпу $A_1^{(p)}/(x-a_1)^p$, дзе p набывае значэнні ад 1 да k_1. Затым да дробу $P(x)/Q_{n-k_1}(x)$ зноў дастасоўваем вынік з лемы 9.1 (формула (9.15)) і г. д., пакуль не вылучым простыя дробы, якія адпавядаюць усім рэчаісным караням мнагаскладу $Q_n(x)$. У выніку правільны дроб $P_m(x)/Q_n(x)$ будзе мець выяўленне

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\sum_{m=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_m}\frac{A_m^{(j)}}{(x-a_m)^j}+\frac{P(x)}{Q_{n-t}(x)}, \quad (9.26)$$

дзе $t=n-\sum_{m=1}^{r}k_m$; $P(x)/Q_{n-t}(x)$ — правільны дроб, а мнагасклад $Q_{n-t}(x)$ не мае рэчаісных каранёў.

Дастасоўваючы да кожнай пары камплексна-спалучаных каранёў мнагаскладу $Q_n(x)$ вынік з лемы 9.2 (формула (9.24)), атрымаем

$$\frac{P(x)}{Q_{n-t}(x)}=\sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{l_m}\frac{B_m^{(j)}x+D_m^{(j)}}{(x^2+P_mx+q_m)^j}. \quad (9.27)$$

З формул (9.26) і (9.27) вынікае роўнасць (9.25), якая падае расклад правільнага рацыянальнага дробу на суму простых дробаў. ■

Напрыклад, калі

$$f(x)=\frac{x+1}{(x-1)^2(x+3)^3(x^2-3x+5)^2(x^2+1)},$$

то расклад функцыі $f(x)$ на простыя дробы мае выгляд

$$f(x)=\frac{A_1^{(1)}}{x-1}+\frac{A_1^{(2)}}{(x-1)^2}+\frac{A_2^{(1)}}{x+3}+\frac{A_2^{(2)}}{(x+3)^2}+\frac{A_2^{(3)}}{(x+3)^3}+$$
$$+\frac{B_1^{(1)}x+D_1^{(1)}}{x^2+1}+\frac{B_2^{(1)}x+D_2^{(1)}}{x^2-3x+5}+\frac{B_2^{(2)}x+D_2^{(2)}}{(x^2-3x+5)^2}.$$

Для знаходжання каэфіцыентаў $A_m^{(j)}$, $B_m^{(j)}$, $D_m^{(j)}$ раскладу (9.25) звычайна прыводзяць простыя дробы ў правай частцы формулы (9.25) да супольнага назоўніка, які роўны $Q_n(x)$. Тады формула (9.25) набывае выгляд

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{T(x)}{Q_n(x)},$$

адкуль вынікае, што $P_m(x)\equiv T(x)$.

Прыраўноўваючы каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях x мнагаскладаў $P_m(x)$ і $T(x)$, атрымаем лінейную сістэму раўнанняў, з якой знойдзем каэфіцыенты раскладу (9.25). Гэтая сістэма на падставе тэарэмы 9.4 мае адзіны развязак. Такі спосаб знаходжання раскладу правільнага рацыянальнага дробу на простыя называецца *метадам нявызначаных каэфіцыентаў*.

Метад нявызначаных каэфіцыентаў з'яўляецца даволі груваздкім. Пакажам зусім просты метад вылічэння каэфіцыентаў раскладу ў прыватных выпадках.

Няхай назоўнік $Q_n(x)$ правільнага рацыянальнага дробу $P_m(x)/Q_n(x)$ мае рэчаісны корань a кратнасці k. У такім разе

$$Q_n(x)=(x-a)^k Q_{n-k}(x), \quad Q_{n-k}(a)\neq 0,$$

а сярод простых дробаў, на суму якіх раскладаецца дроб $P_m(x)/Q_n(x)$, будзе дроб

$$A/(x-a)^k. \tag{9.28}$$

Калі звярнуцца да лемы 9.1, то каэфіцыент A вызначаецца формулаю (9.11), адкуль мы прыходзім да наступнага правіла: *для вылічэння каэфіцыента A пры простым дробу (9.28), які адпавядае рэчаіснаму кораню a мнагаскладу $Q_n(x)$ кратнасці k, трэба выкрасліць у назоўніку дробу $P_m(x)/Q_n(x)$ множнік $(x-a)^k$ і ў астатнім выразе ўзяць $x=a$.*

Гэты спосаб вылічэння каэфіцыента A звычайна называюць *метадам выкрэслівання*. Адзначым, што гэты спосаб выкарыстоўваецца выключна для вылічэння каэфіцыентаў пры найвышэйшых ступенях простых дробаў, якія адпавядаюць рэчаісным караням мнагаскладу $Q_n(x)$.

Метад выкрэслівання асабліва эфектыўны ў выпадку, калі назоўнік $Q_n(x)$ мае толькі аднакратныя рэчаісныя карані, г. зн. калі

$$Q_n(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

Тады, як мы ведаем, мае месца расклад

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_k}{x-a_k}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n},$$

усе каэфіцыенты якога можна вылічыць метадам выкрэслівання. Для вылічэння каэфіцыента A_k трэба выкрас-

ліць у назоўніку дробу $P_m(x)/Q_n(x)$ множнік $(x-a_k)$ і ў астатнім выразе ўзяць $x=a_k$.

Прыклад 9.4. Знайсці расклад на суму простых дробаў

$$\frac{x+1}{(x-1)x(x+2)}. \tag{9.29}$$

▷ Згодна з тэарэмаю 9.4, запішам:

$$\frac{x+1}{(x-1)x(x+2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x}+\frac{A_3}{x+2}.$$

Для знаходжання A_1 выкраслім у дробу (9.29) множнік $(x-1)$ і ў астатнім выразе возьмем $x=1$. Атрымаем $A_1=2/3$. Аналагічна знаходзім $A_2=-1/2$, $A_3=-1/6$.

Канчаткова маем

$$\frac{x+1}{(x-1)x(x+2)}=\frac{2}{3(x-1)}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{6(x+2)}. \blacktriangleleft$$

2°. Інтэграванне рацыянальных функцый. У тэарэме 9.4 даказана, што ўсякую рацыянальную функцыю $P_m(x)/Q_n(x)$, калі яна з'яўляецца правільным рацыянальным дробам $(m<n)$, можна падаць як суму простых дробаў выгляду

$$\frac{A}{(x-a)^r}, \quad r\in \mathbf{N}, \tag{9.30}$$

$$\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^k}, \quad k\in \mathbf{N}, \quad p^2-4q<0. \tag{9.31}$$

Калі дроб $P_m(x)/Q_n(x)$ ёсць няправільны $(m\geqslant n)$, то пасля дзялення лічніка на назоўнік, напрыклад спосабам «дзялення вуглом», гэты дроб можна запісаць у выглядзе сумы мнагаскладу і правільнага рацыянальнага дробу:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q_n(x)},$$

дзе $S(x)$ — мнагасклад (дзель ад дзялення P_m на Q_n), $R(x)$ — астача ад дзялення, $R(x)/Q_n(x)$ — правільны дроб.

Напрыклад, дроб $(x^4+2x-1)/(x^2-x+1)$ ёсць няправільны. Выконваючы дзяленне x^4+2x-1 на x^2-x+1, атрымаем:

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x-1 & x^2-x+1 \\ \underline{-\;x^4-x^3+x^2} & x^2+x \\ x^3-x^2+2x-1 & \\ \underline{-\;x^3-x^2+x} & \\ x-1 & \end{array}$$

Такім чынам,

$$\frac{x^4+2x-1}{x^2-x+1}=x^2+x+\frac{x-1}{x^2-x+1}. \tag{9.32}$$

Звернемся да інтэгравання рацыянальнай функцыі. Інтэграваць мнагасклад мы ўмеем, бо яго першаіснаю будзе мнагасклад ступені, на адзінку больш высокай. Застаецца навучыцца інтэграваць простыя дробы. Разгледзім спачатку дробы выгляду (9.30). Калі $r=1$, то

$$\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C,$$

а калі $r>1$, то

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^r}=\frac{A}{(1-r)(x-a)^{r-1}}+C.$$

Такім чынам, пры інтэграванні дробу (9.30), атрымліваецца або лагарыфмічная функцыя ($r=1$), або правільны рацыянальны дроб ($r>1$).

Далей разгледзім дробы (9.31). Абазначым

$$I_k=\int\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^k}\,dx.$$

Паколькі

$$x^2+px+q=(x+p/2)^2+q-p^2/4,\quad q-p^2/4>0,$$

то, беручы $\sqrt{q-p^2/4}=a$, $x+p/2=t$, атрымліваем

$$I_k=\int\frac{B(t-p/2)+D}{(t^2+a^2)^k}\,dt.$$

Такім чынам, інтэграл I_k ёсць лінейная камбінацыя інтэгралаў

$$M_k=\int\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k}\quad \text{і}\quad N_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Пры $k=1$ гэтыя інтэгралы адпаведна роўныя:

$$M_1=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+px+q)+C,$$

$$N_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}=\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Калі $k>1$, то

$$M_k=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C,$$

а інтэграл N_k можна вылічыць пры дапамозе рэкурэнтнай формулы (9.7), прычым, згодна з гэтаю формулай, N_k ёсць лінейная камбінацыя правільнага рацыянальнага дробу і функцыі арктангенс.

Такім чынам, інтэграл ад усякай рацыянальнай функцыі падаецца ў выглядзе лінейнай камбінацыі мнагаскладу (калі разглядаецца няправільны дроб), правільнага рацыянальнага дробу, лагарыфмічнай функцыі і функцыі арктангенс.

Прыклад 9.5. Знайсці $I=\int\frac{x^4+2x-1}{x^2-x+1}\,dx.$

▷ Запішам роўнасць (9.32) у выглядзе

$$\frac{x^4+2x-1}{x^2-x+1}=x^2+x+\frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4},$$

адкуль знаходзім

$$I=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$ ◀

9.3. ІНТЭГРАВАННЕ РАЦЫЯНАЛЬНА-ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫХ І РАЦЫЯНАЛЬНА-ГІПЕРБАЛІЧНЫХ ФУНКЦЫЙ

1°. Інтэграванне рацыянальна-трыганаметрычных функцый. Часта сустракаюцца інтэгралы ад нерацыянальных функцый, якія з дапамогаю тых або іншых падстаноў можна пераўтварыць да інтэгралаў ад рацыянальных функцый. Пры гэтым кажуць, што разглядааны інтэграл *рацыяналізуецца* зададзенай падстановаю.

Рацыянальнай функцыяй ад дзвюх зменных u і v будзем называць выраз выгляду

$$R(u,\ v)\overset{\text{def}}{=}\frac{P(u,\ v)}{Q(u,\ v)},$$

дзе P і Q — мнагасклады ад дзвюх зменных u і v (гл. формулу (1.63)).

Зусім няцяжка пераканацца ў праўдзівасці наступнага сцверджання: *калі $R(u, v)$ ёсць рацыянальная функцыя ад дзвюх зменных u і v, а $R_1(t)$, $R_2(t)$, $R_3(t)$ — адвольныя рацыянальныя функцыі адной зменнай t, то выраз выгляду*

$$R(R_1(t),\ R_2(t))R_3(t) \tag{9.33}$$

ёсць рацыянальная функцыя ў дачыненні да зменнай t.

Для доказу гэтага сцверджання дастаткова заўважыць, што пры выкананні з рацыянальнымі функцыямі адной зменнай t аперацый складання, адымання, множання і дзялення зноў атрымаецца рацыянальная функцыя адной зменнай t.

Функцыя $y=R(\sin x,\ \cos x)$, дзе R — рацыянальная функцыя дзвюх зменных, называецца *рацыянальна-трыганаметрычнай.*

Дакажам, што *інтэграл ад рацыянальна-трыганаметрычнай функцыі рацыяналізуецца падстановаю*

$$t=\operatorname{tg}(x/2),\quad x\in(-\pi,\ \pi).$$

Сапраўды, паколькі

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2\operatorname{arctg} t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

то

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}. \tag{9.34}$$

Калі пазначыць

$$R_1(t)=\frac{2t}{1+t^2},\quad R_2(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad R_3(t)=\frac{2}{1+t^2},$$

то правая частка роўнасці (9.34) ёсць інтэграл ад выразу тыпу (9.33), г. зн. інтэграл ад рацыянальнай функцыі.

Прыклад 9.6. Вылічыць інтэграл $I=\int\frac{dx}{1+2\cos x}$.

▷ Выкарыстаем падстанову $t=\operatorname{tg}(x/2)$, атрымаем:

$$x=2\operatorname{arctg} t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$I=2\int\frac{dt}{3-t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\Bigg|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{3}}\right|+C. ◀$$

Хаця падстанова $t=\operatorname{tg}(x/2)$ і з'яўляецца універсальнай, але яна часта прыводзіць да такіх рацыянальных функцый, інтэгралы ад якіх вымагаюць працаёмістых вылічэнняў пры іх знаходжанні. Таму яе выкарыстоўваюць толькі ў тым выпадку, калі не відаць іншых падыходаў да вылічэння інтэграла ад рацыянальна-трыганаметрычнай функцыі.

З такой прычыны мы пакажам некалькі прыватных выпадкаў, калі *інтэграл ад рацыянальна-трыганаметрычнай функцыі можна рацыяналізаваць пры дапамозе больш простых падстановаў.*

1. Калі $R(\sin x, \cos x)=\cos x R_1(\sin x, \cos^2 x)$, што адпавядае ўмове $R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x)$, то

$$\int R(\sin x, \cos x)dx=\int R_1(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx=$$
$$=\int R_1(\sin x, 1-\sin^2 x)d\sin x,$$

і таму *падстанова* $t=\sin x$, $x\in(-\pi/2, \pi/2)$ прыводзіць да інтэграла ад рацыянальнай функцыі тыпу (9.33).

Напрыклад,

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C.$$

2. Калі $R(\sin x, \cos x)=\sin x R_2(\sin^2 x, \cos x)$ (гэта адпавядае ўмове $R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x)$), то

$$\int R(\sin x, \cos x)dx=\int R_2(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx=$$
$$=-\int R_2(1-\cos^2 x, \cos x)d\cos x.$$

Гэта азначае, што *падстанова* $t=\cos x$, $x\in(0, \pi)$, прыводзіць інтэграл ад рацыянальна-трыганаметрычнай функцыі да інтэграла ад рацыянальнай функцыі тыпу (9.33).

Напрыклад,

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x dx}{\sin^2 x}=\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C.$$

3. Няхай, нарэшце, $R(\sin x, \cos x)=R_3(\cos^2 x, \operatorname{tg} x)$, што адпавядае ўмове $R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x, \cos x)$. У такім разе

$$\int R(\sin x, \cos x)dx=\int R_3(\cos^2 x, \operatorname{tg} x)dx=$$
$$=\int R_3\left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \operatorname{tg} x\right)dx.$$

Калі ўзяць падстанову $t=\operatorname{tg} x$, то $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ і

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx=\int R_3\left(\frac{1}{1+t^2},\ t\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Паколькі падынтэгральная функцыя ёсць функцыя тыпу (9.33), то рацыянальна-трыганаметрычная функцыя ў разгляданым выпадку рацыяналізуецца *падстановаю* $t=\operatorname{tg} x$, $x\in(-\pi/2,\ \pi/2)$.

Напрыклад,

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int\frac{\operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^4 x+1}dx=\int\frac{\operatorname{tg} x\, d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^4 x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\operatorname{tg}^2 x}{(\operatorname{tg}^2 x)^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)+C.$$

2°. Інтэграванне рацыянальна-гіпербалічных функцый. Функцыю $y=R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x)$ будзем называць *рацыянальна-гіпербалічнай*, калі R ёсць рацыянальная функцыя дзвюх зменных.

З азначэння гіпербалічных функцый лёгка выводзяцца формулы:

$$\operatorname{sh} x=\frac{2\operatorname{th}(x/2)}{1-\operatorname{th}^2(x/2)},\quad \operatorname{ch} x=\frac{1+\operatorname{th}^2(x/2)}{1-\operatorname{th}^2(x/2)},\quad \operatorname{ch}^2 x=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2(x/2)}.$$

Інтэграл $\int R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x)dx$ заўсёды можна рацыяналізаваць падстановаю $t=\operatorname{th}(x/2)$. Сапраўды, пры гэтым $dt=\frac{dx}{2\operatorname{ch}^2(x/2)}$, адкуль $dx=\frac{2dt}{1-t^2}$.

Улічваючы, што $\operatorname{sh} x=\frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch} x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$, атрымаем

$$\int R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1-t^2},\ \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2dt}{1-t^2},$$

прычым падынтэгральная функцыя мае выгляд (9.33). Гэта азначае, што *падстанова* $t=\operatorname{th}(x/2)$ рацыяналізуе інтэгралы ад рацыянальна-гіпербалічных функцый.

У некаторых выпадках пры вылічэнні разгляданых інтэгралаў больш эфектыўнымі могуць быць *падстановы* $t=\operatorname{sh} x$, $t=\operatorname{ch} x$, $t=\operatorname{th} x$ або метад інтэгравання часткамі.

Прыклад 9.7. Знайсці $I=\int\operatorname{ch}^3 x\operatorname{sh}^4 x\,dx$.

▷ Паколькі $\operatorname{ch}^2 x=1+\operatorname{sh}^2 x$, $\operatorname{ch} x dx=d(\operatorname{sh} x)$,то, беручы $t=\operatorname{sh} x$, атрымаем:

$$I=\int(1+t^2)t^4dt=\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C\Bigg|_{t=\operatorname{sh}x}=\operatorname{sh}x\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\operatorname{sh}^2x\right)+C. \blacktriangleleft$$

9.4. ІНТЭГРАВАННЕ ІРАЦЫЯНАЛЬНЫХ ФУНКЦЫЙ

1°. Інтэграванне дробава-лінейных ірацыянальнасцяў. Функцыю выгляду

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \qquad (9.35)$$

дзе R — рацыянальная функцыя ад дзвюх зменных; a, b, c, $d\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$, будзем называць *дробава-лінейнай ірацыянальнасцю.*

Дакажам, што інтэграл ад функцыі (9.35) пры $ad-bc\neq0$ рацыяналізуецца падстановаю

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Сапраўды,

$$t^n=\frac{ax+b}{cx+d}, \quad x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, \quad dx=\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt,$$

так што

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right)\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt. \qquad (9.36)$$

Калі ўзяць

$$R_1(t)=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, \quad R_2(t)=t, \quad R_3(t)=\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2},$$

то ў правай частцы (9.36) атрымаем інтэграл ад выразу тыпу (9.33), які ёсць інтэграл ад рацыянальнай функцыі. Такім чынам, даказана, што *інтэграл ад дробава-лінейнай ірацыянальнасці (9.35) рацыяналізуецца падстановаю* $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Калі падынтэгральная функцыя мае выгляд

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_m}\right),$$

дзе $r_1, r_2, \ldots, r_m$ — рацыянальныя лікі; a, b, c, $d\in\mathbf{R}$; $ad-bc\neq0$; R — рацыянальная функцыя $(m+1)$-га аргумента, то інтэграл ад такой функцыі рацыяналізуецца падстановаю $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, дзе n — найменшы супольны назоўнік дробаў $r_1, r_2, \ldots, r_m$.

Прыклад 9.8. Знайсці $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

▷ Маем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3+\left(\sqrt[6]{x}\right)^2} = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt[6]{x},\ x=t^6, \\ dx=6t^5dt \end{array}\right] = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} =$$

$$=6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1}\,dt = 6\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\right.$$

$$\left.-\ln|t+1|\right)+C\Big|_{t=\sqrt[6]{x}} = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C. \blacktriangleleft$$

2°. Інтэграванне квадратовых ірацыянальнасцяў. Функцыю выгляду

$$R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\,), \qquad (9.37)$$

дзе $a,\ b,\ c\in\mathbf{R}$; $a\neq 0$; R — рацыянальная функцыя ад дзвюх зменных, будзем называць *квадратовай ірацыянальнасцю.*

Калі трохсклад ax^2+bx+c мае два рэчаісныя карані $x_1,\ x_2\ (x_1\neq x_2)$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = |x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}.$$

Такім чынам,

$$R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\,) = R\left[x,\ |x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right] =$$

$$= R_0\left[x,\ \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right].$$

У такім разе інтэграл ад функцыі (9.37) ёсць інтэграл ад дробава-лінейнай ірацыянальнасці і таму *падстанова* $t=\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}$ рацыяналізуе гэты інтэграл.

Калі $x_1=x_2$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)^2} = |x-x_1|\sqrt{a},\quad a>0,$$

гэта азначае, што ў такім выпадку функцыя (9.37) ёсць рацыянальная.

Таму для разглядання застаецца толькі выпадак, калі трохсклад ax^2+bx+c не мае рэчаісных каранёў і $a>0$. Дакажам, што ў такім разе інтэграл ад функцыі (9.37) рацыяналізуецца *першаю падстановаю Эйлера:*

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}, \quad a>0. \qquad (9.38)$$

Калі апошнюю роўнасць перапісаць у выглядзе $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$ і падвысіць абедзве яе часткі да квадрату, то атрымаем $bx+c=t^2-2\sqrt{a}\,tx$, так што

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b},$$

$$dx=2\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt.$$

Такім чынам,

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$

$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right)\cdot 2\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt=$$

$$=\int R_0(t)dt,$$

дзе $R_0(t)$ — рацыянальная функцыя ад t.

Мы паказалі, што, які б ні быў квадратовы трохсклад ax^2+bx+c (у выпадку існавання выразу $\sqrt{ax^2+bx+c}$), інтэграл ад функцыі (9.37) заўсёды рацыяналізуецца.

Калі ў трохскладзе ax^2+bx+c каэфіцыент $a<0$, $c>0$, для рацыяналізацыі інтэграла ад функцыі (9.37) можна скарыстаць *другую падстанову Эйлера:*

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}.$$

Прыклад 9.9. Вылічыць $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

▷ Паколькі трохсклад x^2+x+1 мае камплексныя карані, зробім падстанову Эйлера (9.38) $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$. Пасля падвышэння да квадрату абедзвюх частак гэтай роўнасці атрымаем: $x^2+x+1=t^2-2tx+x^2$, $x+1=t^2-2tx$, адкуль

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t}, \quad dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}\,dt.$$

Тады

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}\,dt.$$

Раскладаючы падынтэгральную функцыю на суму простых дробаў, атрымаем:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{1+2t}-\frac{3}{(1+2t)^2}\right)dt=2\ln|t|-$$

$$-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2(1+2t)}+C\Bigg|_{t=x+\sqrt{x^2+x+1}}=$$

$$=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+$$

$$+\frac{3}{2\left(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right)}+C. \blacktriangleleft$$

Трэба сказаць, што знаходжанне інтэгралаў пры дапамозе падстановаў Эйлера прыводзіць да груваздкіх вылічэнняў, таму іх выкарыстоўваюць толькі тады, калі не відаць больш простага спосабу вылічэння дадзенага інтэграла.

Пакажам спосабы інтэгравання квадратовых ірацыянальнасцяў у двух прыватных выпадках.

Пры вылічэнні інтэграла

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \qquad (9.39)$$

дзе $P_n(x)$ — мнагасклад n-й ступені, будзем карыстацца выяўленнем

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+$$
$$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \qquad (9.40)$$

У гэтай роўнасці $Q_{n-1}(x)$ — мнагасклад з нявызначанымі каэфіцыентамі ступені $n-1$ і λ — некаторы лік. Калі прадыферэнцаваць тоеснасць (9.40), і затым памножыць абедзве часткі атрыманага судачынення на $2\sqrt{ax^2+bx+c}$, знойдзем

$$P_n(x)=Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c)+$$
$$+Q(x)(2ax+b)+2\lambda. \qquad (9.41)$$

Прыраўноўваючы каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях x у апошняй тоеснасці, вылічым з атрыманай сістэмы раўнанняў каэфіцыенты мнагасkладу $Q_{n-1}(x)$ і лік λ. Заўважым, што інтэграл у правай частцы формулы (9.40) зводзіцца да табліцавага інтэграла лінейнай падстановаю.

Прыклад 9.10. Знайсці $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

▷ Скарыстаем формулу (9.41), дзе $P_n(x)=x^2$; $Q_{n-1}(x)=Ax+B$. Атрымаем тоеснасць

$$2x^2=2A(x^2+x+1)+(Ax+B)(2x+1)+2\lambda,$$

адкуль вынікае:

$$2=2A+2A,\ \ 0=2A+A+2B,\ \ 0=2A+B+2\lambda.$$

З гэтай сістэмы вылічаем: $A=1/2$, $B=-3/4$, $\lambda=-1/8$. Паколькі

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{d(x+1/2)}{\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}}=$$
$$=\ln\left|x+1/2+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C,$$

то

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}-$$
$$-\frac{1}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$$ ◀

Для вылічэння інтэграла

$$\int\frac{dx}{(x-p)^m\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (9.42)$$

скарыстаем *падстанову*

$$t=1/(x-p). \qquad (9.43)$$

Атрымаем:

$$dx=-dt/t^2,\ \ ax^2+bx+c=\frac{(ap^2+bp+c)t^2+(2ap+b)t+a}{t^2},$$

адкуль

$$\int\frac{dx}{(x-p)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$
$$=-\int\frac{t^{m-1}dt}{\sqrt{(ap^2+bp+c)t^2+(2ap+b)t+a}}.$$

Гэта азначае, што вылічэнне інтэграла (9.42) пры дапамозе падстановы (9.43) зводзіцца да вылічэння інтэграла тыпу (9.39).

Заўважым, што пры вылічэнні інтэгралаў ад квадратовых ірацыянальнасцяў (9.37) можна таксама выкарыстоўваць трыганаметрычныя падстановы.

Звернемся да інтэграла ад функцыі (9.37), дзе $a\neq 0$ і $c-b^2/(4a)\neq 0$ (пры $a=0$ маем дробава-лінейную ірацыянальнасць; пры $c-b^2/(4a)=0$, калі $a>0$, будзем

мець справу з рацыянальнай функцыяй, а калі $a<0$, функцыя $\sqrt{ax^2+bx+c}$ нявызначаная ні пры адным значэнні x).

Вылучаючы поўны квадрат у трохскладзе

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

і беручы

$$t=x+\frac{b}{2a}, \qquad (9.44)$$

атрымаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Разгледзім чатыры магчымыя выпадкі.

1. Няхай $a>0$, $c-b^2/(4a)>0$. Абазначым $a=m^2$, $c-b^2/(4a)=n^2$. У такім разе будзем мець

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2}.$$

2. Няхай $a>0$, $c-b^2/(4a)<0$. Тады $a=m^2$, $c-b^2/(4a)=-n^2$. Такім чынам,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}.$$

3. Няхай $a<0$, $c-b^2/(4a)>0$. Тады $a=-m^2$, $c-b^2/(4a)=n^2$ і таму

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}.$$

4. Калі $a<0$, $c-b^2/(4a)<0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}$ не мае рэчаісных значэнняў.

Такім чынам, інтэграл ад функцыі (9.37) заменаю (9.44) прыводзіцца да аднаго з наступных інтэгралаў:

$$1)\ \int R\left(t, \sqrt{m^2t^2+n^2}\right)dt; \qquad (9.45)$$

$$2)\ \int R\left(t, \sqrt{m^2t^2-n^2}\right)dt; \qquad (9.46)$$

$$3)\ \int R\left(t, \sqrt{n^2-m^2t^2}\right)dt. \qquad (9.47)$$

Відавочна, што інтэграл (9.45) пры дапамозе *падстановы* $t=\frac{m}{n}\operatorname{tg} u$ прыводзіцца да інтэграла ад рацыянальна-трыганаметрычнай функцыі. Аналагічна для вылічэння інтэграла (9.46) выкарыстоўваецца *падстанова* $t=\frac{n}{m}\sec u$, для інтэграла (9.47) — *падстанова* $t=\frac{n}{m}\sin u$.

Прыклад 9.11. Вылічыць інтэграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

▷ Гэта інтэграл тыпу (9.47). Зробім замену $x=2\sin u$, $dx=2\cos u du$, тады:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \int \frac{2\cos u du}{\sqrt{(4-4\sin^2 u)^3}} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{4}\operatorname{tg} u + C =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\sin u}{\cos u} + C = \frac{1}{4}\frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} + C \Bigg|_{\sin u = x/2} = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C. ◀$$

3°. Інтэграванне біномнага дыферэнцыяла. Будзем называць *біномным дыферэнцыялам* выраз выгляду

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

дзе a і b — рэчаісныя канстанты; m, n і p — некаторыя рацыянальныя лікі.

Пакажам тры выпадкі, калі існуюць падстановы, якія рацыяналізуюць інтэграл ад біномнага дыферэнцыяла.

1. Няхай p — цэлы лік. У такім выпадку біномны дыферэнцыял ёсць дробава-лінейная ірацыянальнасць тыпу $R\left(x, \sqrt[r]{x}\right)dx$, дзе r — найменшае супольнае кратнае назоўнікаў рацыянальных лікаў m і n. Такім чынам, у гэтым выпадку інтэграл ад біномнага дыферэнцыяла рацыяналізуецца *падстановаю* $t=\sqrt[r]{x}$.

2. Няхай $(m+1)/n$ — цэлы лік. У такім разе падстанова $u=x^n$ прыводзіць інтэграл да выгляду

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bu)^p u^q du. \tag{9.48}$$

Падынтэгральная функцыя ў правай частцы роўнасці (9.48) ёсць дробава-лінейная ірацыянальнасць выгляду $R\left(u, \sqrt[s]{a+bu}\right)$, дзе s — назоўнік рацыянальнага ліку p.

Такім чынам, у разгляданым выпадку біномны дыферэнцыял рацыяналізуецца *падстановаю*

$$t=\sqrt[s]{a+bu}=\sqrt[s]{a+bx^n}.$$

3. Няхай $(m+1)/n+p$ — цэлы лік. У такім разе падынтэгральная функцыя ў правай частцы (9.48) ёсць дробава-лінейная ірацыянальнасць выгляду $R\left(u, \sqrt[s]{\frac{a+bu}{u}}\right)$, так што інтэграл ад біномнага дыферэнцыяла рацыяналізуецца *падстановаю* выгляду

$$t=\sqrt[s]{\frac{a+bu}{u}}=\sqrt[s]{\frac{a}{x^n}+b}.$$

Рускі матэматык П. Л. Чабышоў* даказаў, што ні ў якім іншым выпадку інтэграл ад біномнага дыферэнцыяла не выражаецца праз элементарныя функцыі.

Заўвага. Вылічэнне інтэграла $\int \sin^m x \cos^n x dx$ падстановаю $u=\sin x$ зводзіцца да інтэгравання біномных дыферэнцыялаў

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int u^m (1-u^2)^{(n-1)/2} du.$$

Напрыканцы адзначым, што інтэгралы ад многіх элементарных функцый не выражаюцца праз элементарныя функцыі. Такімі інтэграламі з'яўляюцца, напрыклад:

1) $\int e^{-x^2} dx$ — *інтэграл Пуасона***;*

2) $\int \sin x^2 dx$ і $\int \cos x^2 dx$ — *інтэгралы Фрэнэля****;*

3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ — *інтэгральны лагарыфм;*

4) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ — *інтэгральны сінус;*

5) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ — *інтэгральны косінус.*

Яны сустракаюцца ў дастасаваннях.

---

* *Чабышоў Пафнуці Львовіч* (Чебышев Пафнутий Львович, 1821—1894) — рускі матэматык і механік.

** *Пуасон Сімяон Дэні* (Poisson Siméon Denis, 1781—1840) — французскі механік, фізік і матэматык.

*** *Фрэнэль Огюстэн Жан* (Fresnel Augustin Jean, 1788—1827) — французскі фізік і матэматык.

СКАРЫСТАНАЯ ЛІТАРАТУРА

1. *Апатёнок Р. Ф., Маркина А. М., Попова Н. В., Хейнман В. В.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Мн., 1986.

2. *Ахраменка В. К.* Руска-беларускі слоўнік матэматычнай тэрміналогіі. Мн., 1991.

3. *Багаяўленскі І. К.* Аналітычная геамэтрыя. Горкі, 1932.

4. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., 1985.

5. *Богданов Ю. С.* Лекции по математическому анализу: В 2 ч. Мн., 1974.

6. *Бурстын Ц. Л.* Курс дыфэрэнцыяльнай геамэтрыі. Мн., 1933.

7. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. М., 1974.

8. *Жевняк Р. М., Карпук А. А.* Высшая математика: Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление. Мн., 1992.

9. *Жевняк Р. М., Карпук А. А.* Высшая математика: Функции многих переменных. Интегральное исчисление. Мн., 1993.

10. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. М., 1984.

11. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа: В 2 ч. М., 1971—1973. Ч. 1. 1971.

12. *Карташев А. П., Рождественский Б. Л.* Математический анализ. М., 1984.

13. *Круталевіч А. П.* Элементы вышэйшай матэматыкі. Мн., 1933.

14. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. М., 1989.

15. *Милованов М. В., Тышкевич Р. И., Феденко А. С.* Алгебра и аналитическая геометрия: В 2 ч. Мн., 1984—1987. Ч. 1. 1984.

16. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. М., 1985. Т. 1.

17. *Прывалаў І. І.* Аналітычная геаметрыя. Мн., 1934.

18. *Смірноў У. І.* Курс вышэйшай матэматыкі для тэхнікаў і фізікаў: У 2 т. Мн., 1935—1936.

19. Русско-белорусский математический словарь/Я. В. Радыно, П. П. Шуба, А. Б. Антоневич и др.; Под. общ. ред. Я. В. Радыно. Мн., 1993.

20. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. М., 1988.

21. Тэрміналагічны слоўнік па вышэйшай матэматыцы для ВНУ/ Т. Сухая, Р. Еўдакіменка, В. Траццякевіч, Н. Гудзень. Мн., 1993.

ТЭКСТАВЫ ДАВЕДНІК

ЗМЕСТ

Вучэбнае выданне

Русак Валянцін Мікалаевіч
Шлома Людміла Іосіфаўна
Ахраменка Віктар Карнеевіч
Крачкоўскі Аляксандр Пятровіч

КУРС
ВЫШЭЙШАЙ МАТЭМАТЫКІ

Алгебра і геаметрыя.
Аналіз функцый
адной зменнай

Рэдактар *М. С. Малчанава*
Мастак вокладкі і
мастацкі рэдактар *А. Г. Званароў*
Тэхнічны рэдактар *І. П. Ціханава*
Карэктары *Н. Б. Кучмель*,
Н. Б. Назарава

Здадзена ў набор 03.06.94. Падпісана да друку 05.12.94. Фармат 84×108/32. Папера друк № 2. Гарнітура літаратурная. Афсетны друк. Умоўн.-друк. арк. 22,68. Умоўн. фарбаадбіт. 22,68. Ул.-выд. арк. 21,35. Тыраж 8000 экз. Зак. 1034.

Выдавецтва «Вышэйшая школа» Міністэрства культуры і друку Рэспублікі Беларусь. Ліцэнзія ЛВ № 5. 220048, Мінск, праспект Машэрава, 11.

Мінскі ордэна Працоўнага Чырвонага Сцяга паліграфкамбінат МВПА імя Я. Коласа. 220005, Мінск, вул. Чырвоная, 23.